Ein Beitrag zur Kinematik der Ebene

Friedrich Procházka,
Professor an der Realschule in Karolinenthal in Prag.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Juni 1895.)

Construction des Krümmungsmittelpunktes der Bahncurve, welche der Schnittpunkt zweier um je einen festen Punkt gleichmässig rotirenden Geraden erzeugt.

1. Herr Professor Dr. L. Burmester befasst sich in seinem Werke: »Lehrbuch der Kinematik«[1] mit der Construction der Normale an der Bahncurve A des Schnittpunktes a (Fig. 1) zweier um die festen Punkte s und ${}^1s$ eines bestimmten ruhenden ebenen Systems Σ, rotirenden Geraden G und H und führt folgende Construction an:

Sind die lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{aa_\mathfrak{v}^G}$, $\overline{aa_\mathfrak{v}^H}$, mit denen sich die beiden in a coincidirenden, respective zu G und H gehörenden Punkte im System Σ bewegen, gegeben, dann erhalten wir durch die in $a_\mathfrak{v}^G$, $a_\mathfrak{v}^H$, respective auf G, H errichteten Senkrechten, die sich in $a_\mathfrak{v}$ schneiden, die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{aa_\mathfrak{v}}$ des Schnittpunktes a und in dieser Geraden auch die Normale der Bahncurve A.

Setzen wir der Einfachheit wegen voraus, dass die Gerade G momentan mit der Drehgeschwindigkeit $\omega_G = 1$ rotirt, dann stellt die Strecke $\overline{as}$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit a coincidirenden Punktes der Geraden G vor (Fig. 2) und die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{aa_\mathfrak{v}^H}$ ergibt sich, wenn wir die Drehgeschwindigkeit ω_H, mit deren die Gerade H rotirt, gleich $n \, . \, \omega_G$ annehmen, aus der Gleichung

[1] Dr. L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, I. Bd., S. 59.

$$\frac{\overline{aa_{\mathfrak{v}}^H}}{\overline{a^1s}} = \omega_H = n \, . \, \omega_G = n \qquad 1)$$

Wir erhalten demnach die Normale $aa_{\mathfrak{v}}$ an der Bahncurve A, indem wir auf as die Senkrechte $sa_{\mathfrak{v}}$ und auf ${}^1sa_{\mathfrak{v}}^H$ die Senkrechte $a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}$ errichten und den Schnittpunkt $a_{\mathfrak{v}}$ dieser Senkrechten mit a verbinden.

Wenn wir die Drehgeschwindigkeiten ω_G, ω_H, respective der Geraden G, H als constant annehmen, dann ist auch das Verhältniss $\frac{\omega_G}{\omega_H} = \frac{1}{n}$ constant und wir können in diesem Falle auch den Krümmungsmittelpunkt der Curve A construiren.

2. Den Krümmungsmittelpunkt bestimmen wir als den Berührungspunkt, den die Normale $N_A \equiv aa_{\mathfrak{v}}$ des Punktes a mit ihrer Hüllbahncurve, d. h. der Evolute der Curve A bildet.

Um die Bestimmung dieses Berührungspunktes auszuführen, benöthigen wir die Geschwindigkeiten zweier Schnittpunkte, welche die bewegte Normale mit zweien festen Curven bildet.[1]

Als diese zwei Curven nehmen wir die Bahncurve A selbst und die Curve B, welche der Punkt $a_{\mathfrak{v}}$ bei der Bewegung der Normale N_A erzeugt.

Die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{aa_{\mathfrak{v}}}$, mit deren sich der Punkt a auf der Bahncurve A bewegt, haben wir bereits bestimmt und es bleibt übrig, noch die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_{\mathfrak{v}}$ in der Curve B zu construiren.

Um diese Geschwindigkeit zu bestimmen, betrachten wir den Punkt $a_{\mathfrak{v}}$ als Schnittpunkt der Geraden $sa_{\mathfrak{v}}$, $a_{\mathfrak{v}}^H a_{\mathfrak{v}}$ (Fig. 2), welcher sich bei der Rotation der Geraden G, H auch gleichzeitig auf eine bestimmte Art bewegt. Weil die Gerade $sa_{\mathfrak{v}}$ stets auf der Geraden G bei der gleichförmigen Rotation dieser Geraden im Punkte s senkrecht steht und desshalb dieselbe Drehgeschwindigkeit $= 1$ besitzt, repräsentirt die Strecke $\overline{sa_{\mathfrak{v}}}$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit dem Punkte $a_{\mathfrak{v}}$ coincidirenden Punktes der Geraden $sa_{\mathfrak{v}}$.

---

[1] Daselbst, S. 64.

Um auch die Geschwindigkeit des mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ coincidirenden Punktes der Geraden $a^H_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}$ zu bestimmen, müssen wir darauf Rücksicht nehmen, dass die Gerade $a^H_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}$ nicht nur um den Punkt ${}^1s$ rotirt, sondern sich zugleich mit dem Punkte $a^H_\mathfrak{v}$ in der Richtung der Geraden H verschiebt. Die Geschwindigkeit des mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ coincidirenden Punktes der Geraden $a^H_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}$ ergibt sich demnach als Resultirende dieser beiden Geschwindigkeiten des Punktes $a_\mathfrak{v}$, welche ihm einerseits bei der Rotation der Geraden $a^H_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}$ um den Punkt ${}^1s$ und anderseits bei der Translation dieser Geraden in der Richtung der Geraden H ertheilt werden.

Um die erste Componente $\overline{a_\mathfrak{v} a'_\mathfrak{v}}$ zu bestimmen, verbinden wir den Punkt ${}^1s$ mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ (Fig. 2) und schneiden diese Verbindungsgerade mit der zu der Normalen N_A durch den Punkt $a_\mathfrak{v}$ gezogenen Parallele $a^H_\mathfrak{v} a'_\mathfrak{v}$ im Punkte $a'_\mathfrak{v}$.

Die zweite, d. h. die Translationsgeschwindigkeit $a_\mathfrak{v} a''_\mathfrak{v}$, welche der Translationsgeschwindigkeit $a^H_\mathfrak{v} a^{H'}_\mathfrak{v}$ des Punktes $a^H_\mathfrak{v}$ in der Geraden H gleich ist, erhalten wir folgendermassen:

Die Geschwindigkeit $\overline{a^H_\mathfrak{v} a^{H'}_\mathfrak{v}}$ des Punktes $a^H_\mathfrak{v}$ ist nach der aus der Gleichung 1) (Nr. 1) sich ergebenden Beziehung

$$\overline{aa^H_\mathfrak{v}} = n \, . \, \overline{a\,{}^1s}$$

gleich der $(1-n)$-fachen Geschwindigkeit $\overline{a^H_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}}$, mit deren sich der Punkt a in der Geraden H verschiebt.

Um diese Beziehung

$$\overline{a^H_\mathfrak{v} a^{H'}_\mathfrak{v}} = (1-n) \, . \, \overline{a^H_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}}$$

zu begründen, betrachten wir zuerst folgenden allgemeineren Fall.

Die Gerade P (Fig. 3) eines ebenen Systems S_2 gleitet durch den Punkt p des festen Systems S_1 und schneidet die festen Curven A, B dieses Systems, respective in den Punkten a, b. Suchen wir die lothrechte Geschwindigkeit eines Punktes c, dessen Lage auf der beweglichen Geraden P durch die Bedingung, dass $\overline{ac} = \overline{pb}$, gegeben ist. Weil die Bewegung des Punktes c das Resultat der Rotation um den Pol a' des bewegten Systems S_2 und der Translation in der Geraden P ist, construiren wir seine lothrechte Geschwindigkeit auf Grund der lothrechten Geschwindigkeit, welche der Punkt c bei der ersten und der zweiten Bewegung besitzt. Wenn wir die Normale $N_a \equiv aa'$ im Punkte a der Curve A construiren und im Punkte p eine Senkrechte $P' \equiv pb'$ auf der Geraden P errichten, dann erhalten wir im Schnittpunkte a' dieser Geraden den Pol des bewegten Systems S_2. Setzen wir voraus, dass die Rotation des Systems S_2 mit der Drehgeschwindigkeit $= 1$ geschieht, dann repräsentirt die Strecke $\overline{ca'}$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit dem Punkte c coincidirenden Punktes des Systems S_2. Weil die Translationsgeschwindigkeit dieses Punktes in der Richtung der Geraden P jener des Punktes b in derselben Geraden gleich ist, werden wir darum diese Geschwindigkeit construiren.

