# Zur Theorie der Dielektrica

Dr. **Anton Lampa.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. Juni 1895.)

## I.

Die mathematische Behandlung der Dielektrica von Clausius[1] gestattet eine Verallgemeinerung, welche geeignet ist, den Fall solcher Dielektrica zu umfassen, welche nach verschiedenen Richtungen verschiedene Dielektricitätsconstanten aufweisen. Die Giltigkeit der Clausius'schen Theorie ist auf isotrope Stoffe eingeschränkt; die Grundannahme, von welcher sie ausgeht, kommt schliesslich darauf hinaus, das Dielektricum als aus gleich grossen leitenden Kugeln constituirt anzusehen, welche in dem nichtleitenden Raume gleichmässig vertheilt sind, indem einerseits möglichen Verschiedenheiten in der Grösse und der Erstreckung nach den drei Dimensionen durch Einführung eines Mittelwerthes für den Radius der Kugeln Rechnung getragen, anderseits die Verschiedenheit der Orientirung durch die gleiche Wahrscheinlichkeit aller Lagen compensirt gedacht wird. Der Vorzug derselben ist wesentlich in dem Umstand begründet, dass sie zeigt, wie man vom Boden der Moleculartheorie aus zu den Gleichungen dielektrischer Medien gelangen kann; und in gleicher Weise dürfte die Verallgemeinerung der Clausius'schen Methode einiges Interesse für sich beanspruchen, da sie die Verschiedenheit der Dielektricitätsconstante krystallisirter Körper nach verschiedenen Richtungen in eine Beziehung bringt zu den Erstreckungen der Molekel nach diesen Richtungen.

---

[1] Clausius, Die mechanische Wärmetheorie. 2. Aufl., 2. Bd., S. 62—97

Die einfachste Annahme, mittelst welcher eine Erklärung des nach drei Richtungen verschiedenen Verhaltens eines Dielektricums versucht werden kann, ist die, sich das Dielektricum aus gleich grossen, im nichtleitenden Raume gleichmässig vertheilten leitenden dreiaxigen Ellipsoiden mit (der Krystallstructur entsprechend) durchgängig analoger Orientirung constituirt zu denken. Bringt man ein derartiges Medium in ein elektrisches Feld, so werden die Ellipsoide durch Influenz elektrisch, und es handelt sich vor Allem darum, die äussere Potentialfunction eines solchen Ellipsoids zu bestimmen. Wenn nun auch das Feld im Dielektricum nicht homogen sein sollte, so ist doch die Annahme zulässig, dass es in jedem einzelnen Raumelement des Dielektricums homogen ist; es genügt daher, die Elektrisirung eines Ellipsoids im homogenen Felde zu kennen, um die weitere Entwicklung der Theorie zu ermöglichen. Man könnte die nothwendigen Formeln aus der Theorie der Magnetisirung eines Ellipsoids im homogenen Magnetfeld herleiten; da jedoch die Methode der Gleitschichten[1] unmittelbar zum Ziele führt, will ich hier die Elektrisirung eines leitenden Ellipsoids im homogenen Felde nach dieser Methode behandeln.

Die Vertheilung einer elektrischen Ladung auf einem Ellipsoid ist bekanntlich bestimmt in der Weise, dass sie in dem von der Oberfläche des Ellipsoids und eines mit demselben homothetischen mit constanter Raumdichte vertheilt erscheint. Ein unelektrisches Ellipsoid können wir uns mit zwei beliebigen, jedoch gleich grossen entgegengesetzten Ladungen versehen denken, welche den ganzen Raum zweier gleich grosser, zu dem gegebenen homothetischer Ellipsoide mit den constanten Raumdichten $+\rho$ und $-\rho$ erfüllen. Bringen wir nun ein solches Ellipsoid in ein homogenes Feld, welches einer der Axen parallel ist — jeder andere Fall lässt sich auf diesen zurückführen —, so erfahren diese homothetischen Ellipsoide gleich grosse, zu der Kraft parallele, jedoch entgegengesetzte Verschiebungen. In Folge dessen werden an den

[1] Über Gleitschichten siehe Joubert und Mascart: Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Deutsche Ausgabe, 1. Bd., S. 134.

beiden Halbellipsoiden entgegengesetzte Ladungen auftreten, welche dadurch bestimmt sind, dass die Räume, welche die homothetischen Ellipsoide von einander ausschneiden, mit den constanten Raumdichten $+\rho$, respective $-\rho$ geladen sind.

Das Feld habe die Stärke $\Phi$ und sei parallel der $X$-Axe, zugleich parallel der $a$-Axe des Ellipsoids, da wir das Coordinatensystem so legen, dass die $X$-Axe $\|$ $a$, die $Y$-Axe $\|$ $b$, die $Z$-Axe $\|$ $c$. Die Richtung der Kraft brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da es sich uns nur um die absoluten Werthe handelt. Die Grösse der Verschiebung betrage für jedes der Ellipsoide den Werth $\varepsilon$; die Poldichten werden dann, absolut genommen, durch die Strecke $2\varepsilon$, die Dichte an einem beliebigen Punkte wird analog durch den Abstand der beiden homothetischen Ellipsoide an jener Stelle bestimmt sein. Bezeichnen wir das leitende Ellipsoid mit $E$, die homothetischen mit $E'$ und $E''$, so wird gelten

$$\text{für } E\colon \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{I}$$

$$\text{für } E'\colon \quad \frac{(x-\varepsilon)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=p^2 \tag{II}$$

$$\text{für } E''\colon \quad \frac{(x+\varepsilon)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=p^2 \tag{III}$$

worin

$$p=1+\frac{\varepsilon}{a}.$$

Die Normale in einem Oberflächenpunkte $N$ des Ellipsoides $E$, dessen Coordinaten $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sein sollen, ist gegeben durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}(\xi-x)+\frac{\partial z}{\partial x}(\zeta-z)&=0\\(\eta-y)+\frac{\partial z}{\partial y}(\zeta-z)&=0\end{aligned}\right\} \tag{IV}$$

Diese Normale wird das Ellipsoid $E'$ im Punkte $N'$, das Ellipsoid $E''$ im Punkte $N''$ schneiden. Da $\varepsilon$ klein ist, kann angenommen werden, dass die durch IV) bestimmte Normale auch zu $E'$ und $E''$ normal ist, so dass die Strecke $N'N''$ den Abstand der beiden homothetischen Ellipsoide für den Punkt $N(\xi, \eta, \zeta)$ darstellt. Bedeutet $df$ ein bei $N$ genommenes Flächenelement, so wird daher sein (absolut genommen):

$$\begin{gathered} h_a . df = \rho . df . N'N'' \\ h_a = \rho . N'N'', \end{gathered} \qquad \text{V)}$$

wenn mit $h_a$ die Flächendichte im Punkte $N$ bezeichnet wird.

Der Punkt $N'$ ist gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} (\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta - z) = 0 \\ (\eta - y) + \frac{\partial z}{\partial y}(\zeta - z) = 0 \\ \frac{(x-\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = p^2 \end{gathered} \qquad \text{VI)}$$

und analog der Punkt $N''$ durch

$$\begin{gathered} (\xi - x) + \frac{\partial z}{\partial x}(\zeta - z) = 0 \\ (\eta - y) + \frac{\partial z}{\partial y}(\zeta - z) = 0 \\ \frac{(x+\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = p^2 \end{gathered} \qquad \text{VII)}$$

Die Gleichung I) liefert

$$\begin{gathered} \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b^2}}} = -\frac{c^2 x}{z} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = -\frac{c^2 y}{z} \end{gathered} \qquad \text{VIII)}$$

für den ersten Octanten, auf welchen wir uns beschränken können, da auf den andern Alles symmetrisch ist.

