©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Zur Theorie der Bewegung eines starren Systems

Eduard Weyr in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 21. März 1895.)

Die allgemeinste Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene kann dadurch hervorgebracht werden, dass man eine Curve auf einer anderen ohne Gleiten fortrollen lässt. Berücksichtigt man hiebei den Umstand, dass die Osculationsebenen beider Curven immerwährend zusammenfallen, so wird man naturgemäss zu der folgenden Verallgemeinerung geführt, bei welcher zwei beliebige, im Allgemeinen nicht ebene Curven auftreten.

Mit dem beweglichen starren System sei eine Curve Γ_1 verbunden, ferner sei eine feste Curve Γ gegeben, welche Γ_1 in einem Punkte O berührt und in diesem Punkte mit Γ_1 überdies die Osculationsebene gemein hat. Rollt die Curve Γ_1 auf Γ ohne zu gleiten derart, dass die Osculationsebenen beider Curven übereinstimmen, so wird dem starren System eine Bewegung ertheilt, die wir Ω nennen wollen; mit ihr wollen wir uns näher befassen.

Es bezeichne M_1 einen beliebigen Punkt von Γ_1 und s die Länge des Bogens OM_1; M sei der correspondirende Punkt von Γ, so dass der Bogen OM gleich s ist. Den Punkt O wählen wir zum Scheitel eines rechtwinkeligen Dreikants, dessen eine Kante Ox mit der Tangente der beiden Curven, dessen zweite Kante Oy mit ihrer Hauptnormale und dessen dritte Kante Oz mit ihrer Binormale im Punkte O zusammenfällt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wir wollen nun eine erste Hilfsbewegung auf folgende Art definiren: Es bewege sich das Dreikant $Oxyz$ derart, dass sein Scheitel die Curve Γ_1 durchlauft, die x-Axe die Curve berührt und die y-Axe mit ihrer Hauptnormale zusammenfällt, und es sei $M_1x_1y_1z_1$ oder kurz (M_1) die dem Punkte M_1 entsprechende Lage des Dreikants. Wird überdies der Bogen s der Zeit gleichgesetzt und werden die im Sinne der Axen x_1, y_1, z_1 gemessenen Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten mit $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, p_1, q_1, r_1$ bezeichnet, so hat man[1] $\xi_1 = 1$, $\eta_1 = 0$, $\zeta_1 = 0$, $q_1 = 0$, und $-p_1$, r_1 geben die Torsion und Krümmung von Γ_1 im Punkte M_1.

Eine zweite Hilfsbewegung sei analog durch die Curve Γ definirt; es sei hiebei $Mxyz$ oder kurz (M) das dem Punkte M zukommende Dreikant und $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, p, $q = 0$, r seine Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten.

Bezeichnet (M_1+dM_1) das durch die erste Hilfsbewegung zur Zeit $s+ds$ gegebene Dreikant, ebenso $(M+dM)$ das durch die zweite Hilfsbewegung zu derselben Zeit fixirte Dreikant, ist ferner das Dreikant $(M+\delta M)$ gegen (M) in derselben relativen Lage wie (M_1+dM_1) gegen (M_1), so überführt die Bewegung Ω in der Zeit ds das Dreikant $(M+\delta M)$ in die Position $(M+dM)$. Nun sind die dem Übergange von (M) in $(M+\delta M)$ zukommenden, in der Richtung der Axen Mx, My, Mz gemessenen Geschwindigkeiten $\xi_1, \eta_1, \zeta_1, p_1, q_1, r_1$, jene dem Übergange von (M) in $(M+dM)$ entsprechenden $\xi, \eta, \zeta, p, q, r$ und somit die der Bewegung Ω zukommenden Geschwindigkeiten

$$\xi-\xi_1,\ \eta-\eta_1,\ \zeta-\zeta_1,\ p-p,\ q-q_1,\ r-r_1$$

d. i.

$$0, 0, 0,\ p-p_1,\ 0,\ r-r_1.$$

Die Bewegung Ω setzt sich daher aus lauter infinitesimalen Rotationen zusammen, und zwar geht zur Zeit s die Rotationsaxe durch den Punkt M und ist in der rectificirenden Ebene der Curve Γ gelegen; die in der Richtung der Tangente, respective

[1] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal, t. I.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

der Binormale von Γ genommenen Componenten der Rotationsgeschwindigkeit sind $p-p_1$ und $r-r_1$.

Und umgekehrt: Jede Bewegung, die sich aus blossen infinitesimalen Rotationen zusammensetzt, ist eine Bewegung Ω.