Zu diesem Zwecke construiren wir im Punkte b die Normale $N_b \equiv bb'$ der Curve B, welche die vorher construirte Gerade P' im Punkte b' schneidet. Die Strecke $\overline{pb'}$ repräsentirt dann die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{cc'} \# \overline{pb'}$, welche der mit dem Punkte c coincidirende Punkt bei der Translation in der Geraden P besitzt. Vermittelst des Parallelogramms der Geschwindigkeiten $ca'c_{\mathfrak{v}}c'$ erhalten wir in seiner Diagonale $\overline{cc_{\mathfrak{v}}}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes und zugleich die Normale N_c der von diesem Punkte erzeugten Curve C. Einfacher erhalten wir die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{cc_{\mathfrak{v}}}$, indem wir die Strecke $\overline{pb'}$ auf die Gerade P vom Punkt a' in derselben Richtung übertragen und den erhaltenen Punkt mit dem Punkte c verbinden. Dabei repräsentirt die Strecke $\overline{pc_{\mathfrak{v}}}$ die lothrechte Geschwindigkeit, mit deren sich der Punkt c in der Geraden P verschiebt.

Wenn aber die Lage des Punktes c derart bestimmt ist, dass $\overline{ac} = \overline{bp} = -n.\overline{ap}$, dann bestimmen die Punkte b eine — der Curve A in Bezug zum Punkte p als dem Ähnlichkeitspole ähnliche — Curve B und die Strecke $\overline{pb'} = n.\overline{pa'}$ repräsentirt die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes b in der Geraden P (Fig. 4). Wenn wir diese Strecke $\overline{pb'}$ vom Punkte a' diesmal in entgegengesetzter Richtung auf die Gerade P' übertragen, erhalten wir den Punkt $c_{\mathfrak{v}}$ und in der Strecke $\overline{cc_{\mathfrak{v}}}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes c. Die Strecke $\overline{pc_{\mathfrak{v}}} = (1-n).\overline{pa'}$ repräsentirt die Geschwindigkeit, mit deren der Punkt c in der

Geraden P rückt. Wenn aber die Strecke $\overline{ac} = -n . \overline{ap}$ zugleich die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes a bei der Bewegung der Geraden P darstellt, dann erhalten wir, wie leicht ersichtlich, die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{cc'_\mathfrak{v}}$, mit deren sich der Punkt c in der Geraden P verschiebt, indem wir die Senkrechte $ce \perp ap$ errichten und $\overline{ec'_\mathfrak{v}} = -n . \overline{ec}$ machen, oder wenn wir durch den Schnittpunkt f, der Geraden $cc_\mathfrak{v} \| aa'$ mit der Geraden ep, die Gerade $fc'_\mathfrak{v}$ mit ap parallel ziehen. Es ergibt sich dann aus dieser Construction, dass $\overline{cc'_\mathfrak{v}} = (1-n) . \overline{ce}$.

Dieselbe Bewegung vollführt der Punkt $a^H_\mathfrak{v}$ in der Geraden H und desshalb erhalten wir seine Geschwindigkeit $a^H_\mathfrak{v} a^{H'}_\mathfrak{v}$ gleicherweise (Fig. 2), indem wir $a'_\mathfrak{v} a^{H'}_\mathfrak{v}$ parallel zur Geraden H bis an die Gerade $a_\mathfrak{v} a^H_\mathfrak{v}$ ziehen.

Wenn wir die Strecke $\overline{a^H_\mathfrak{v} a^{H'}_\mathfrak{v}}$ (Fig. 2) vom Punkte $a_\mathfrak{v}$ auf die verlängerte Gerade $a^H_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}$ übertragen, dann erhalten wir die Translationsgeschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v} a''_\mathfrak{v}}$ des Punktes $a_\mathfrak{v}$ als die zweite verlangte Geschwindigkeitscomponente. Vermittelst des Parallelogramms der Geschwindigkeiten $a_\mathfrak{v} a'_\mathfrak{v} a^1_\mathfrak{v} a''_\mathfrak{v}$ erhalten wir die resultirende Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v} a^1_\mathfrak{v}}$ des mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ coincidirenden Punktes der Geraden $a_\mathfrak{v} a^H_\mathfrak{v}$. — Errichten wir jetzt in dem Punkte s auf der Geraden $sa_\mathfrak{v}$ eine Senkrechte, welche mit der Geraden G zusammenfällt, und fällen wir vom Punkte $a^1_\mathfrak{v}$ auf die Gerade $a_\mathfrak{v} a^H_\mathfrak{v}$ die Senkrechte $a^1_\mathfrak{v} a^2_\mathfrak{v}$, welche zugleich mit der Geraden H parallel ist, dann erhalten wir in dem Schnittpunkte beider Senkrechten den Punkt $a^2_\mathfrak{v}$,[1] welcher mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ verbunden, die resultirende Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v} a^2_\mathfrak{v}}$ des die Curve B erzeugenden Punktes $a_\mathfrak{v}$ angibt.

Sind jetzt die beiden lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{aa_\mathfrak{v}}$, $\overline{a_\mathfrak{v} a^2_\mathfrak{v}}$ der Punkte a, $a_\mathfrak{v}$ der Normale N_A der Curve A gegeben, so ziehen wir (Fig. 2) $a_\mathfrak{v} a^3_\mathfrak{v} \perp N_A$, $aa^3_\mathfrak{v} \| a^2_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}$ und hierauf die Gerade $a^2_\mathfrak{v} a^3_\mathfrak{v}$, welche auf der Normalen N_A den Krümmungsmittelpunkt o der Curve A bestimmt.[2]

3. Obwohl sich die Krümmungsmittelpunkts-Construction vermittelst lothrechter Geschwindigkeiten einfacher darstellt, dennoch werden wir mancher interessanten Ergebnisse wegen

---

[1] Daselbst, S. 56.

[2] Daselbst, S. 64—65.

den Krümmungsmittelpunkt der Curve A vermittelst gewöhnlicher Geschwindigkeiten bestimmen.

Wenn in Fig. 5 zu dem Schnittpunkte a als Punkte der Geraden G die Geschwindigkeit $\overline{aa_v^G}$ und als Punkte der Geraden H die Geschwindigkeit $\overline{aa_v^H}$ gehört, so erhalten wir die Geschwindigkeit $\overline{aa_v}$ des auf der Curve A bewegten Punktes a, indem wir durch die Punkte a_v^G, a_v^H, respective zu den Geraden G, H Parallelen ziehen; diese treffen sich im Endpunkte a_v der Geschwindigkeit aa_v, und die Gerade aa_v ist auch die Tangente T_A an der Bahncurve A.

Setzen wir wie vorher die Drehgeschwindigkeit $\omega_G = 1$ und $\omega_H = n . \omega_G = n$, dann werden die Geschwindigkeiten des Punktes a, respective als Punkte der Geraden G, H, respective durch die Strecken $\overline{aa_v^G} = \overline{as}$ und $\overline{aa_v^H} = n . \overline{a^1 s}$ dargestellt. (In der Fig. 5 wurde $n = \frac{1}{3}$ angenommen).