VIII) in VII) und VI) eingesetzt, würde uns zu Gleichungen vierten Grades zur Bestimmung von $\overline{N'N''}$ führen. Ziehen wir aber vom Mittelpunkte von $E$ (dem Coordinatenanfangspunkte) einen Radiusvector zu $N'$ und bezeichnen den Punkt, in welchem dieser Radiusvector $E''$ schneidet, mit $R''$, den Winkel endlich, welchen $\overline{N'R''}$ mit $\overline{N'N''}$ einschliesst, mit $\omega$, so ist

$$\overline{N'N''} = \overline{N'R''}.\cos\omega. \qquad \text{IX)}$$

$N'R''$ lässt sich leicht berechnen. Wir können annehmen, dass der zu $N'$ gezogene Radiusvector durch dieselben Gleichungen bestimmt ist wie der zum Punkte $N$ gezogene, dessen Gleichungen lauten:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} z \\ y &= \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} z, \end{aligned}\right\} \qquad \text{X)}$$

worin $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel bedeuten, welche er mit den Axen einschliesst. Man hat daher

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \\ \cos\beta &= \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}} \end{aligned}\right\} \qquad \text{XI)}$$

wodurch X) übergeht in

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{\zeta} z \\ y &= \frac{\eta}{\zeta} z. \end{aligned}\right\} \qquad \text{XII)}$$

Es dienen daher zur Bestimmung von $N'$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\xi}{\zeta} z \\ y &= \frac{\eta}{\zeta} z \\ \frac{(x-\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &+ \frac{z^2}{c^2} = p^2 \end{aligned}\right\} \qquad \text{XIII)}$$

und zur Bestimmung von $R''$:

$$x = \frac{\xi}{\zeta} z$$

$$y = \frac{\eta}{\zeta} z \qquad \text{XIV)}$$

$$\frac{(x+\varepsilon)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = p^2$$

Diese Gleichungen liefern für $z$ — wobei das obere Zeichen für $N'$, das untere für $R''$ gilt:

$$\frac{\left(\frac{\xi}{\zeta} z \mp \varepsilon\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{\eta}{\zeta} z\right)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = p^2,$$

d. i. weiter

$$\frac{z^2}{\zeta^2}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right) \mp 2\varepsilon \frac{\xi}{\zeta a^2} z = p^2 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}.$$

Da $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1$, folgt weiter

$$z^2 \mp 2\varepsilon \frac{\xi}{\zeta a^2} z = \left(p^2 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\right)\zeta^2,$$

was der Kürze wegen geschrieben werden mag:

$$z^2 \mp 2\varepsilon S.z = T.$$

Wir haben also

$$\text{für } N'\text{: } z^2 - 2\varepsilon S.z = T$$

$$\text{für } R''\text{: } z^2 + 2\varepsilon S.z = T$$

und hieraus die Lösungen:

$$\text{für } N'\text{: } z' = \varepsilon S \pm \sqrt{\varepsilon^2 S^2 + T}$$
$$\text{für } R''\text{: } z'' = -\varepsilon S \pm \sqrt{\varepsilon^2 S^2 + T} \qquad \text{XV)}$$

Nun ist $\overline{N'R''}^2 = (x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2$; das gibt mit Berücksichtigung von XII):

$$\overline{N'R''^2} = \left(\frac{\xi^2}{\zeta^2} + \frac{\eta^2}{\zeta^2} + 1\right)(z''-z')^2$$

und da $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = r^2$:

$$\overline{N'R''^2} = (z''-z')^2\,\frac{r^2}{\zeta^2}.$$

Wir erhalten daher mit Rücksicht auf XV), indem wir bei der Wurzelausziehung jenes Zeichen wählen, welches, da die Normale für den ersten Octanten genommen wurde, $z''-z$ positiv macht:

$$\overline{N'R''} = 2\varepsilon S\frac{r}{\zeta}.$$

Nun war $S = \frac{\xi\zeta}{a^2}$, es ist also $\overline{N'R''} = 2\varepsilon\frac{\xi r}{a^2}$, somit

$$\overline{N'N''} = \overline{N'R''}\cos\omega = 2\varepsilon\frac{\xi r}{a^2}\cos\omega,$$

daher

$$h_a = 2\varepsilon\rho\frac{\xi r}{a^2}\cos\omega.$$

$2\varepsilon\rho$ ist die Dichte am Pole der $a$-Axe; sie heisse $\sigma_a$. Wir haben dann

$$h_a = \sigma_a\frac{\xi r}{a^2}\cos\omega. \qquad \text{XVI)}$$

Diesen Ausdruck wollen wir noch weiter transformiren. Die Winkel der Normale mit den Coordinatenaxen sind bestimmt durch

$$\cos\varphi = \frac{1}{Q}\,\frac{\partial E}{\partial x}$$

$$\cos\psi = \frac{1}{Q}\,\frac{\partial E}{\partial y}$$

$$\cos\chi = \frac{1}{Q}\,\frac{\partial E}{\partial z},$$

worin $E$ die Gleichung der Fläche,

$$Q = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial z}\right)^2}$$

ist. In unserem Falle ist

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial E}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \quad \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$$

$$Q = +2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}},$$

somit für den Punkt $N$:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\varphi &= \frac{\xi}{a^2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}} \\
\cos\psi &= \frac{\eta}{b^2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}} \\
\cos\chi &= \frac{\zeta}{c^2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}.
\end{aligned}\right\} \quad \text{XVII)}$$

Die Winkel des Radiusvector mit den Axen waren $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, somit ist

$$\cos\omega = \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi.$$

Das gibt mit Rücksicht auf XI) und XVII):

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}\left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{r\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}}.$$

Dies in XVI) eingesetzt, gibt

$$h_a = \sigma_a \frac{\xi r}{a^2} \frac{1}{r\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}},$$

(d. i. mit Rücksicht auf XVII) $= \sigma_a \cos\varphi$; d. h.:

Sind die Kraftlinien parallel zur $a$-Axe, so ist die Dichte in einem Punkte des Ellipsoids proportional dem Cosinus des Winkels, welchen die Normale in diesem Punkte mit der $a$-Axe einschliesst.

Analoges gilt, wenn die Feldrichtung parallel zur $b$-Axe oder parallel zur $c$-Axe ist. Man kann daher schreiben:

$$\begin{aligned} h_a &= \sigma_a \cos\varphi \\ h_b &= \sigma_b \cos\psi \\ h_c &= \sigma_c \cos\chi, \end{aligned} \tag{XVIII}$$

worin $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ die Poldichten bezeichnen.

Die Grössen $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ lassen sich leicht bestimmen. Für $\sigma_a$ stellt sich die Rechnung wie folgt:

Im Innern des Ellipsoids darf keine Kraft herrschen, d. h. die Summe der darin herrschenden Kräfte muss gleich Null sein. Ist $F$ die Wirkung des Ellipsoids auf einen Punkt im Innern, $\Phi$ die Feldstärke, so muss also $F+\Phi = 0$, d. i.

$$F = -\Phi \tag{XIX}$$

sein.

Die Grösse $F$ ist selbst die Summe aus den Wirkungen der beiden Ellipsoide $E'$ und $E''$. In Betracht kommen nur die Componenten parallel zur $X$-Axe. Denn die Componenten parallel zur $Y$-Axe und parallel zur $Z$-Axe sind gleich gross. aber entgegengesetzt gerichtet; die $Y$-Componenten sind für den betrachteten Punkt, der in $E'$ die Coordinaten $x', y, z$, in $E''$ aber $x'', y, z$ von den Mittelpunkten gezählt haben soll[1]

$$\text{für } E'\colon\ \mathfrak{Y}' = -\frac{3M'y}{a_1^3}\int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-\lambda_1^2 u^2)^{3/2}(1-\lambda_1'^2 u^2)^{1/2}}$$

$$\text{für } E''\colon\ \mathfrak{Y}'' = -\frac{3M''y}{a_1^3}\int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-\lambda_1^2 u^2)^{3/2}(1-\lambda_1'^2 u^2)^{1/2}}.$$

Der Werth des Integrales, in welchem $u$ bestimmt ist durch $\frac{1}{u^2} = 1+\frac{s}{a_1^2}$, wo $s = a_1^2 - \alpha^2$, wenn $\alpha$ die grösste Axe des

[1] Siehe Mathieu, Théorie des Potentials. Deutsche Ausgabe von Maser, S. 121.

durch den fraglichen Punkt zu dem betreffenden Ellipsoid confocal gelegten Ellipsoides bedeutet, hängt nur ab von $\lambda_1^2 = \frac{a_1^2-b_1^2}{a_1^2}$ und $\lambda_1'^2 = \frac{a_1^2-c_1^2}{a_1^2}$, nicht aber von $u$, ist daher für beide Ellipsoide gleich. Da ferner die Masse $M''$ des Ellipsoides $E'' = -M'$, der Masse des Ellipsoides $E'$, folgt

$$\mathfrak{Y}'+\mathfrak{Y}'' = 0$$

und ebenso

$$\mathfrak{Z}'+\mathfrak{Z}'' = 0.$$

Dagegen ist, da wir $M' = M$, $M'' = -M$ schreiben können, wenn wir $\int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-\lambda_1^2 u^2)^{1/2}(1-\lambda_1'^2 u^2)^{1/2}} = J$ setzen:

$$F = \mathfrak{X}_1+\mathfrak{X}_2 = -\frac{3MJ}{a_1^3}(x'-x'') = -\frac{2MJ}{a_1^3} \quad 2\varepsilon.$$

Da nun $a_1 = ap$, $b_1 = bp$, $c_1 = cp$ ist, ist auch

$$J = \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-\lambda^2 u^2)^{1/2}(1-\lambda'^2 u^2)^{1/2}}$$

und $M = \frac{4\pi}{3} a_1 b_1 c_1 \rho = \frac{4\pi}{3} abcp^3\rho$; ferner war $2\varepsilon\rho = \sigma_a$; daher folgt

$$F = -4\pi J \frac{bc}{a^2} \qquad \text{XX)}$$

Das gibt nach XVI):

$$\sigma_a = \frac{1}{4\pi J} \frac{a^2}{bc} \Phi.$$

Ist dasselbe Feld parallel zur $b$-Axe oder $c$-Axe, so folgen analoge Formeln. Wir haben daher

$$\sigma_a = \frac{1}{4\pi J} \frac{a^2}{bc} \Phi$$

$$\sigma_b = \frac{1}{4\pi J} \frac{b^2}{ac} \Phi \qquad \text{XXI)}$$

$$= \frac{1}{4\pi J} \frac{c^2}{ab} \Phi$$

Bezüglich $J$ ist noch eine Bemerkung zu machen. Es ist $\lambda^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ und $\lambda'^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2}$ unter der Voraussetzung gesetzt, dass $a$ die grösste Axe ist.