In der That sei die Lage der momentanen Rotationsaxe A_u als Function einer Veränderlichen u gegeben und sei $v du$ die zugehörige infinitesimale Rotation. Die Rotationsaxen A_u erfüllen eine Regelfläche Π; auf dieser ziehen wir irgend eine geodätische Curve Γ und bezeichnen mit M den Punkt, in welchem A_u diese Curve trifft. Die Rotationsaxe A_u liegt dann in der dem Punkte M zukommenden rectificirenden Ebene der Curve Γ. Die Coordinaten von M sind Functionen von u. Wir adaptiren der Curve Γ in der oben angegebenen Weise das Dreikant $Mxyz$ und betrachten die dem Zuwachs du entsprechenden Translationen und Rotationen. Auf Γ wählen wir einen festen Punkt O und führen arc $OM = s$ als neue Veränderliche ein; dadurch möge $v du$ in $w ds$ übergehen und für die Translationen und Rotationen sich ξds, 0, 0, $p ds$, 0, $r ds$ ergeben.

Sind $P ds$, $R ds$ die in der Richtung der Axe x, respective z genommenen Componenten der Rotation $w ds$, so setze man

$$p_1 = p-P, \qquad r_1 = r-R, \qquad \xi = \xi_1$$

und definire eine Hilfsbewegung dadurch, dass für $s = 0$ ein bewegliches Dreikant mit dem Dreikant $Oxyz$ zusammenfällt, und dass die dem Werthe s zukommenden Translations- und Rotationsgeschwindigkeiten, gemessen im Sinne der beweglichen Axen, ξ_1, 0, 0, p_1, 0, r_1 sein mögen. Durch diese Hilfsbewegung wird die Curve Γ_1, als Bahn des Scheitels des Dreikants, fixirt, durch deren Fortrollen auf der Curve Γ, bei immerwährender Übereinstimmung der Osculationsebenen beider Curven, offenbar die gegebene Bewegung hervorgebracht wird.

Zieht man durch den s entsprechenden Punkt M_1 von Γ_1 in der rectificirenden Ebene dieser Curve eine Gerade, die gegen die Tangente und Binormale dieselbe Lage hat wie A_u gegen die Tangente und Binormale von Γ im Punkte M, so erfüllt jene Gerade eine zweite Regelfläche Π_1. Durch die

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Bewegung Ω wird die Fläche Π_1 auf die Fläche Π offenbar applicirt, so zwar, dass Π_1 auf Π ohne Gleiten fortrollt, wobei die in den correspondirenden Punkten M_1 und M construirten Erzeugenden zur Deckung kommen.

Es ist nicht ohne Interesse, zuzusehen, unter welcher Bedingung die Flächen Π und Π_1 developpabel werden. Zu dem Ende bemerke man, dass die Rotationsaxe durch die Gleichungen

$$\frac{x}{z} = \frac{p-p_1}{r-r_1}, \qquad y = 0 \tag{1}$$

fixirt ist. Bezeichnen x', y', z' die Kanten von $(M+dM)$, so fixiren die Gleichungen

$$\frac{x'}{z'} = \frac{p-p_1}{r-r_1} + d\left(\frac{p-p_1}{r-r_1}\right), \qquad y' = 0 \tag{2}$$

die Nachbarrotationsaxe. Es seien ferner x', y', z' die bezüglich des Dreikants $(M+dM)$ genommenen Coordinaten irgend eines Punktes und x, y, z die bezüglich (M) genommenen Coordinaten desselben Punktes, so ist klar, dass der im Dreikant (M) festgelegte Punkt x', y', z' durch die zweite Hilfsbewegung $(\xi, \eta, \zeta, p, q, r)$ in die Position x, y, z gelangt, oder umgekehrt, dass der Punkt x, y, z des Dreikants $(M+dM)$ durch die Bewegung $(-\xi, -\eta, -\zeta, -p, -q, -r)$ in die Lage x', y', z' kommt. Man hat somit

$$\begin{aligned} x'-x &= -(\xi+qz-ry)\,ds \\ y'-y &= -(\eta+rx-pz)\,ds \\ z'-z &= -(\zeta+py-qx)\,ds. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2) der Nachbaraxe können also, mit Rücksicht auf $\xi = 1$, $\eta = \zeta = 0$, $q = 0$, geschrieben werden:

$$\frac{x-(\xi-ry)\,ds}{z-py\,ds} = \frac{p-p_1}{r-r_1} + d\left(\frac{p-p_1}{r-r_1}\right), \quad y-(rx-pz)\,ds = 0. \tag{3}$$