Um den Krümmungsmittelpunkt o der Curve A im Punkte a zu bestimmen (Fig. 6), betrachten wir ihn als den Pol der Tangente T_A, welche sich mit der Geschwindigkeit $\overline{aa_v}$ in sich selbst verschiebt und deren Punkt a_v sich gleichzeitig mit der Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^N} \perp T_A$ um den Punkt a dreht.[1]

Auf Grund dieser Auffassungsweise des Krümmungsmittelpunktes kommen wir zum Ziele, wenn wir die Bewegungsrichtungen zweier Punkte a, a_v der Tangente T_A construiren. Weil die Rotationsgeschwindigkeit des Punktes a gleich Null ist, so besitzt dieser Punkt nur die Geschwindigkeit $\overline{aa_v}$, mit welcher er sich in der Tangente T_A verschiebt. Die Richtung der resultirenden Bewegung des Punktes a_v, der sich in der Tangente T mit der Geschwindigkeit $\overline{aa_v^T} = \overline{aa_v}$ verschiebt und mit der Geschwindigkeit $\overline{aa_v^N}$ rotirt, wird als die Diagonale $\overline{a_v a_v'}$ des Parallelogramms $aa_v^T a_v' a_v^N$ bestimmt. Die in den Punkten a, a_v, respective auf den Geraden T und $a_v a_v'$ errichteten Senkrechten $ao \equiv N_A$, $a_v o$ schneiden sich im Pole o der Tangente T_A, als dem Krümmungsmittelpunkte der Curve A. Es ist leicht ersichtlich, dass die Senkrechte $a_v o$ zugleich auf der Geraden aa_v^N senkrecht steht, und demnach können wir sie auch construiren.

[1] Daselbst, S. 24.

Durch Rückwärtsgehen dieses Constructionsweges erhalten wir auf Grund des gegebenen Krümmungsmittelpunktes die Geschwindigkeit $a_v a_v^N$, mit deren der Punkt a_v der Tangente T um ihren Berührungspunkt a rotirt.

Ist statt der Geschwindigkeit $a_v a_v^N$ des Punktes a, die Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^P}$ (Fig. 7), mit deren sich der mit dem Punkte a_v coincidirende Schnittpunkt der Tangente T mit einer beliebigen Geraden P in dieser Geraden verschiebt, gegeben, dann construiren wir erst die Geschwindigkeit $\overline{aa_v^N}$, indem wir durch den Punkt a_v^P mit der Tangente eine Parallele $a_v^P a_v^N$ ziehen, welche die Gerade $a_v a_v^N \perp T$ im Punkte a_v^N schneidet. Auf Grund der soeben erhaltenen Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^N}$ und der gegebenen Geschwindigkeit $\overline{aa_v}$ construiren wir den Krümmungsmittelpunkt wie vorher.

Um also in unserem betrachteten Falle (Fig. 5) auf Grund der vorher erlangten Construction den Krümmungsmittelpunkt zu erhalten, werden wir folgenderweise fortschreiten.

Vor Allem bestimmen wir die Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt a_v als Schnittpunkt der Geraden $a_v^G a_v$ und $a_v^H a_v$ bewegt. Demzufolge bestimmen wir die Geschwindigkeiten der Punkte a_v^G, a_v^H, welche bei der Rotation der Geraden G, H sich auch mit gewisser Geschwindigkeit bewegen.

Um die Geschwindigkeit, mit deren sich der Punkt a_v^G bewegt, zu bestimmen, erwägen wir, dass dieser Punkt sich auf dem Schenkel aa_v^G des rechten Winkels saa_v^G — dessen anderer Schenkel durch den festen Punkt s gleitet und dessen Scheitelpunkt a sich auf der Tangente T_a verschiebt — so bewegt, dass die Strecke $\overline{aa_v^G}$ der Strecke $\overline{as}$ gleich bleibt.

Solcherweise bestimmte Bewegung des Punktes a_v^G können wir als eine Specialisirung folgenden Falles betrachten und dann auf dem Grunde die Geschwindigkeit des Punktes a_v^G bestimmen.

In einem festen Systeme Σ befinden sich zwei Curven A, B und ein Punkt p (Fig. 8). Die Bewegung eines zweiten ebenen Systems S_1 ist dadurch bestimmt, dass der Scheitelpunkt a eines Winkels α sich in der Curve A verschiebt und der eine Schenkel P stets durch den Punkt p gleitet und die Curve B im Punkte b schneidet. Auf dem zweiten Schenkel R des Winkels α

verschiebt sich gleichzeitig der Punkt c derart, dass die Entfernung $\overline{ca}$ bei der Bewegung stets gleich der Strecke $\overline{pb}$ bleibt. Weil die Bewegung des Punktes c das Resultat einer Rotation des den Winkel enthaltenen Systems S_1 um einen bestimmten Pol und einer Verschiebung jenes Punktes im Schenkel R ist, erhalten wir die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes c auf Grund der Geschwindigkeiten dieses Punktes, welche von der ersten und zweiten Bewegung abhängen.

Indem wir im Punkte a der Curve A (Fig. 8) die Normale $N_a \equiv aa'$ construiren und im Punkte p eine Senkrechte $P' \equiv pa'$ auf die Gerade P errichten, erhalten wir im Schnittpunkte a' dieser Geraden den Pol des bewegten Systems S_1. Setzen wir voraus, dass die Drehung des Systems S_1 mit der Drehgeschwindigkeit $= 1$ geschieht, dann repräsentirt die Strecke ca' die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes c.

Weil Translationsgeschwindigkeit des Punktes c im Schenkel R des Winkels α der Geschwindigkeit, mit deren sich der Punkt b im Schenkel P bewegt, gleich ist, darum erfordert unsere Construction, diese Geschwindigkeit zu bestimmen. Zu diesem Zwecke construiren wir im Punkte b der Curve A die Normale $N_b \equiv bb'$, welche die bereits gezogene Gerade P' im Punkte b' schneidet. In der Strecke $\overline{pb'}$ haben wir dann die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes a im Schenkel P und wenn wir die Strecke $\overline{cd} \perp R$ und gleich der Strecke $\overline{pb'}$ construiren, dann erhalten wir die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes c im Schenkel R. Die Diagonale $\overline{cc'}$ des Parallelogramms $ca'c'd$, das wir aus den beiden lothrechten Geschwindigkeiten des Punktes c construiren, repräsentirt dann die resultirende lothrechte Geschwindigkeit des Punktes c und gibt auch die Normale N_c im Punkte c an.

Aus dieser Construction ist ersichtlich, dass der Winkel $b'a'c'$ dem Winkel α gleich ist und die Strecke $a'c'$ auf dem Schenkel R senkrecht steht. Demnach erhalten wir auch die Normale $N_c \equiv cc'$ im Punkte c an die Curve C, indem wir die Normalen der beiden Curven A, B, respective in den Punkten a, b construiren und $pb' \perp pb$, $\sphericalangle b'a'c' = \alpha$ und $\overline{a'c'} = \overline{pb'}$ machen; in der Strecke $\overline{cc'}$ erhalten wir auch lothrechte Geschwindigkeit des Punktes c.

Wenn wir beim Erzeugen der Curve C die beiden Curven A und B zusammenfallen lassen und den Winkel $\alpha = 90°$ machen (Fig. 9), dann fallen auch die Normalen N_a, N_b und die Punkte a', b' zusammen und wir erhalten den Punkt c', indem wir die Strecke $\overline{a'c'} = \overline{pa'}$ machen.