Die Formeln XVIII) und XXI) sind diejenigen, welche wir bei der Entwicklung der Gleichungen des dielektrischen Mediums brauchen werden. Der Vollständigkeit halber soll jedoch noch die Grösse der Fläche bestimmt werden, deren Kraftlinien von dem Ellipsoid aufgefangen werden. Dieselbe kann bestimmt werden durch die Erwägung, dass die Ladung des Halbellipsoids absolut genommen gleich sein muss der Ladung dieser unbekannten Fläche. Auf dieser selbst ist die Ladung gleichförmig vertheilt, da sie ja dem homogenen Felde angehört. Wir führen wieder die Rechnung durch für den Fall, dass die Kraftlinien parallel sind zur $a$-Axe.

Das Oberflächenelement ist [1]

$$df = \frac{\sqrt{1+\frac{c^2-a^2}{a^2}\frac{x^2}{a^2}+\frac{c^2-b^2}{c^2}\frac{y^2}{b^2}}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,dx\,dy,$$

seine Ladung $h_a df = \sigma_a df \cos\varphi$, worin $\varphi$ der Winkel der zugehörigen Normale mit der $a$-Axe. Es ist nach XVII)

$$\cos\varphi = \frac{x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}}.$$

Die Wurzel $\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}$ können wir mit Hilfe der Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ umformen. Wir haben

$$\frac{z^2}{c^2} = 1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$$

[1] Serret, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Deutsch von Harnack, 2. Bd., S. 338.

somit

$$\frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{c^2} - \frac{x^2}{a^2c^2} - \frac{y^2}{b^2c^2},$$

also

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \frac{1}{c}\sqrt{1 + \frac{c^2-a^2}{a^2}\,\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2-b^2}{b^2}\,\frac{y^2}{b^2}},$$

also schliesslich

$$\cos\varphi = \frac{cx}{a^2\sqrt{1 + \frac{c^2-a^2}{a^2}\,\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2-b^2}{b^2}\,\frac{y^2}{b^2}}}$$

und

$$\sigma_a df \cos\varphi = \frac{cx\,dy\,dz}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}\cdot\sigma_a.$$

Es genügt, die Ladung des ersten Octanten zu bestimmen; wir haben dann das Integral

$$\iint \frac{x\,dy\,dz}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

zu nehmen von

$$x = 0 \text{ bis } x = a$$
$$y = 0 \text{ bis } y = b,$$

wobei nur das positive Zeichen der Wurzel gilt, wie sich gleich zeigen wird. Wir führen neue Variable ein gemäss der Gleichung[1]

$$\iint V dx\,dy = \iint \left[\frac{\partial x}{\partial \theta}\,\frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi}\,\frac{\partial y}{\partial \theta}\right] V d\theta\,d\psi.$$

Wir haben

$$V = \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

---

[1] Serret, im obengenannten Werke, 2. Bd., S. 326 u. folg.

und setzen

$$x = a \sin\theta \cos\psi$$
$$y = b \sin\theta \sin\psi$$
$$z = c \cos\theta,$$

was der Gleichung des Ellipsoids genügt. Man findet

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} = \cos\theta,$$

und zwar $+\cos\theta$, da in dem ersten Octanten $z = c.\cos\theta$ positiv sein muss. Ferner ergibt sich

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}\frac{\partial y}{\partial\psi}-\frac{\partial x}{\partial\psi}\frac{\partial y}{\partial\theta} = ab\sin\theta\cos\theta,$$

daher endlich

$$\iint\frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} = a^2b\iint\sin^2\theta\cos\psi\,d\theta\,d\psi, \qquad \text{XXII)}$$

worin

$$\begin{array}{lll} \text{für } x = 0 & & a\sin\theta\cos\psi = 0 \\ \text{für } y = 0 & & b\sin\theta\sin\psi = 0 \\ z = c, \text{ also} & & c\cos\theta = c \end{array}$$

ist, woraus $\theta = 0$ folgt. Der Werth $\theta = \frac{\pi}{2}$ liefert $z = 0$ und $\sin\theta = 1$; diesem Werthe entsprechen

$$\begin{array}{ll} \text{einerseits } x = 0, & \text{anderseits } x = a \\ \qquad\quad y = b & \qquad\quad y = 0, \end{array}$$

also

$$\text{einerseits } \psi = \frac{\pi}{2}, \quad \text{anderseits } \psi = 0.$$

Die Grenzen für $\theta$ sind also 0 bis $\frac{\pi}{2}$, für $\psi$ entweder 0 bis $\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{\pi}{2}$ bis 0. Wir haben jene zu wählen, welche unser Integral positiv machen, da ja dieses für den ersten Octanten gelten soll; diese sind $\frac{\pi}{2}$ bis 0; wir haben also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \, d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos \psi \, d\psi$$

zu berechnen. Man findet dafür leicht den Werth $\frac{\pi}{4}$, somit

$$\int_0^a \int_0^b \frac{x \, dx \, dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} = \frac{\pi}{4} \quad a^2 b,$$

und dementsprechend die Ladung des Octanten $\sigma_a \int df \cos \varphi =$ $= \sigma_a \frac{bc\pi}{4}$ und die des Halbellipsoides $L_a = bc\pi . \sigma_a$, d. h. seine Ladung ist so gross, als ob seine ebene Begrenzung $bc\pi$ mit der Poldichte $\sigma_a$ gleichförmig belegt wäre.

Bezeichnen wir die unbekannte herausgeschnittene Fläche mit $\Psi_a$, die auf derselben herrschende constante Dichte mit $\Sigma$, so muss absolut genommen

$$bc\pi . \sigma_a = \Psi_a . \Sigma .$$

Ist nun die Feldstärke $\Phi$, so ist absolut genommen $\Sigma = \frac{1}{4\pi} \Phi$; da wir $\sigma_a = \frac{1}{4\pi J} \quad \frac{a^2}{bc} \Phi$ gefunden haben, so erhalten wir endlich

$$\Psi_a = \frac{a^2 \pi}{J}$$

und analog für die anderen Stellungen

$$\left.\begin{aligned} \Psi_b &= \frac{b^2 \pi}{J} \\ \Psi_c &= \frac{c^2 \pi}{J}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{XXIII)}$$

Die Formeln XX) geben für die Kugel, indem wir $a = b =$ $= c = r$ setzen und $J = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$ finden:

$$\Psi_a = \Psi_b = \Psi_c = \Psi_r = 3 r^2 \pi$$

wie bekannt.[1]

---

[1] Joubert und Mascart, in dem oben genannten Werke, 1. Bd., S. 138.

## II.

Wir gehen nun über zur Entwicklung der Gleichungen für ein dielektrisches Medium, welches in der oben geschilderten Weise constituirt ist. Das Coordinatensystem wählen wir abermals parallel zu den Axen des Ellipsoids, welche wir wie früher mit $a$, $b$, $c$ bezeichnen; die $X$-Axe sei parallel zu $a$, die $Y$-Axe parallel zu $b$, die $Z$-Axe parallel zu $c$. Im Innern des Ellipsoids sei ferner ein Punkt $p$ mit den Coordinaten $x, y, z$, etwa der Mittelpunkt des Ellipsoids, angenommen; die Coordinaten eines Oberflächenpunktes mögen dann mit $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ bezeichnet werden. Betrachten wir nun einen ausserhalb des Ellipsoids liegenden Punkt $p'$ mit den Coordinaten $x', y', z'$ und bezeichnen seinen Abstand vom Punkte $p$ mit $r$ und seinen Abstand von jenem Oberflächenpunkte mit $r_1$, so ist unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\xi + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\eta + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\zeta. \tag{1}$$

Ist nun bei jenem Oberflächenpunkte ein Flächenelement $dw$ genommen und wird die auf demselben befindliche Elektricitätsmenge mit $h\,dw$ bezeichnet; bezeichnen wir ferner die Potentialfunction des Ellipsoids mit $u$ und ihren Werth im Punkte $p'$ mit $u'$, so ist

$$u' = \int \frac{h\,dw}{r_1} \tag{2}$$

über die ganze Oberfläche des Ellipsoids genommen.