Werden die Gleichungen (1) und (3) durch ein Werthsystem x, y, z gleichzeitig befriedigt, so kann man (3) schreiben

$$-\frac{ds}{z} = d\left(\frac{p-p_1}{r-r_1}\right), \qquad rx-pz = 0.$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Man hat dann

$$\frac{x}{z} = \frac{p}{r}$$

und in Hinblick auf (1)

$$\frac{p}{r} = \frac{p_1}{r_1},$$

was die gesuchte Bedingung ist. Die Bewegung Ω kann somit dann durch das Fortrollen einer developpabelen Fläche Π_1 auf einer zweiten developpabelen Fläche Π hervorgebracht werden, wenn das Verhältniss zwischen Krümmung und Torsion der Curven Γ_1 und Γ in ihren correspondirenden Punkten dasselbe ist; die beiden developpabelen Flächen sind dann offenbar die rectificirenden Flächen der Curven Γ_1 und Γ. Die Coordinaten x, y, z des Schnittpunktes zweier Nachbaraxen, also eines Punktes der Rückkehrkante der Fläche Π, sind bestimmt durch

$$\frac{1}{z} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{p-p_1}{r-r_1}\right), \qquad x = \frac{p}{r}z, \qquad y = 0.$$

Es hat keine Schwierigkeit die Tangente der Bahn zu construiren, welche ein mit der beweglichen Curve Γ_1 fest verbundener Punkt bei der Bewegung Ω beschreibt; denn die Krümmungen und Torsionen der Curven Γ_1 und Γ in den correspondirenden Punkten M_1 und M liefern sofort die Componenten $p-p_1$, $r-r_1$ der Rotationsgeschwindigkeit und somit auch die momentane Rotationsaxe. Um auch die Osculationsebene und die Krümmung der Bahn zu finden, stellen wir folgende Betrachtung an:

Die zweite Hilfsbewegung möge das Dreikant (M) in der Zeit ds in die Lage (M') bringen; dann hat der Punkt M' die Coordinaten $x = ds$, $y = 0$, $z = 0$, und die Richtungen der Axen x', y', z' sind aus den Axen x, y, z durch die Rotationen $pds, 0, rds$ abzuleiten. Es sind somit $1, rds, -qds$ die Cosinus der Winkel, welche x mit den Axen x', y', z' respective einschliesst, ebenso $-rds, 1, pds$ die y und endlich $qds, -pds, 1$ die z zukommenden Cosinus.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Im zweiten Zeitdifferential ds besteht die Bewegung Ω in einer Rotation um eine durch den Punkt M' gehende Axe diese Rotation hat bezüglich der Axen x', y', z' die Geschwindigkeiten

$$p-p_1+d(p-p_1),\ 0,\ r-r_1+d(r-r_1).$$

Wir stellen nun die Frage nach dem Deplacement $\xi_0, \eta_0, \zeta_0, p_0, q_0, r_0$ des Dreikants (M''), welches diese Rotation ersetzen kann, wobei wir mit (M'') das Dreikant bezeichnen, in welches (M) im ersten Zeitdifferentiale ds durch Ω übergeführt wird, d. i. durch die Rotationen $p-p_1$, 0, $r-r_1$,

Die Cosinus der Winkel, welche x mit den Axen von (M'') einschliesst, sind 1, $(r-r_1)ds$, 0, jene, welche y zukommen, sind $-(r-r_1)ds$, 1, $(p-p_1)ds$, endlich die z entsprechenden 0, $-(p-p_1)ds$, 1.

Der Punkt M' hat bezüglich des Dreikants (M'') die Coordinaten ds, 0, 0, und da M' bei der betrachteten Rotation fest bleibt, hat man

$$\xi_0 = 0, \qquad \eta_0 + r_0 ds = 0, \qquad \zeta_0 - q_0 ds = 0$$

und durch Zerlegung der Rotation nach den Axen x_0, y_0, z_0 von (M'')

$$\begin{aligned}
p_0 &= [p-p_1+d(p-p_1)] \cos(x'x_0) + [r-r_1+d(r-r_1)] \cos(z'x_0)\\
q_0 &= [p-p_1+d(p-p_1)] \cos(x'y_0) + [r-r_1+d(r-r_1)] \cos(z'y_0)\\
r_0 &= [p-p_1+d(p-p_1)] \cos(x'z_0) + [r-r_1+d(r-r_1)] \cos(z'z_0)
\end{aligned}$$