Es ist ersichtlich, dass die Erzeugungsweise dieser Curve C vollkommen mit der vom Punkte a_v^G erzeugten Curve (Fig. 5) vollkommen übereinstimmt, deren Normale als lothrechte Geschwindigkeit wir demnach folgenderweise construiren:

Wir errichten in den Punkten a, s die Senkrechten, respective zu den Geraden T_A, G, welche sich im Punkte $a_\mathfrak{v}$ schneiden, und indem wir auf die im Punkte $a_\mathfrak{v}$ auf die Gerade $sa_\mathfrak{v}$ errichtete Senkrechte die Strecke $\overline{a_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}^{G'}} = \overline{a_\mathfrak{v} s}$ übertragen, erhalten wir in der Strecke $\overline{a_v^G a_\mathfrak{v}^{G'}}$ die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes a_v^G, aus der wir die Geschwindigkeit $\overline{a_v^G a_v^{G'}} \stackrel{\perp}{=} \overline{a_v^G a_\mathfrak{v}^{G'}}$ ableiten, welche auch dem Punkte a_v, durch die Strecke $\overline{a_v a_v^{G''}} \mathrel{\#} \overline{a_v^G a_v^{G'}}$ dargestellt, zugehört.

Ausserdem dreht sich aber der Punkt a_v um den Punkt s mit der Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^{G'}} = sa_v$; desshalb bewegt sich der Punkt a_v mit der resultirenden Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^{G'''}}$, die wir als Diagonale des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten $a_v a_v^{G'} a_v^{G'''} a_v^{G''}$ erhalten (Fig. 5).

Derselben Construction werden wir uns bedienen, um auch die Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^{H'''}}$ des Punktes a_v^H zu bestimmen. Im Punkte ${}^1s$ errichten wir zu der Geraden H eine Senkrechte ${}^1sa'_\mathfrak{v}$, welche die Normale N_A im Punkte $a'_\mathfrak{v}$ schneidet. In diesem Punkte errichten wir wieder eine Senkrechte $a'_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}^{H'}$ zu der ersten Senkrechten und tragen auf jene diesmal die Strecke $\overline{a'_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}^{H'}} = n . \overline{{}^1sa'_\mathfrak{v}}$ (weil die Strecke $\overline{aa_v^H} = n . \overline{a\,{}^1s}$). Auf der Verbindungslinie $a_v^H a_\mathfrak{v}^{H'}$ machen wir $\overline{a_v^H a_\mathfrak{v}^{H''}} = n . \overline{a_v^H a_\mathfrak{v}^{H'}}$ und erhalten so die lothrechte Richtung des Punktes a_v^H, aus der wir die Geschwindigkeit $a_v^H a_v^{H'} \stackrel{\perp}{=} a_v^H a_\mathfrak{v}^{H''}$ ableiten. Diese Geschwindigkeit gehört auch dem Punkte a_v, und darum machen wir $\overline{a_v a_v^{H''}} \mathrel{\#} \overline{a_v^H a_v^{H'}}$

Ausserdem dreht sich der Punkt a_v um den Punkt ${}^1s$ mit der Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^{H'}} = n . \overline{a_v {}^1s}$; desshalb bewegt sich der Punkt a_v mit der resultirenden Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^{H'''}}$, die wir als Diagonale des Parallelogramms $a_v a_v^{H'} a_v^{H'''} a_v^{H''}$ erlangen.

Wenn wir durch die erzielten Punkte $a_v^{G'''}$, $a_v^{H'''}$, respective Parallelen G', H' zu den Geraden G, H ziehen, erhalten wir im Schnittpunkte dieser Parallelen den Punkt a'_v, welcher mit dem Punkte a_v die resultirende Geschwindigkeit $\overline{a_v a'_v}$ des Punktes a_v bestimmt.

Leiten wir weiter aus dieser Geschwindigkeit $\overline{a_v a'_v}$ die Geschwindigkeit $\overline{a_v a_v^N}$ ab (wie in der Fig. 7) und fällen zuletzt vom Punkte a_v eine Senkrechte auf die Gerade aa_v^N, um im Schnittpunkte dieser Senkrechten mit der Normalen N_A den Krümmungsmittelpunkt o zu erhalten.

Es ist ersichtlich, dass wir die Curve A (Fig. 5) als orthogonale Projection des Durchschnittes zweier geraden Schraubenflächen, deren Axen zur Projectionsebene senkrecht stehen und deren Ganghöhen sich wie 1 n verhalten, betrachten können. Mittelst soeben erlangten Constructionen ist nicht nur die orthogonale Projection der Tangente der Curve A zu construiren ermöglicht, sondern auch mittelst der Geschwindigkeit $\overline{a_v a'_v}$ und des Krümmungsmittelpunktes o die Krümmungsebene der Durchschnittscurve und ihr Krümmungsmittelpunkt bestimmbar. Und zwar gibt uns die Strecke $\overline{a_v a'_v}$ die Richtung der Trace der Krümmungsebene in der Projectionsebene an und den Krümmungsmittelpunkt o können wir als orthogonale Projection des Mittelpunktes einer Ellipse, welche den Durchschnitt beider geraden Schraubenflächen osculiert, betrachten.

4. Die Krümmungsmittelpunkts-Construction vermittelst der lothrechten Geschwindigkeiten (Nr. 2) wenden wir in dem besonderen Falle an, wenn $n = -\frac{1}{2}$ und wenn die Drehungen der beiden Geraden G, H gleichzeitig von der Geraden $s\,{}^1s$ ausgehen. Dann ist die Bahn des Schnittpunktes a dieser Geraden eine Hyperbel (Fig. 10), deren eine Brennpunkt s ist und deren eine Scheitel in ${}^1s$ liegt.[1] Wir erhalten demnach die Normale $N_A \equiv aa_v$ an der Bahncurve A, indem wir, wenn wir die Drehgeschwindigkeit der Geraden $G = 1$ annehmen, $\overline{aa_v^H} = -\frac{1}{2}\,\overline{a\,{}^1s}$ machen und auf der Geraden G, H, respective in den Punkten

[1] Daselbst, S. 61.

s, $a_\mathfrak{v}^H$ die Senkrechten $sa_\mathfrak{v}$, $a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}$ errichten, welche sich im Punkte $a_\mathfrak{v}$ treffen.

Um den Krümmungsmittelpunkt der Curve $\overline{A}$ zu construiren (Nr. 2), verbinden wir den erhaltenen Punkt $a_\mathfrak{v}$ mit dem Punkte ${}^1s$ und ziehen durch den Punkt $a_\mathfrak{v}^H$ zu der Normalen N_A eine Parallele, welche die Gerade $a_\mathfrak{v}{}^1s$ im Punkte $a'_\mathfrak{v}$ trifft. Die durch diesen Punkt zu der Geraden H gezogene Parallele schneidet die Gerade $a_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}^H$ im Punkte $a_\mathfrak{v}^{H'}$ Wenn wir weiter vom Punkte $a'_\mathfrak{v}$ auf die Gerade H eine Senkrechte fällen und von diesem Punkte die Strecke $\overline{a'_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}^1} = \overline{a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}^{H'}}$ übertragen, dann erhalten wir den Punkt $a_\mathfrak{v}^1$, durch welchen wir eine Parallele zu der Geraden H ziehen, welche die Gerade G im Punkte $a_\mathfrak{v}^2$ schneidet. Ziehen wir nun durch den Punkt a eine Parallele $a\,a_\mathfrak{v}^3$ zu der Geraden $a_\mathfrak{v}^2 a_\mathfrak{v}$ und errichten im Punkte $a_\mathfrak{v}$ eine Senkrechte auf der Geraden N_A, welche die Gerade $a_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}^3$ im Punkte $a_\mathfrak{v}^3$ trifft. Die Verbindungsgerade der Punkte $a_\mathfrak{v}^2$, $a_\mathfrak{v}^3$ schneidet dann die Normale N_A in dem Krümmungsmittelpunkte o der Hyperbel A.

5. Diese Krümmungsmittelpunkts-Construction können wir auch im Folgenden, in Bezug auf den vorgehenden Fall (Nr. 1) allgemeineren Falle, anwenden.

Die Rotation der, die Geraden G, H, respective enthaltenden ebenen Systeme S_1, S_2, geschehe um die ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkte s, ${}^1s$ eines bestimmten ruhenden ebenen Systems Σ.