Mit Berücksichtigung von 1) erhält man

$$u' = \frac{1}{r}\int h\,dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\int \xi h\,dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\int \eta h\,dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\int \zeta h\,dw. \tag{3}$$

Das Integral $\int h\,dw$ stellt die Gesammtladung des Ellipsoides dar; da dieselbe nur von Influenz herrührt, ist sie gleich Null, daher

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \int \xi h\, dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \int \eta h\, dw + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \int \zeta h\, dw. \qquad 4)$$

Die drei andern Integrale repräsentiren die elektrischen Momente des Ellipsoids, und diese sind vor Allem zu bestimmen. Diese Bestimmung ist möglich, da der Werth $h$, die elektrische Dichte in dem Oberflächenpunkte $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ eines Ellipsoids, dessen Mittelpunkt die Coordinaten $x$, $y$, $z$ hat, bekannt ist, wenn sich das Ellipsoid in einem homogenen Felde von der Stärke $K$ befindet. Die Bedingung der Homogenität des Feldes, trifft, wie oben bemerkt wurde, in unserem Falle zu.

Im Allgemeinen wird jedoch $K$ mit den (in unserem Falle zu den Ellipsoidaxen parallelen) Coordinatenaxen Winkel einschliessen; die zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten von $K$ mögen mit $X$, $Y$, $Z$ bezeichnet werden. Die Dichte $h$ entsteht dann durch Superposition der von $X, Y, Z$ herrührenden Dichten, welche bezüglich $h_a$, $h_b$, $h_c$ heissen sollen, so dass

$$h = h_a + h_b + h_c. \qquad 5)$$

In der Gleichung 4) sind die Coordinaten $\xi, \eta, \zeta$ von $x, y, z$, dem Mittelpunkte, gezählt. Da aber $h_a$, $h_b$, $h_c$ nur von den Cosinussen der Normalen mit den Axen, keineswegs jedoch von den Mittelpunktscoordinaten abhängen, können wir zu ihrer Bestimmung die im I. Theile entwickelten Formeln unmittelbar anwenden.

Die Formeln XVIII) und XXI) ergeben, wenn wir berücksichtigen, dass die Feldstärken in der Richtung der $a$-, $b$-, $c$-Axe beziehentlich $X, Y, Z$ sind:

$$h_a = \sigma_a \cos\varphi = \frac{1}{4\pi J}\,\frac{a^2}{bc}\,X\cos\varphi$$

$$h_b = \sigma_b \cos\psi = \frac{1}{4\pi J}\,\frac{b^2}{ac}\,Y\cos\psi$$

$$h_c = \sigma_c \cos\chi = \frac{1}{4\pi J}\,\frac{c^2}{ab}\,Z\cos\chi$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen XVII), in welchen wir $\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}} = T$ setzen, erhalten wir daher

$$u' = \frac{1}{4\pi J}\Bigg[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\left\{\frac{X}{bc}\int\frac{\xi^2 dw}{T} + \frac{Y}{ac}\int\frac{\xi\eta\, dw}{T} + \frac{Z}{ab}\int\frac{\xi\zeta\, dw}{T}\right\} \tag{5}$$

$$+ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\left\{\frac{X}{bc}\int\frac{\xi\eta\, dw}{T} + \frac{Y}{ac}\int\frac{\eta^2 dw}{T} + \frac{Z}{ab}\int\frac{\eta\zeta\, dw}{T}\right\}$$

$$+ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\left\{\frac{X}{bc}\int\frac{\xi\zeta\, dw}{T} + \frac{Y}{ac}\int\frac{\eta\zeta\, dw}{T} + \frac{Z}{ab}\int\frac{\zeta^2 dw}{T}\right\}\Bigg]$$

Die in 5) vorkommenden Integrale sind nun zu bestimmen. Setzen wir $\xi = a \sin\theta \cos\psi$, $\eta = b \sin\theta \sin\psi$, $\zeta = c \cos\theta$, was der Gleichung des Ellipsoids genügt, so wird

$$dw = \sqrt{a^2b^2 \cos^2\theta + c^2 \sin^2\theta (a^2 \sin^2\psi + b^2 \cos^2\psi)} . \sin\theta \, d\theta \, d\psi$$ [1]

und

$$T = \sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}} =$$

$$= \frac{1}{abc}\sqrt{a^2b^2 \cos^2\theta + c^2 \sin^2\theta (a^2 \sin^2\psi + b^2 \cos^2\psi)},$$

somit

$$\frac{dw}{T} = abc . \sin\theta \, d\theta \, d\psi;$$

in 5) eingesetzt folgt:

$$u' = \frac{1}{4\pi J}\Bigg[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\{aX\int\int \xi^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi + bY \int\int \xi\eta \sin\theta \, d\theta \, d\psi +$$
$$+ cZ\int\int \xi\zeta \sin\theta \, d\theta \, d\psi\}$$

$$+ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\{aX\int\int \xi\eta \sin\theta \, d\theta \, d\psi + bY \int\int \eta^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi +$$
$$+ cZ\int\int \eta\zeta \sin\theta \, d\theta \, d\psi\}$$

$$+ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\{aX\xi\zeta \sin\theta \, d\theta \, d\psi + bY \int\int \eta\zeta \sin\theta \, d\theta \, d\psi +$$
$$+ cZ\int\int \zeta^2 \sin\theta \, d\theta \, d\psi\}\Bigg].$$

[1] Serret, in dem oben genannten Werke, 2. Bd., S. 338.

Die Integrationsgrenzen sind dabei, da die Integrale über die ganze Oberfläche des Ellipsoids zu nehmen sind, für $\theta$ 0 bis $\pi$, für $\psi$ 0 bis $2\pi$. Man findet nach leichter Rechnung

$$\int\int \xi^2 \sin\theta d\theta d\psi = \frac{4\pi}{3} a^2$$

$$\int\int \eta^2 \sin\theta d\theta d\psi = \frac{4\pi}{3} b^2$$

$$\int\int \zeta^2 \sin\theta d\theta d\psi = \frac{4\pi}{3} c^2$$

Der Werth der übrigen Integrale ist, wie die Rechnung lehrt, gleich Null. Es resultirt somit

$$u' = \frac{a^3}{3J} X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{b^3}{3J} Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{c^3}{3J} Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Denken wir uns nun an der Stelle, wo das betrachtete Ellipsoid sich befindet, ein Raumelement $d\tau$ des Dielektricums genommen und nennen $N$ die Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen Ellipsoide, so ist $Nd\tau$ die Anzahl der in dem herausgegriffenen Raumelement enthaltenen. Da wir nun alle diese Ellipsoide als gleich voraussetzen, so wird die Potentialfunction dieses Raumelementes gegeben sein durch

$$U' = \int \left[\frac{a^3}{3J} X \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{b^3}{3J} Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \frac{c^3}{3J} Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] N d\tau,$$

was wir schreiben wollen:

$$U' = \int \left[\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right] d\tau. \qquad 6)$$

Darin ist

$$\alpha = \frac{a^3 N}{3J} X$$

$$\beta = \frac{b^3 N}{3J} Y \qquad 7)$$

$$\gamma = \frac{c^3 N}{3J} Z.$$

$X, Y, Z$ sind die Componenten derjenigen Kraft, durch welche die Ellipsoide polar gemacht worden sind. Da nun diese zum Theil von solcher Elektricität, welche sich ausserhalb des Dielektricums, theilweise jedoch von der Elektricität im Dielektricum selbst herrührt, wird dieselbe nicht an allen Stellen des Dielektricums gleich gross sein. Jedoch können wir annehmen, dass sie innerhalb eines Raumelementes constant ist.