d. i. unter blosser Berücksichtigung der Hauptglieder,

$$\begin{aligned}
p_0 &= p-p_1+d(p-p_1)\\
q_0 &= -(pr_1-rp_1)ds\\
r_0 &= r-r_1+d(r-r_1)
\end{aligned}$$

$$\xi_0 = 0 \qquad \eta_0 = -(r-r_1)ds \qquad \zeta_0 = 0.$$

Die Bewegung Ω theilt somit im ersten Zeitdifferential dem Dreikant (M) die Geschwindigkeiten 0, 0, 0, $p-p_1$, 0, $r-r_1$ mit und führt es in die Lage (M'') über; im nächsten Zeitdifferential theilt es diesem Dreikant die Geschwindigkeiten 0, η_0, 0, p_0, q_0, r_0 mit. Definirt man somit eine Bewegung Ω'

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

durch die Anfangslage (M) des beweglichen Dreikants, welche $u = o$ entsprechen möge und durch die nach den beweglichen Axen gemessenen Geschwindigkeiten

$$\xi' = 0, \qquad p' = p - p_1 + \frac{d(p-p_1)}{ds} u$$

$$\eta' = -(r-r_1)u, \qquad q' = (rp_1 - pr_1)u$$

$$\zeta' = 0, \qquad r' = r - r_1 + \frac{d(r-r_1)}{ds} u$$

wobei u die Zeit bedeutet, so stimmt diese Bewegung in den beiden auf $u = 0$ folgenden Zeitdifferentialen mit der Bewegung Ω überein.

Bezeichnet man mit a, b, c die Cosinus der Winkel, welche zur Zeit u die bewegliche x-Axe mit den Axen der Anfangslage (M) einschliesst, mit a', b', c' die der beweglichen y-Axe, mit a'', b'', c'' die der z-Axe zukommenden Cosinus, ferner mit X_0, Y_0, Z_0 die bezüglich des Dreikants (M) genommenen Coordinaten des beweglichen Anfangspunktes und setzt diese zwölf Grössen in der Form von Potenzreihen voraus, so liefert die Verification der letzten sechs Gleichungen für die ersten Glieder dieser Reihen die Werthe

$$\left.\begin{array}{c}
a = 1 - \frac{l^2}{2} u^2, \quad b = -lu - \frac{l'}{2} u^2, \quad c = \frac{hl+k}{2} u^2 \\
a' = lu + \frac{l'}{2} u^2, \quad b' = 1 - \frac{h^2+l^2}{2} u^2, \quad c' = -hu - \frac{h'}{2} u^2 \\
a'' = \frac{hl-k}{2} u^2, \quad b'' = hu + \frac{h'}{2} u^2, \quad c'' = 1 - \frac{h^2}{2} u^2 \\
X_0 = 0, \quad Y_0 = -\frac{l}{2} u^2, \quad Z_0 = 0,
\end{array}\right\} \quad (4)$$

wobei der Kürze wegen gesetzt wurde

$$h = p - p_1, \qquad h' = \frac{dh}{ds}$$

$$l = r - r_1, \qquad l' = \frac{dl}{ds}$$

$$k = rp_1 - pr_1.$$

©Akademie d. Wiss. Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Wird ein beliebiger, zur Zeit $u = 0$ bezüglich des Dreikants (M) durch die Coordinaten x, y, z gegebener Punkt A betrachtet, so haben die beiden von ihm in Folge der Bewegungen Ω, respective Ω' beschriebenen Bahncurven im Punkte A offenbar die Tangente, die Osculationsebene und die Krümmung gemein. Die Lage dieses Punktes zur Zeit u ist bezüglich (M) durch die Coordinaten

$$X = X_0 + ax + by + cz$$
$$Y = Y_0 + a'x + b'y + c'z$$
$$Z = Z_0 + a''x + b''y + c''z$$

gegeben. Mit Berücksichtigung von (4) erschliesst man hieraus, dass der durch die Gleichungen

$$X = x - lyu + \left(-\frac{l^2}{2}x - \frac{l'}{2}y + \frac{hl+k}{2}z\right)u^2$$
$$Y = y + (lx - hz)u + \left(-\frac{l}{2} + \frac{l'}{2}x - \frac{h^2+l^2}{2}y - \frac{h'}{2}z\right)u^2$$
$$Z = z + hyu + \left(\frac{hl-k}{2}x + \frac{h'}{2}y - \frac{h^2}{2}z\right)u^2$$

gegebene Kegelschnitt im Punkte $u = 0$ die Bahncurve des Punktes A osculirt.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 104_2a

Autor(en)/Author(s): Weyr Eduard

Artikel/Article: Zur Theorie der Bewegung eines starren Systems. 292-299