Setzen wir der Einfachheit wegen voraus, dass beide Systeme S_1, S_2 mit gleicher Geschwindigkeit $= 1$ rotiren und dass noch der eine Punkt (s) sich auf der um ihn rotirenden Geraden (G) befindet (Fig. 11). Dann stellen die Strecken $\overline{as}$, $\overline{a^1s}$, respective die lothrechten Geschwindigkeiten der mit dem Schnittpunkte a der Geraden G, H coincidirenden Punkte der Geraden G, H bei deren Rotation, respective um die Punkte s, ${}^1s$.

Um die Normale an der Bahncurve A im Punkte a zu erhalten, errichten wir im Punkte s auf die Gerade G die Senkrechte $sa_\mathfrak{v}$ und fällen vom Punkte ${}^1s$ auf die Gerade H die Senkrechte ${}^1sa_\mathfrak{v}$. Diese beiden Senkrechten treffen sich im Punkte $a_\mathfrak{v}$, der, mit dem Punkte a verbunden, die lothrechte

Geschwindigkeit des Punktes a und zugleich die verlangte Normale an der Bahncurve A gibt.[1]

Die weiteren Constructionen, die sich auf die Krümmungsmittelpunktsbestimmung beziehen, stimmen mit den vorher ausgeführten überein und werden sich theils vereinfachen, weil wir die Drehgeschwindigkeiten der Systeme S_1, S_2 als gleich vorausgesetzt haben.

Um also den Krümmungsmittelpunkt zu erlangen, construiren wir wie vorher die lothrechte Geschwindigkeit, mit deren sich der Punkt $a_\mathfrak{v}$ als Schnittpunkt der Senkrechten $sa_\mathfrak{v}$, ${}^1sa_\mathfrak{v}$ in der von ihm erzeugten Curve B bewegt. Da sich diese Geraden $sa_\mathfrak{v}$, ${}^1sa_\mathfrak{v}$ mit derselben gleichen Drehgeschwindigkeit wie die Geraden G, H selbst bewegen, erhalten wir die verlangte lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$, indem wir wie bei der Construction der lothrechten Geschwindigkeit des Punktes a in den Punkten s, ${}^1s$, respective zu den Geraden $sa_\mathfrak{v}$, ${}^1sa_\mathfrak{v}$ die Senkrechten $sa'_\mathfrak{v} \equiv G$, ${}^1sa'_\mathfrak{v}$ errichten. Diese schneiden sich im Punkte $a'_\mathfrak{v}$, welcher mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v}a'_\mathfrak{v}}$ des Punktes $a_\mathfrak{v}$ bestimmt.

Auf Grund der erzielten lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{aa_\mathfrak{v}}$, $\overline{a_\mathfrak{v}a'_\mathfrak{v}}$ zweier Punkte der Normalen N_A an der Bahncurve A, erhalten wir den Krümmungsmittelpunkt o, indem wir wie in Nr. 2 $a_\mathfrak{v}a^1_\mathfrak{v} \perp N_A$, $aa^1_\mathfrak{v} \parallel a_\mathfrak{v}a'_\mathfrak{v}$ und die Gerade $a'_\mathfrak{v}a^1_\mathfrak{v}$ ziehen, welche die Normale im verlangten Punkte o schneidet.

Als Beispiel wurde in der Fig. 12 folgender specieller Fall angenommen: Der mit der Geraden $s\,{}^1s$ zusammenfallenden Anfangslage der Geraden G entspricht die Gerade H, welche im Mittelpunkte der Strecke $s\,{}^1s$ auf dieser senkrecht steht. Wenn die Drehgeschwindigkeiten der Systeme S_1, S_2 auch im Sinne gleich sind, dann erzeugt, wie aus der Fig. 12 ersichtlich, der Schnittpunkt der Geraden G, H eine Pascal'sche Curve A, welche auch durch den Kreis L (dieselbe Figur) und den Lothpunkt s als Fusspunktcurve bestimmt ist. Die für den Punkt a ausgeführte Construction der Normale N_A stimmt mit der bekannten Construction der Normalen dieser Curve als Fusspunktcurve vollkommen überein. Und die auf Grund bei der

[1] Daselbst, S. 56.

Erzeugungsweise ausgeführte Krümmungsmittelpunkts-Construction führt uns, wie man leicht beweisen kann, zu demselben Krümmungsmittelpunkte o[1].

Wenn wir die Curve A als orthogonale Projection des Durchschnittes zweier Schraubenflächen, deren Axen zur Projectionsebene senkrecht stehen, deren Ganghöhen gleich sind und deren Grundcurven durch die Geraden G, H gegeben sind, betrachten, dann erhalten wir mittelst dieser Construction die Tangente, die Krümmungsebene und den Krümmungsmittelpunkt der Durchschnittscurve.

Wenn sich beide Geraden, G und H, um die ausserhalb dieser Geraden liegenden Punkte s und ${}^1s$ drehen und in gleichem Sinne gleiche Drehgeschwindigkeit besitzen (Fig. 13), dann erhalten wir die Normale $aa_{\mathfrak{v}}$, der durch den Schnittpunkt a jener Geraden erzeugten Curve A, indem wir aus den Punkten s, ${}^1s$, respective zu den Geraden G, H die Senkrechten $sa_{\mathfrak{v}}$, ${}^1sa_{\mathfrak{v}}$ errichten, welche sich im Punkte $a_{\mathfrak{v}}$ treffen. Die Strecke $\overline{aa_{\mathfrak{v}}}$ repräsentirt uns die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes a und zugleich gibt sie uns die verlangte Normale N_A.

Um den Krümmungsmittelpunkt zu erhalten, errichten wir nach der vorgehenden Construction in den Punkten s, ${}^1s$, respective zu den Geraden $sa_{\mathfrak{v}}$, ${}^1sa_{\mathfrak{v}}$ die Senkrechten $sa'_{\mathfrak{v}}$, ${}^1sa'_{\mathfrak{v}}$, die sich im Punkte $a'_{\mathfrak{v}}$ treffen. Die Strecke $\overline{a_{\mathfrak{v}}a'_{\mathfrak{v}}}$ stellt uns die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_{\mathfrak{v}}$ in der durch ihn beschriebenen Curve B dar. Indem wir weiter $a_{\mathfrak{v}}a^1_{\mathfrak{v}} \perp aa_{\mathfrak{v}}$ und $aa^1_{\mathfrak{v}} \parallel a'_{\mathfrak{v}}a_{\mathfrak{v}}$ ziehen, erhalten wir im Schnittpunkte der Geraden $a'_{\mathfrak{v}}a^1_{\mathfrak{v}}$ mit der Normale N den Krümmungsmittelpunkt o der Curve A.

Diese Construction wurde in dem Falle angewendet, wo die beiden Geraden G, H, respective von den Punkten s, ${}^1s$ gleiche Entfernung $= \frac{1}{2}\overline{s\,{}^1s}$ haben und bei der Rotation fortwährend auf einander senkrecht stehen (Fig. 14). Auch diesmal erzeugt der Schnittpunkt a eine Pascal'sche Curve, deren Normale und Krümmungsmittelpunkt wir doppelter Weise

---

[1] A. Mannheim: »Principes et développements de géométrie cinématique«, p. 35.

construiren können. (Es wurde die Normale N_A und der Krümmungsmittelpunkt o für den Punkt a construirt (Fig. 14) und dabei dieselbe Bezeichnung wie vorher angewendet).

6. Viel umständlicher ergibt sich die Krümmungsmittelpunkts-Construction in dem Falle, wenn die Drehgeschwindigkeiten der beiden Systeme S_1, S_2 ungleich sind (Fig. 15.).