Die Componenten des ersten Theiles der Kraft sind, wenn $V$ die Potentialfunction der nicht im Dielektricum befindlichen Elektricität bedeutet, gegeben durch $-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}$. Die Componenten des zweiten Theiles lassen sich aus der Potentialfunction des Dielektricums bestimmen. Es handelt sich dabei um den Werth, welchen diese Potentialfunction im Punkte $x, y, z$ hat. Wir erhalten sie aus 6), indem wir die Coordinaten des Raumelementes mit $x', y', z'$ bezeichnen. Die Coëfficienten $\alpha, \beta, \gamma$ bleiben dieselben, da wir vorausgesetzt haben, dass die das Dielektricum constituirenden Ellipsoide alle gleich sind. Wir haben daher als Potentialfunction des Dielektricums im Raumelement $d\tau$:

$$U = \int \left( \alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} \right) d\tau. \tag{8}$$

Die Kraftcomponenten für $d\tau$ sind aber nicht ohneweiters durch $-\frac{\partial U}{\partial x}, -\frac{\partial U}{\partial y}, -\frac{\partial U}{\partial z}$ darzustellen. Wenn wir von der Kraft sprechen, welche ein leitendes Körperchen erleidet und durch welche eine Influenz auf das Körperchen ausgeübt wird, so ist darin die von der Influenzelektricität des Körperchens ausgeübte Kraft nicht mit einbegriffen. Es ist daher von der Potentialfunction des Dielektricums noch jener Theil, welcher von der Elektricität des betrachteten Körperchens selbst herrührt, in Abzug zu bringen. Dasselbe gilt für unser Raumelement $d\tau$. Wollen wir die in $d\tau$ von dem übrigen Dielektricum ausgeübte Kraft kennen lernen, so müssen wir die von den in $d\tau$ enthaltenen polarisirten Ellipsoiden herrührende

Kraft subtrahiren. Das können wir dadurch, dass wir uns dieses Raumelement aus dem Dielektricum herausgenommen denken; es entsteht auf diese Weise ein Hohlraum, und die in diesem Hohlraum herrschende Kraft ist die zu bestimmende Kraft.

Da die Körperchen in dem Hohlraume Ellipsoide sind, so wird die von ihnen ausgeübte Kraft nach verschiedenen Richtungen verschieden sein. Wird der Hohlraum passend gewählt, so lässt sich jedoch das Potential der in ihm enthaltenen Ellipsoide leicht bestimmen. Dies findet in dem vorliegenden Falle dann statt, wenn wir $d\tau$ als ein Ellipsoid herausschneiden, welches zu einem der in ihm enthaltenen Ellipsoide homothetisch ist. Wir denken uns also aus dem Dielektricum einen kleinen ellipsoidischen Raum herausgeschnitten und bilden die Potentialfunction des ausserhalb dieses Raumes befindlichen Dielektricums für irgend einen innerhalb dieses Raumes liegenden Punkt $x, y, z$. Indem wir mit $U$ die Potentialfunction des gesammten Dielektricums bezeichnen, möge die Potentialfunction des ausserhalb des herausgeschnittenen Theiles befindlichen Dielektricums mit $U_1$ bezeichnet werden. Dann werden die Componenten der gesuchten Kraft gegeben sein durch $-\frac{\partial U_1}{\partial x}, -\frac{\partial U_1}{\partial y}, -\frac{\partial U_1}{\partial z}$.

Bezeichnen wir nun noch die Potentialfunction der in dem herausgeschnittenen Ellipsoid befindlichen Ellipsoide mit $U_0$, so haben wir

$$U_1 = U - U_0. \tag{9}$$

Die Componenten $-\frac{\partial U_1}{\partial x}, -\frac{\partial U_1}{\partial y}, -\frac{\partial U_1}{\partial z}$ sind also bestimmt, wenn man $U_0$ kennt. $U_0$ ist gegeben durch das Integrale 8), welches über das ganze herausgeschnittene Ellipsoid zu erstrecken ist.

Da für das Raumelement $X, Y, Z$ constant sind, sind auch $\alpha, \beta, \gamma$ für dasselbe constant, und wir haben

$$U_0 = \alpha \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} d\tau + \beta \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} d\tau + \gamma \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} d\tau. \tag{10}$$

Die Gleichung

$$r = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

liefert

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y'} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z'} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Wenn wir diese Werthe in den Ausdruck 10) einführen, so erhalten wir

$$U_0 = -\alpha\int\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau - \beta\int\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,d\tau - \gamma\int\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,d\tau$$

oder

$$U_0 = -\alpha\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{d\tau}{r} - \beta\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{d\tau}{r} - \gamma\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{d\tau}{r}. \qquad 11)$$

$\int\frac{d\tau}{r}$ ist nun das Potential des mit der Dichte 1 erfüllten herausgeschnittenen Ellipsoids auf einen inneren Punkt und dementsprechend $\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{d\tau}{r}$, $\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{d\tau}{r}$, $\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{d\tau}{r}$ die Componenten der Anziehung dieses Ellipsoids auf den betrachteten Punkt[1] parallel zu den Axen.

Bezeichnen wir die Axen des herausgeschnittenen Ellipsoids, welche den Axen eines, also bei der vorausgesetzten Constitution des Dielektricums, aller in ihm enthaltenen Ellipsoide parallel sind, mit $A$, $B$, $C$, ferner mit $x_1, y_1, z_1$ die Coordinaten des betrachteten Punktes $(x, y, z)$ vom Mittelpunkt des Ellipsoides aus gezählt, so haben wir unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die $X$-Kraft nur von den $h_a$-Dichten, die $Y$-Kraft nur von den $h_b$-Dichten, die $Z$-Kraft nur von den $h_c$-Dichten herrührt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{d\tau}{r} &= -\frac{3Mx_1}{A}\int_0^1\frac{u^2du}{(1-\Lambda^2u^2)^{1/2}(1-\Lambda'^2u^2)^{1/2}} \\
\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{d\tau}{r} &= -\frac{3My_1}{B}\int_0^1\frac{u^2du}{(1-\Lambda^2u^2)^{1/2}(1-\Lambda'^2u^2)^{1/2}} \qquad 12) \\
\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{d\tau}{r} &= -\frac{3Mz_1}{C}\int_0^1\frac{u^2du}{(1-\Lambda^2u^2)^{1/2}(1-\Lambda'^2u^2)^{1/2}}
\end{aligned}$$

[1] Mathieu, in dem oben genannten Werke, S. 121, §. 8.

Da das herausgeschnittene Ellipsoid homothetisch ist mit einem der in ihm enthaltenen, ist $\Lambda^2 = \lambda^2$, $\Lambda'^2 = \lambda'^2$, also das in 12) auftretende Integral gleich dem früheren $J$. Ferner ist die Dichte gleich 1, die Masse des herausgeschnittenen Ellipsoids also gleich seinem Volum. Nun ist aber zufolge der Homotheticität

$$\frac{4ABC\pi}{3A^3} = \frac{4bc\pi}{3a^2}, \quad \frac{4ABC\pi}{3B^3} = \frac{4ac\pi}{3b^2}, \quad \frac{4ABC\pi}{3C^3} = \frac{4ab\pi}{3c^2},$$

somit:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{d\tau}{r} = -4\pi J\frac{bc}{a^2}\cdot x_1$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{d\tau}{r} = -4\pi J\frac{ac}{b^2}\cdot y_1$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{d\tau}{r} = -4\pi J\frac{ab}{c^2}\cdot z_1$$

Bezeichnen wir noch die Coordinaten des Mittelpunktes des herausgeschnittenen Ellipsoids mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, so wird, da $x, y, z$ die Coordinaten des betrachteten Punktes waren,

$$x_1 = x-\mathfrak{x}, \quad y_1 = y-\mathfrak{y}, \quad z_1 = z-\mathfrak{z}$$

zu setzen sein. Wir erhalten dann

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{d\tau}{r} = -4\pi J\frac{bc}{a^2}(x-\mathfrak{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{d\tau}{r} = -4\pi J\frac{ac}{b^2}(y-\mathfrak{y})$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{d\tau}{r} = -4\pi J\frac{ab}{c^2}(z-\mathfrak{z}).$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen bestimmt sich der Werth $U_0$ zu

$$U_0 = 4\pi J\left[\frac{bc}{a^2}\alpha(x-\mathfrak{x}) + \frac{ac}{b^2}\beta(y-\mathfrak{y}) + \frac{ab}{c^2}\gamma(z-\mathfrak{z})\right] \qquad 13)$$

und

$$U_1 = U-4\pi J\left[\frac{bc}{a^2}\alpha(x-\mathfrak{x}) + \frac{ac}{b^2}\beta(y-\mathfrak{y}) + \frac{ab}{c^2}\gamma(z-\mathfrak{z})\right] \qquad 14)$$

Die Axen des herausgeschnittenen Ellipsoids kommen in dieser Formel nicht vor, es ist daher nicht nöthig, ihre Werthe zu kennen. Aus 14) erhalten wir unmittelbar

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial x} - 4\pi J \frac{bc}{a^2}\cdot\alpha \\ \frac{\partial U_1}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} - 4\pi J \frac{ac}{b^2}\cdot\beta \\ \frac{\partial U_1}{\partial z} &= \frac{\partial U}{\partial z} - 4\pi J \frac{ab}{c^2}\cdot\gamma.\end{aligned} \tag{15}$$