Setzen wir, wie vorher, der Einfachheit wegen voraus, dass das System S_1 mit der Drehgeschwindigkeit $\omega_G = 1$ rotirt, dann stellt die Strecke as die lothrechte Geschwindigkeit des mit dem Schnittpunkte a der Geraden G, H coincidirenden Punktes der Geraden G und die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{aa_\mathfrak{v}^H}$ desselben Punktes auf der Geraden H ergibt sich, wenn wir die Drehgeschwindigkeit a_H, mit deren das System S_2 um den Punkt ${}^1s$ rotirt, gleich $n.\omega_G$ annehmen, aus der Gleichung 1):

$$\frac{\overline{a a_\mathfrak{v}^H}}{\overline{a\,{}^1s}} = n.$$

Um die Normale an der Bahncurve A im Punkte a zu erhalten, fällen wir von den Punkten s, $a_\mathfrak{v}^H$, respective auf die Geraden G, H die Senkrechten $sa_\mathfrak{v}$, $a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}$, dann treffen sich diese im Punkte $a_\mathfrak{v}$, der mit dem Punkte a verbunden, die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes a und zugleich die verlangte Normale N_A gibt.

Um die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$ zu bestimmen, errichten wir im Punkte s zu der Geraden $aa_\mathfrak{v}$ die Senkrechte $G' \parallel G$, weil die Strecke $\overline{sa_\mathfrak{v}}$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit dem Schnittpunkte $a_\mathfrak{v}$ der Geraden $sa_\mathfrak{v}$, $a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}$ coincidirenden Punktes der Geraden $sa_\mathfrak{v}$ angibt.

Anders verhält sich die Sache mit der Bestimmung der lothrechten Geschwindigkeit des mit demselben Schnittpunkte coincidirenden Punktes $a_\mathfrak{v}$ der Geraden $a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}$. Dieser Punkt unterliegt zweien Bewegungen, erstens der Rotation um den Punkt ${}^1s$ und zweitens der Translation, die er in der Richtung der Geraden H besitzt.

Um die erste Componente $\overline{aa_\mathfrak{v}'}$ zu bestimmen, verbinden wir den Punkt $a_\mathfrak{v}$ (Fig. 15) mit dem Punkte ${}^1s$ und machen auf dieser Verbindungslinie die Strecke

$$\overline{a_\mathfrak{v}\, a'_\mathfrak{v}} = n\,.\,\overline{a_\mathfrak{v}\, {}^1 s}.$$

Die zweite Componente, d. h. die lothrechte Translationsgeschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v}\, a''_\mathfrak{v}}$ in der Richtung der Geraden H, die der Translationsgeschwindigkeit $\overline{a^{H'}_\mathfrak{v}\, a^{H''}_\mathfrak{v}}$ des Punktes $a^{H'}_\mathfrak{v}$, in welchem die Gerade $a^{H}_\mathfrak{v}\, a_\mathfrak{v}$ die H schneidet, gleich ist, erhalten wir folgender Weise:

Die Geschwindigkeit $a^{H'}_\mathfrak{v}\, a^{H''}_\mathfrak{v}$ des Punktes $a^{H'}_\mathfrak{v}$ ist nach der aus der Gleichung 1) sich ergebenden Beziehung:

$$\overline{a a^{H}_\mathfrak{v}} = n\,.\,\overline{a\, {}^1 s},$$

gleich der $(1-n)$-fachen Geschwindigkeit $a^{H'}_\mathfrak{v}\, a_\mathfrak{v}$, mit deren sich der Punkt a in der Geraden H verschiebt.[1]

Wenn wir die Strecke $a^{H'}_\mathfrak{v}\, a^{H''}_\mathfrak{v}$ (Fig. 15) vom Punkte $a_\mathfrak{v}$ auf die verlängerte Gerade $a^{H'}_\mathfrak{v}\, a_\mathfrak{v}$ übertragen, dann erhalten wir in der Strecke $\overline{a_\mathfrak{v}\, a''_\mathfrak{v}}$ die Translationsgeschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$, als die zweite verlangte Componente. Vermittelst des Parallelogramms der Geschwindigkeiten $\overline{a_\mathfrak{v}\, a'_\mathfrak{v}\, a^1_\mathfrak{v}\, a''_\mathfrak{v}}$ erhalten wir die resultirende Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v}\, a^1_\mathfrak{v}}$ des mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ coincidirenden Punktes der Geraden $a_\mathfrak{v}\, a^{H}_\mathfrak{v}$.

Fällen wir weiter vom Punkte $a^1_\mathfrak{v}$ auf die Gerade $a_\mathfrak{v}\, a^{H}_\mathfrak{v}$ die Senkrechte $H' \equiv a^1_\mathfrak{v}\, a^2_\mathfrak{v}$, welche zugleich mit der Geraden H parallel lauft, dann erhalten wir im Schnittpunkte dieser Geraden mit der Geraden G' den Punkt $a^2_\mathfrak{v}$, welcher mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ verbunden, die lothrechte Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v}\, a^2_\mathfrak{v}}$ des Punktes $a_\mathfrak{v}$ gibt.

Auf Grund der lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{a a_\mathfrak{v}}$, $\overline{a_\mathfrak{v}\, a^2_\mathfrak{v}}$ der Punkte $a a_\mathfrak{v}$ der Normale N_A, construiren wir den Krümmungsmittelpunkt o der Curve A, indem wir (Fig. 15) $a_\mathfrak{v} a^3_\mathfrak{v} \perp N$, $a_\mathfrak{v} a^3_\mathfrak{v} \parallel a_\mathfrak{v} a^2_\mathfrak{v}$ ziehen und hierauf mittelst der Geraden $a^2_\mathfrak{v} a^3_\mathfrak{v}$ die Normale im verlangten Punkte o schneiden.

---

[1] Die Gerade H, diesmal anstatt durch den Punkt ${}^1 s$ zu gleiten (Nr. 2), berührt bei ihrer Bewegung einen Kreis K (Fig. 15), dessen Mittelpunkt sich im Punkte ${}^1 s$ befindet. Dieser Umstand hat aber auf die Bestimmung der lothrechten Geschwindigkeit des Punktes $a^{H'}_\mathfrak{v}$ keinen Einfluss, und diese Strecke $a^{H'}_\mathfrak{v}\, a^{H''}_\mathfrak{v}$ wird wie in Nr. 2 der $(1-n)$-fachen Geschwindigkeit $a^{H'}_\mathfrak{v}\, a_\mathfrak{v}$ (mit deren sich der Punkt a in der Geraden H verschiebt) gleich.

7 Betrachten wir endlich den allgemeinsten Fall, wenn statt der zwei Geraden sich zwei Curven G, H, welche respective den ebenen Systemen S_1, S_2 angehören, um die festen Punkte s, ${}^1s$ eines ruhenden Systems rotiren (Fig. 16).

Um die Construction des Krümmungsmittelpunktes zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Drehgeschwindigkeiten der Systeme S_1, S_2 im gleichen Sinne gleich sind.

Wenn wir von den Punkten s, ${}^1s$, respective auf die Tangenten T_G, T_H der Curven G, H die Senkrechten $sa_\mathfrak{v}$, ${}^1sa_\mathfrak{v}$ fällen, dann treffen sich diese in dem Punkte $a_\mathfrak{v}$, der mit a verbunden, die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes a und die Normale N_A an der Bahncurve A desselben gibt.

Bei der Construction des Krümmungsmittelpunktes der Curve A, müssen wir aber zugleich darauf Rücksicht nehmen, dass die Tangenten T_G, T_H sich während der Rotation der Systeme S_1, S_2 um die festen Punkte s, ${}^1s$, noch um die Krümmungsmittelpunkte o_G, o_H, welche respective den Curven G, H im Punkte a angehören, drehen.

Darum werden die Geraden $sa_\mathfrak{v} \perp T_G$, ${}^1sa_\mathfrak{v} \perp T_H$ sich respective um die Punkte s, ${}^1s$ nicht nur mit der Geschwindigkeit $\omega_G = \omega_H = 1$ drehen, sondern ausserdem noch mit den Drehgeschwindigkeiten ω_G^1, ω_H^1, mit denen respective T_G, T_H um die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte o_G, o_H der Curve G, H rotiren.

Weil die Strecken $\overline{a_\mathfrak{v}s}$, $\overline{a_\mathfrak{v}{}^1s}$ die lothrechten Geschwindigkeiten, mit denen der mit dem Schnittpunkte a coincidirende Punkt respective in den Tangenten T_G, T_H fortschreitet, repräsentiren, sind die letzteren Drehgeschwindigkeiten:

$$\omega_G^1 = \frac{\overline{a_\mathfrak{v}s}}{\overline{o_G a}}, \quad \omega_H^1 = \frac{\overline{a_\mathfrak{v}{}^1s}}{\overline{o_H a}}.$$

Demnach sind die resultirenden Drehgeschwindigkeiten ω_G^2, ω_H^2, respective der Geraden $\overline{sa_\mathfrak{v}}$, $\overline{{}^1sa_\mathfrak{v}}$:

$$\omega_G^2 = \omega_G + \omega_G^1 = 1 + \frac{\overline{a_\mathfrak{v}s}}{\overline{o_G a}} = \frac{\overline{o_G a} + \overline{a_\mathfrak{v}s}}{\overline{o_G a}},$$

$$\omega_H^2 = \omega_H + \omega_H^1 = 1 + \frac{\overline{a_\mathfrak{v}^1 s}}{\overline{o_H a}} = \frac{\overline{o_H a} + \overline{a_\mathfrak{v}^1 s}}{\overline{o_H a}}.$$

Die resultirenden lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{a_\mathfrak{v} a^G_{\mathfrak{v}'}}$, $\overline{a_\mathfrak{v} a^H_{\mathfrak{v}'}}$ des Punktes $a_\mathfrak{v}$, der respective um die Punkte s, ${}^1s$ rotirenden Geraden $sa_\mathfrak{v}$, ${}^1sa_\mathfrak{v}$ ist also:

$$\overline{a_\mathfrak{v} a^G_{\mathfrak{v}'}} = \omega^2_G . \overline{a_\mathfrak{v} s} = \frac{\overline{o_G a} + \overline{a_\mathfrak{v} s}}{\overline{o_G a}} . \overline{a_\mathfrak{v} s},^1$$

$$\overline{a_\mathfrak{v} a^H_{\mathfrak{v}'}} = \omega^2_H . \overline{a_\mathfrak{v} {}^1s} = \frac{\overline{o^H a} + \overline{a^\mathfrak{v} {}^1s}}{\overline{o_H a}} . \overline{a_\mathfrak{v} {}^1s}.$$

In den erhaltenen Punkten $a^G_{\mathfrak{v}'}$, $a^H_{\mathfrak{v}'}$ errichten wir respective zu den Geraden $sa_\mathfrak{v}$, ${}^1sa_\mathfrak{v}$ die Senkrechten $T'_G \parallel \overline{T}_G$, $\overline{T}'_H \parallel T_H$, welche sich im Punkte $a^1_\mathfrak{v}$ schneiden. Die Strecke $\overline{a_\mathfrak{v} a^1_\mathfrak{v}}$ repräsentirt uns dann die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$.

Auf Grund der lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{aa_\mathfrak{v}}$ und $\overline{a_\mathfrak{v} a}$, zweier Punkte a, $a_\mathfrak{v}$ der Normale N_A construiren wir den Krümmungsmittelpunkt o wie vorher.

8. Es bleibt nur noch übrig den Fall zu betrachten, wenn die Drehgeschwindigkeiten der ebenen Systeme S_1, S_2 ungleich sind.

Nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit des Systems S_1 gleich Eins und die des Systems S_2 gleich n ist. Dann stellt die Strecke $\overline{aa^H_\mathfrak{v}} = n . a^1s$ die lothrechte Geschwindigkeit des mit dem Schnittpunkte a coincidirenden Punktes der um den Punkt ${}^1s$ rotirenden Curve H (Fig. 17).

Die Construction des Punktes $a^G_{\mathfrak{v}'}$ und der Geraden T'_G für das erste System ist dieselbe wie vorher.[2] Anders wird sich aber die Construction in Bezug auf das zweite System gestalten.

Der Punkt $a_\mathfrak{v}$ dreht sich um den Punkt ${}^1s$ mit der lothrechten Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v} a'_\mathfrak{v}} = n . \overline{a_\mathfrak{v} {}^1s}$ und verschiebt sich in

---

[1] Die Strecke $\overline{a_\mathfrak{v} a^G_{\mathfrak{v}'}}$ wird construirt, indem wir (Fig. 16) $a_\mathfrak{v} 1 \perp sa_\mathfrak{v}$ und $\overline{a_\mathfrak{v} 1} = \overline{a_\mathfrak{v} s}$ ziehen, dann $\overline{12} = \overline{o_G a}$ machen und $s3 \parallel a_\mathfrak{v} 1$, $13 \parallel a_\mathfrak{v} s$ ziehen, durch den Schnittpunkt 3 der Geraden 13, $s3$ die Gerade 32 führen, welche die Gerade $sa_\mathfrak{v}$ im verlangten Punkte $a^G_{\mathfrak{v}'}$ schneidet.

In derselben Weise erhalten wir den Punkt $a^H_{\mathfrak{v}'}$.

[2] Diese Construction wurde in der Fig. 17 ausgelassen.

der Richtung der Tangente T_H mit der lothrechten Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v} a''_\mathfrak{v}}$, welche der Geschwindigkeit

$$\overline{a_\mathfrak{v}^{H'} a_\mathfrak{v}^{H''}} = (1-n)\, \overline{a_\mathfrak{v}^{H'} a_\mathfrak{v}}$$

des Schnittpunktes $a_\mathfrak{v}^{H'}$ der Geraden T_H und der Geraden $a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v} \perp T_A$ gleich ist (Nr. 6).

Ausserdem haben wir aber noch die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$ zu bestimmen, welche diesem Punkte der Rotation der, mit der Drehgeschwindigkeit

$$\omega_H^1 = \frac{\overline{a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}}}{\overline{o_H a}}$$