Diese Gleichungen setzen uns endlich in Stand, die $\alpha, \beta, \gamma$ zu bestimmen. Die Componenten der ganzen auf die leitenden Körperchen in dem gewählten Raumelement wirkenden Kraft sind nach dem oben Gesagten:

$$\begin{aligned}X &= -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial x} \\ Y &= -\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U_1}{\partial y} \\ Z &= -\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial U_1}{\partial z},\end{aligned} \tag{16}$$

also mit Rücksicht auf 15):

$$\begin{aligned}X &= -\frac{\partial (V+U)}{\partial x} + 4\pi J \frac{bc}{a^2}\alpha \\ Y &= -\frac{\partial (V+U)}{\partial y} + 4\pi J \frac{ac}{b^2}\beta \\ Z &= -\frac{\partial (V+U)}{\partial z} + 4\pi J \frac{ab}{c^2}\gamma\end{aligned} \tag{17}$$

Nun ist nach 7)

$$\begin{aligned}X &= \frac{3J}{a^3N}\alpha \\ Y &= \frac{3J}{b^3N}\beta \\ Z &= \frac{3J}{c^3N}\gamma.\end{aligned}$$

Diese Werthe liefern in Verbindung mit 17):

$$\alpha = -\frac{1}{\frac{3J}{a^3N} - 4\pi J \frac{bc}{a^2}} \, \frac{\partial(V+U)}{\partial x}$$

$$\beta = -\frac{1}{\frac{3J}{b^3N} - 4\pi J \frac{ac}{b^2}} \cdot \frac{\partial(V+U)}{\partial y}$$

$$\gamma = -\frac{1}{\frac{3J}{c^3N} - 4\pi J \frac{ab}{c^2}} \, \frac{\partial(V+U)}{\partial z}.$$

Eine einfache Umformung führt im Nenner aller dieser Grössen gleichen Werth herbei. Er wird dadurch $1 - \frac{4abc\pi}{3} N$. Nun ist $\frac{4abc\pi}{3}$ das Volum eines Ellipsoids, $N$ die Anzahl derselben in der Volumseinheit, $\frac{4abc\pi}{3} N$ also nichts Anderes als die Raumerfüllung des Dielektricums. Bezeichnen wir diese Grösse mit $g$, so wird

$$\alpha = -\frac{\frac{a^3N}{3J}}{1-g} \cdot \frac{\partial(V+U)}{\partial x}$$

$$\beta = -\frac{\frac{b^3N}{3J}}{1-g} \, \frac{\partial(V+U)}{\partial y}$$

$$\gamma = -\frac{\frac{c^3N}{3J}}{1-g} \, \frac{\partial(V+U)}{\partial z}.$$

Setzen wir noch der Kürze wegen

$$\frac{a^3N}{3J(1-g)} = E_1, \quad \frac{b^3N}{3J(1-g)} = E_2, \quad \frac{c^3N}{3J(1-g)} = E_3, \qquad 18)$$

so können wir schreiben:

$$\alpha = -E_1 \frac{\partial(V+U)}{\partial x}, \quad \beta = -E_2 \frac{\partial(V+U)}{\partial y}, \quad \gamma = -E_3 \frac{\partial(U+V)}{\partial z}$$

und erhalten endlich, wenn wir diese Werthe in 6) einsetzen:

$$U' = -\int E_1 \frac{\partial (V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau - \int E_2 \frac{\partial (V+U)}{\partial y} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} d\tau -$$

$$- \int E_3 \frac{\partial (V+U)}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} d\tau. \qquad 19)$$

Dieses ist die zur Bestimmung der Potentialfunction unseres Dielektricums dienende Gleichung. Der Werth der Constanten $E_1$, $E_2$, $E_3$ ist in unserem Fall von einander verschieden; er hängt nicht nur von der Raumerfüllung, sondern auch von den Axen der Ellipsoide ab. Da wir jedoch alle Ellipsoide als gleich gross und gleichmässig vertheilt angenommen haben, werden sie für alle Theile des Dielektricums gleichen Werth haben.

Es ist nun noch die Aufgabe zu lösen, ihre Beziehung zu jenen Grössen abzuleiten, welche wir als die Dielektricitätsconstanten des Dielektricums bezeichnen. Zu diesem Zweck soll im Folgenden der Fall eines Plattencondensators behandelt werden.

## III.

Wir formen die Gleichung 19) zunächst um, indem wir setzen

$$E_1 \frac{\partial (V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[ E_1 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right] - (V+U) \frac{\partial}{\partial x} \left( E_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) \qquad 20)$$

und in ebensolcher Weise die Ausdrücke unter den beiden andern Integralen transformiren.

Die Gleichung 20) muss mit $d\tau = dx\,dy\,dz$ multiplicirt und über den ganzen von dem Dielektricum ausgefüllten Raum integrirt werden. Wir erhalten

$$\int E_1 \frac{\partial (V+U)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\tau = \iiint \frac{\partial}{\partial x}\left[E_1 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] dx\,dy\,dz - \\ - \iiint (V+U) \frac{\partial}{\partial x}\left(E_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz. \qquad 21)$$

Bei dem ersten rechts stehenden Integral lässt sich die Integration nach $x$ ausführen. Man erhält

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}\left[E_1 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] dx\,dy\,dz = \\ = \iint \left\{ \left[E_1 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right]_2 - \left[E_1 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right]_1 \right\} dx\,dy\,dz, \qquad 22)$$

worin die Indices 1 und 2 andeuten sollen, dass in dem in der Klammer stehenden Ausdruck die Werthe zu nehmen sind, welche an den Stellen stattfinden, wo eine der $X$-Axe parallele Gerade, deren andere Coordinaten $y$ und  sind, die Oberfläche des Dielektricums schneidet. Der Fall, dass diese Gerade die Oberfläche an mehreren Stellen schneidet, tritt bei einem Plattencondensator nicht ein, ist also für uns belanglos.

Wir bezeichnen nun das Flächenelement an der durch den Index 1 angedeuteten Stelle, welches ein längs der Geraden gedachtes unendlich dünnes Prisma mit dem Querschnitte $dy\,dz$ aus der Oberfläche des Dielektricums herausschneidet, mit $dw_1$. Man hat dann

$$dy\,dz = \cos\lambda \,.\, dw_1,$$

worin $\lambda$ den Winkel bedeutet, welchen die auf $dw_1$ nach Innen errichtete Normale mit der $X$-Axe einschliesst. Bezeichnen wir noch die Normale mit $n_1$, so haben wir weiter

$$\cos\lambda = \frac{\partial x}{\partial n_1},$$

woraus wir erhalten

$$dy\,dz = \frac{\partial x}{\partial n_1} dw_1.$$

Für die durch den Index 2 bezeichnete Stelle, an welcher die positive $X$-Richtung von der Fläche nicht nach Innen, sondern nach Aussen geht, lautet die entsprechende Gleichung

$$dy\,dz = -\frac{\partial x}{\partial n_2}\,dw_2.$$

Setzen wir diese Werthe in Gleichung 22) ein, so geht sie über in folgende

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}\left[E_1(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right] dx\,dy\,dz =$$

$$= -\int \left[E_1(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right]\frac{\partial x}{\partial n}\,dw, \qquad 23)$$

worin an der rechten Seite die Integration über die ganze Oberfläche des Dielektricums auszudehnen ist.