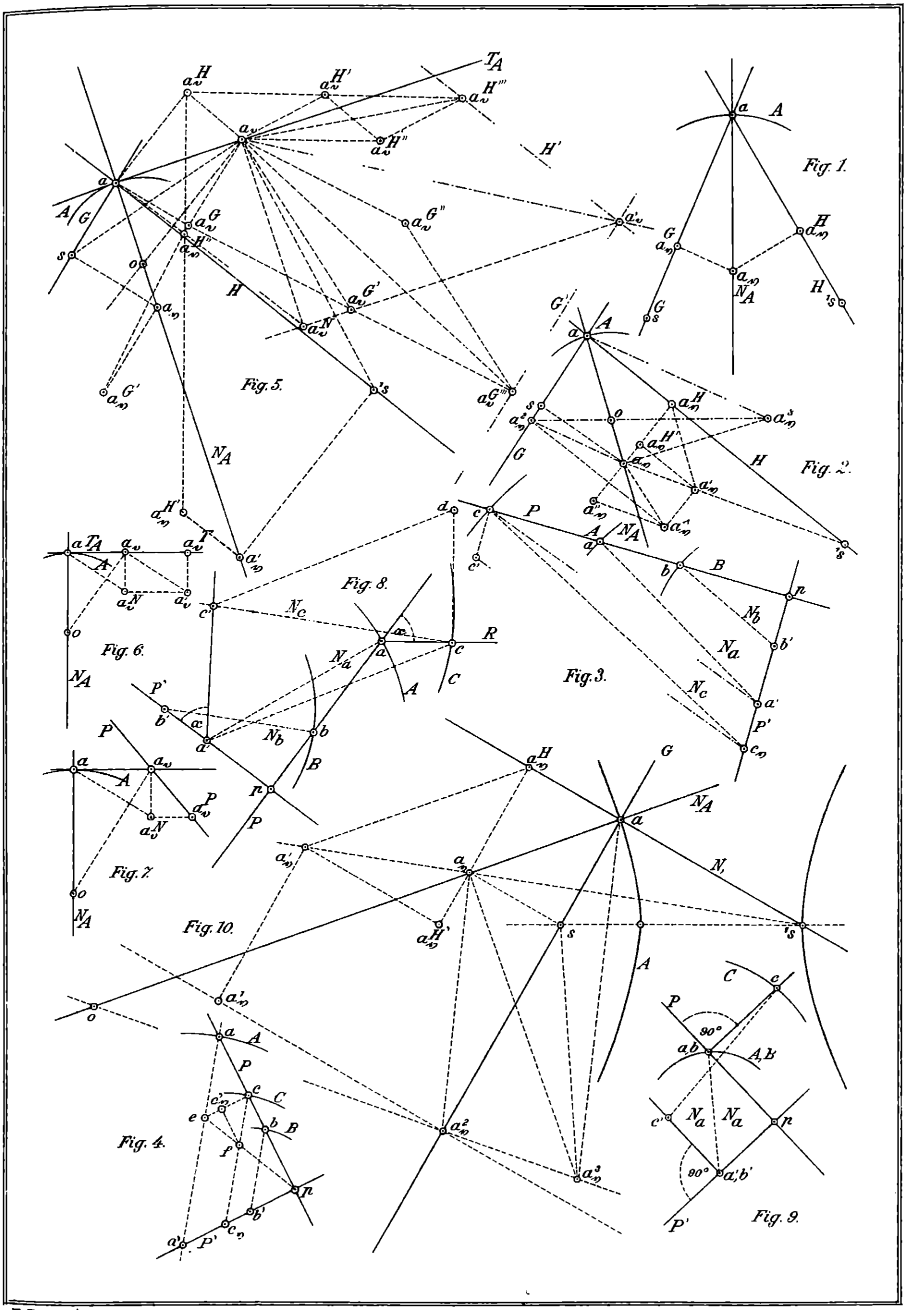
sich bewegenden Tangente T_H wegen zugehört.

Da die Geschwindigkeit ω_H^2 der Geraden $sa_\mathfrak{v}$ mit Rücksicht auf die beiden Rotationen der Tangente T_H $\left(\omega_H = n \quad \omega_H^1 = \frac{\overline{a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}}}{\overline{o_H a}}\right)$

$$\omega_H^2 = n + \frac{\overline{a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}}}{\overline{o_H a}} = \frac{n\,.\,\overline{o_H a} + \overline{a_\mathfrak{v}^H a_\mathfrak{v}}}{\overline{o_H a}},$$

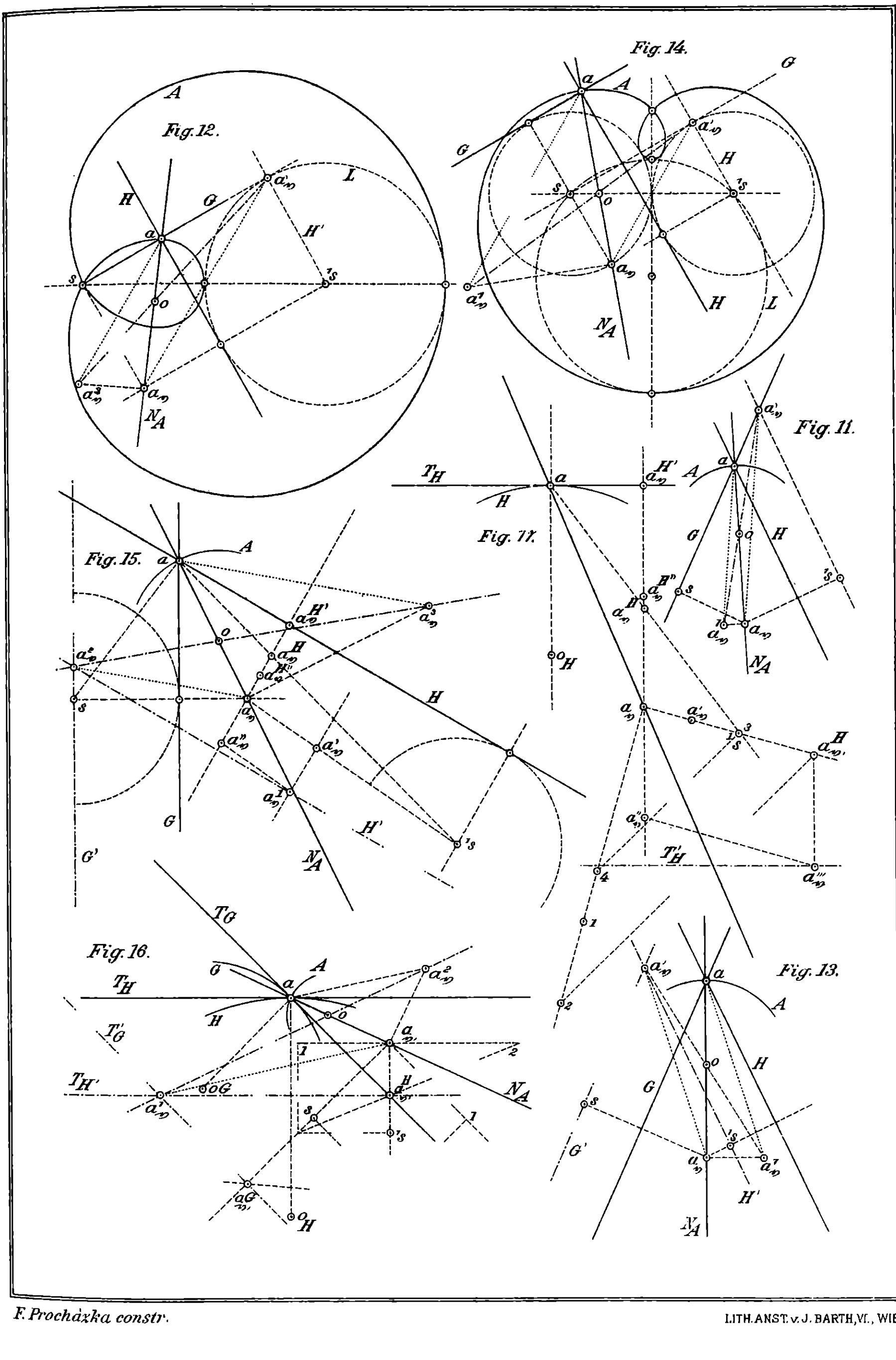
erhalten wir die verlangte lothrechte Geschwindigkeit $\overline{a_\mathfrak{v} a_{\mathfrak{v}'}^H}$ des Punktes $a_\mathfrak{v}$, indem wir die im vorgehenden Artikel angeführte Construction anwenden.

Aus den lothrechten Geschwindigkeiten $\overline{a_\mathfrak{v} a''_\mathfrak{v}}$, $\overline{a_\mathfrak{v} a_{\mathfrak{v}'}^H}$ construiren wir die resultirende lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$ als Diagonale des Parallelogrammes der Geschwindigkeiten und erhalten zuletzt den Punkt $a'''_\mathfrak{v}$, von welchem wir auf die Gerade $a_\mathfrak{v} a_\mathfrak{v}^H$ die Senkrechte $T'_H \,||\, T_H$ fällen. Der Schnittpunkt $a_\mathfrak{v}^1$ der Geraden T'_a, T'_H mit dem Punkte $a_\mathfrak{v}$ verbunden, bestimmt uns die lothrechte Geschwindigkeit des Punktes $a_\mathfrak{v}$. Die weitere Construction des Krümmungsmittelpunktes o der Curve A stimmt mit der vorgehenden Construction vollkommen überein.



F. Procházka constr.

LITH. ANST. v. J. BARTH, VI., WIEN.



F. Procházka constr.

LITH. ANST. v. J. BARTH, VI., WIEN.