In 21) eingetragen folgt:

$$\int E_1 \frac{\partial(V+U)}{\partial x}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\,d\tau = -\int \left[E_1(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right]\frac{\partial x}{\partial n}\,dw -$$

$$-\iiint (V+U)\frac{\partial}{\partial x}\left(E_1\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz$$

und analog

$$\int E_2 \frac{\partial(V+U)}{\partial y}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\,d\tau = -\int \left[E_2(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial n}\,dw -$$

$$-\iiint (V+U)\frac{\partial}{\partial y}\left(E_2\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz$$

$$\int E_3 \frac{\partial(V+U)}{\partial z}\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,d\tau = -\int \left[E_3(V+U)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right]\frac{\partial z}{\partial n}\,dw -$$

$$-\iiint (V+U)\frac{\partial}{\partial z}\left(E_3\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

Hieraus ergibt sich endlich

$$U' = \int \left[ E_1 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + E_2 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \right.$$
$$\left. + E_3 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right] dw$$
$$+ \iiint (V+U) \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( E_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( E_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z} \left( E_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) \right] dx\, dy\, dz. \qquad 24)$$

Das zweite Integral lässt sich noch weiter vereinfachen, da wir voraussetzen, dass $E_1$, $E_2$, $E_3$ innerhalb des ganzen Dielektricums denselben Werth haben. Es ist dann:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( E_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \right) = E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( E_2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \right) = E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial z} \left( E_3 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) = E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2},$$

somit:

$$U' = \int \left[ E_1 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + E_2 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} + \right.$$
$$\left. + E_3 (V+U) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial n} \right] dw$$
$$+ \iiint (V+U) \left( E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\, dy\, dz. \qquad 25)$$

Diese Gleichung kann zur Untersuchung eines Plattencondensators benützt werden. Wir nehmen an, dass wir aus unserem Dielektricum drei kreisförmige Platten von gleichem Radius $\rho$ und gleicher Dicke $d$ herausgeschnitten haben. Jedoch soll in der ersten Platte die Normale auf die Kreisflächen, welche parallel ist zur Distanz $d$, parallel sein der $a$-Axe, in der zweiten der $b$-Axe, in der dritten der $c$-Axe der Ellipsoide. Diese Platten sollen der Reihe nach in denselben Condensator gestellt werden, dessen Platten kreisförmig vom Radius $\rho$, deren Distanz in gleicher Weise $d$ sein soll, so dass sie also den Kreisflächen der dielektrischen Platten unmittelbar anliegen sollen. Bezeichnen wir noch die bezüglichen Werthe von $(V+U)$ mit $(V+U)_a$, $(V+U)_b$, $(V+U)_c$, so erhalten wir aus 25) für die erste Platte, für welche $\frac{\partial y}{\partial n} = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial n} = 0$:

$$U'_a = E_1 \int (V+U)_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw +$$

$$+ \iiint (V+U)_a \left( E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\, dy\, dz. \quad 26)$$

Da wir das Coordinatensystem stets so legen, dass die $X$-Axe $\parallel a$, die $Y$-Axe $\parallel b$, die $Z$-Axe $\parallel c$, so ist für die zweite Platte $\frac{\partial x}{\partial n} = 0$ und $\frac{\partial z}{\partial n} = 0$, also

$$U'_b = E_2 \int (V+U)_b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw +$$

$$+ \iiint (V+U)_b \left( E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\, dy\, dz \quad 27)$$

und analog für die dritte $\frac{\partial x}{\partial n} = 0$ und $\frac{\partial y}{\partial n} = 0$, also

$$U'_c = E_3 \int (V+U)_c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw +$$

$$+ \iiint (V+U)_c \left( E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\, dy\, dz. \quad 28)$$

Die Integrationsgrenzen sind für das erste rechts stehende Integral in allen drei Gleichungen dieselben. Dagegen für das zweite Integral, da wir den Coordinatenanfangspunkt in den

Mittelpunkt der dielektrischen Platte anliegenden Seite der einen, sagen wir etwa der linken, Condensatorplatte verlegen:

in 26): für $x$: $0$ bis $d$
$y$: $-\rho$ $+\rho$
$z$: $-\rho$ $+\rho$;

in 27): für $x$: $-\rho$ bis $+\rho$
$y$: $0$ $d$
$-\rho$ $+\rho$;

in 28): für $x$: $-\rho$ bis $+\rho$
$y$: $-\rho$ $+\rho$
$0$ $d$.

Wir wollen diese Integrationsgrenzen kurzweg dadurch bezeichnen, dass wir die dreifachen Integrale mit den Indices $a$, $b$, $c$ versehen. Betrachten wir zunächst diese dreifachen Integrale. Herrscht auf der linken Condensatorplatte das Potential $P$, auf der rechten das Potential $P'$, so wird, da das Feld zwischen den Platten homogen ist, das Potential $V+U$ an einer von der linken Platte um die Distanz $u$ entfernten Stelle den Werth $P+\frac{P'-P}{d}u$ haben. Wir haben daher zu setzen:

$$(V+U)_a = P_a+\frac{P'_a-P_a}{d}x, \quad (V+U)_b = P_b+\frac{P'_b-P_b}{d}y,$$
$$(V+U)_c = P_c+\frac{P'_c-P_c}{d}z$$

und erhalten:

$$\iiint (V+U)_a \left(E_1\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}+E_2\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}+E_3\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz =$$
$$P_a\left[-(E_1+E_2+E_3)\iiint_a \frac{dx\,dy\,dz}{r^3}+3E_1\iiint_a \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{r^5}+\right.$$
$$\left.+3E_2\iiint_a \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{r^5}+3E_3\iiint_a \frac{z^2 dx\,dy\,dz}{r^5}\right]+$$
$$\frac{P'_a-P_a}{d}\left[-(E_1+E_2+E_3)\iiint_a \frac{x\,dx\,dy\,dz}{r^3}+3E_1\iiint_a \frac{x^3 dx\,dy\,dz}{r^5}+\right.$$
$$\left.+3E_2\iiint_a \frac{xy^2\,dx\,dy\,dz}{r^5}+3E^3\iiint_a \frac{xz^2\,dx\,dy\,dz}{r^5}\right] \qquad 29)$$

$$\iiint (V+U)_b \left( E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz =$$

$$P_b \left[ -(E_1+E_2+E_3) \iiint_b \frac{dx\,dy\,dz}{r^3} + 3E_1 \iiint_b \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{r^5} + \right.$$

$$\left. + 3E_2 \iiint_b \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{r^5} + 3E_3 \iiint_b \frac{z^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} \right] +$$

$$\frac{P'_b - P_b}{d} \left[ -(E_1+E_2+E_3) \iiint_b \frac{y\,dx\,dy\,dz}{r^3} + \right.$$

$$+ 3E_1 \iiint_b \frac{yx^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} + 3E_2 \iiint_b \frac{y^3 dx\,dy\,dz}{r^5} +$$

$$\left. + 3E_3 \iiint_b \frac{yz^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} \right] \qquad 30)$$

$$\iiint (V+U)_c \left( E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz =$$

$$P_c \left[ -(E_1+E_2+E_3) \iiint_c \frac{dx\,dy\,dz}{r^3} + 3E_1 \iiint_c \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{r^5} + \right.$$

$$\left. + 3E_2 \iiint_c \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{r^5} + 3E_3 \iiint_c \frac{z^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} \right] +$$

$$\frac{P'_c - P_c}{d} \left[ -(E_1+E_2+E_3) \iiint_c \frac{z\,dx\,dy\,dz}{r^3} + \right.$$

$$+ 3E_1 \iiint_c \frac{zx^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} + 3E_2 \iiint_c \frac{zy^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} +$$

$$\left. + 3E_3 \iiint_c \frac{z^3 dx\,dy\,dz}{r^5} \right] \qquad 31)$$

Da $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$, sieht man bei den gegebenen Grenzen folgende Beziehungen unmittelbar ein, welche wir durch Einführung eines gleichen Buchstabens andeuten wollen:

$$\iiint_a \frac{dx\,dy\,dz}{r^3} = \iiint_b \frac{dx\,dy\,dz}{r^3} = \iiint_c \frac{dx\,dy\,dz}{r^3} = \mathfrak{A}$$

$$\iiint_a \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_b \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_c \frac{z^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \mathfrak{B}$$

$$\iiint_a \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_a \frac{z^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_b \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{r^5} =$$

$$= \iiint_b \frac{z^2\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_c \frac{x^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_c \frac{y^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \mathfrak{C}$$

$$\iiint_a \frac{x\,dx\,dy\,dz}{r^3} = \iiint_b \frac{y\,dx\,dy\,dz}{r^3} = \iiint_c \frac{z\,dx\,dy\,dz}{r^3} = \mathfrak{M}$$

$$\iiint_a \frac{x^3 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_b \frac{y^3 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_c \frac{z^3\,dx\,dy\,dz}{r^5} = \mathfrak{N}$$

$$\iiint_a \frac{xy^2 dx\,dy\,dz}{r^1} = \iiint_a \frac{xz^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_b \frac{yx^2 dx\,dy\,dz}{r^5} =$$

$$= \iiint_b \frac{yz^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_c \frac{zx^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \iiint_c \frac{zy^2 dx\,dy\,dz}{r^5} = \mathfrak{P}.$$

Wir können die Gleichungen 29)—31) hiemit kürzer schreiben:

$$\iiint (V+U)_a \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$P_a[-(E_1+E_2+E_3)\mathfrak{A} + 3E_1\mathfrak{B} + 3(E_2+E_3)\mathfrak{C}] +$$

$$+ \frac{P'_a - P_a}{d}[-(E_1+E_2+E_3)\mathfrak{M} + 3E_1\mathfrak{N} + 3(E_2+E_3)\mathfrak{P}] \qquad 32)$$

$$\iiint (V+U)_b \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$P_b[-(E_1+E_2+E_3)\mathfrak{A} + 3E_2\mathfrak{B} + 3(E_1+E_3)\mathfrak{C}] +$$

$$+ \frac{P'_b - P_b}{d}[-(E_1+E_2+E_3)\mathfrak{M} + 3E_2\mathfrak{N} + 3(E_1+E_3)\mathfrak{P}] \qquad 33)$$

$$\iiint (V+U)_c \left(E_1 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + E_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + E_3 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$P_c[-(E_1+E_2+E_3)\mathfrak{A} + 3E_3\mathfrak{B} + 3(E_1+E_2)\mathfrak{C}] +$$

$$+ \frac{P'_c - P_c}{d}[-(E_1+E_2+E_3)\mathfrak{M} + 3E_3\mathfrak{N} + 3(E_1+E_2)\mathfrak{P}]. \qquad 34)$$

Die Integrale $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ wären nun zu bestimmen. Vor Allem bemerken wir, dass der Punkt, für welchen die Potentialfunction des Dielektricums gesucht wird, sich ausserhalb des Dielektricums befindet. $r$ kann also nie gleich Null werden und daher gilt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z} = 0,$$

aus welcher folgt:

$$\iiint_a \left( \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz = -\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + 2\,\mathfrak{C} = 0$$

$$\iiint_a x \left( \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) dx\,dy\,dz = -\mathfrak{M} + \mathfrak{N} + 2\,\mathfrak{P} = 0.$$

Wir haben also die Relationen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{B} + 2\,\mathfrak{C} \\ \mathfrak{M} &= \mathfrak{N} + 2\,\mathfrak{P} \end{aligned} \qquad 35)$$

welche uns die Berechnung von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{P}$ ersparen. Die Bestimmung von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ wollen wir jedoch noch verschieben. Der Kürze wegen schreiben wir die rechten Seiten der Gleichungen 32)—34):

$$\begin{aligned} & P_a \,.\, M_a + \frac{P'_a - P_a}{d} N_a \\ & P_b \,.\, M_b + \frac{P'_b - P_b}{d} N_b \\ & P_c \,.\, M_c + \frac{P'_c - P_c}{d} N_c \end{aligned} \qquad 36)$$

und damit gehen die Gleichungen 26)—28) über in:

$$U'_a = E_1 \int (V+U)_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw + P_a M_a + \frac{P'_a - P_a}{d} N_a \qquad 37)$$

$$U'_b = E_2 \int (V+U)_b \frac{\partial \frac{1}{r}}{dn} dw + P_b M_b + \frac{P'_b - P_b}{d} N_b \qquad 38)$$

$$U'_c = E_3 \int (V+U)_c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw + P_c M_c + \frac{P'_c - P_c}{d} N_c. \qquad 39)$$

Wir können uns nun bei der weiteren Berechnung dieser Ausdrücke auf Gleichung 37) beschränken, da die beiden andern ganz analog gebaut sind. Es ist in 37) nun noch das Integrale

$$E_1 \int (V+U)_a \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw$$

zu bestimmen.

Da die Bestimmung dieses Integrals von Clausius durchgeführt worden ist, ist es überflüssig, sie hier zu wiederholen. Der Werth $U'_a$ wird auf den beiden Platten des Condensators verschiedene, aber von der Randwirkung abgesehen, constante Werthe haben. Man kann daher $U'_a$ einfach für die Mitte der Condensatorplatten bestimmen. Man erhält dann (Clausius, am angegebenen Orte, S. 85, Gleichung 34):

$$U'_a = 2\pi E_1 (P'_a - P_a)\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{d}{\rho}\right) + M_a P_a + (P'_a - P_a)\frac{N_a}{d} \qquad 40)$$

Da wir die Potentialfunctionen $V_a$ und $U_a$ nur in den Mittelpunkten der beiden Condensatorplatten zu betrachten haben, so wollen wir die Werthe, welche sie auf der linken Platte haben, einfach mit $V_a$ und $U_a$, diejenigen, welche sie auf der rechten Platte haben, mit $V'_a$ und $U'_a$ bezeichnen. Dann ist zu setzen

$$\begin{aligned} P_a &= V_a + U_a \\ P'_a &= V'_a + U'_a. \end{aligned} \qquad 41)$$

Da ferner der Punkt, für welchen $U'_a$ (Gleichung 40) bestimmt worden ist, der Mittelpunkt der linken Platte war, ist $U'_a$ in dieser Gleichung gleich $U_a$ zu setzen, und wir haben zunächst:

$$U_a = 2\pi E_1 (P'_a - P_a)\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{d}{\rho}\right) + M_a P_a + (P'_a - P_a)\,\frac{N_a}{d}. \quad 42)$$

Um die entsprechende Gleichung für den Mittelpunkt der rechten Platte zu bilden, haben wir an Stelle von $U_a$ zu schreiben $U'_a$ und $P'_a$ und $P_a$ zu vertauschen; sie lautet sonach

$$U'_a = 2\pi E_1 (P_a - P'_a)\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{d}{\rho}\right) + M_a P'_a + (P_a - P'_a)\,\frac{N_a}{d}. \quad 43)$$

Subtrahirt man die Gleichung 43) von 42), so folgt

$$U_a - U'_a = -\left[4\pi E_1\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{d}{\rho}\right) - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)\right](P_a - P'_a),$$

und wenn man hierin die Werthe von $P_a$ und $P'_a$ gemäss Gleichung 41) einsetzt:

$$U_a - U'_a =$$
$$= -\left[4\pi E_1\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{d}{\rho}\right) - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)\right](V_a + U_a - V'_a - U'_a);$$

wir erhalten daher

$$U_a - U'_a = -\frac{4\pi E_1\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{d}{\rho}\right) - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)}{1 + 4\pi E_1\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{d}{\rho}\right) - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)}(V_a - V'_a).$$

Vernachlässigen wir nun noch die Grösse $\frac{d}{\rho}$ (siehe Clausius, am angegebenen Orte S. 86), so kommt

$$U_a - U'_a = -\frac{4\pi E_1 - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)}{1 + 4\pi E_1 - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)}(V_a - V'_a) \quad 44)$$

Dies ist die gesuchte, zur Bestimmung der Potentialdifferenz $U_a - U'_a$ dienende Gleichung. Aus derselben ergibt sich unmittelbar diejenige Gleichung, welche die ganze wirklich stattfindende Potentialdifferenz der beiden Condensatorplatten bestimmt. Die gesammte Potentialfunction aller getrennten Elektricitäten, sowohl jener auf den Platten, als auch jener im

Dielektricum, ist für die linke Platte $P_a = V_a + U_a$, für die rechte Platte $P'_a = V'_a + U'_a$, die zwischen den Platten stattfindende Potentialdifferenz somit $P_a - P'_a = V_a + U_a - V'_a - U'_a$. Wir erhalten sie aus Gleichung 44), wenn wir beiderseits $V_a - V'_a$ addiren. Es folgt:

$$P_a - P'_a = \frac{1}{1 + 4\pi E_1 - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right)} (V_a - V'_a). \tag{45}$$

Diese Gleichung besagt, dass die ursprüngliche Potentialdifferenz $V_a - V'_a$ des Condensators durch das Einschieben der dielektrischen Platte auf den Betrag $P_a - P'_a$ sich geändert hat. Ist $Q$ die Elektricitätsmenge auf der linken Platte des Condensators, so gilt für den leeren Condensator die Gleichung

$$Q = \frac{f}{4\pi} \frac{V_a - V'_a}{d},$$

wenn $f$ die Fläche der Platten bedeutet. Ist er dagegen mit einem Dielektricum, etwa unserer dielektrischen Platte, deren Dielektricitätsconstante wir mit $D_a$ bezeichnen, ausgefüllt, so herrscht nunmehr die Potentialdifferenz $P_a - P'_a$ und es gilt die Beziehung:

$$Q = \frac{f}{4\pi} \frac{P_a - P'_a}{d} D_a.$$

Aus diesen Werthen von $Q$ folgt:

$$P_a - P'_a = \frac{1}{D_a} (V_a - V'_a). \tag{46}$$

Der Vergleich von 45) und 46) liefert uns die Relation

$$D_a = 1 + 4\pi E_1 - \left(M_a - \frac{2N_a}{d}\right). \tag{47}$$

Bezeichnen wir mit $D_b$ und $D_c$ die Dielektricitätsconstanten der beiden anderen Platten, in welchen die $b$, respective die $c$-Axe der Ellipsoide senkrecht zu den Kreisflächen stehen, so folgt durch Analogie

$$D_b = 1+4\pi E_2 - \left(M_b - \frac{2N_b}{d}\right)$$
$$D_c = 1+4\pi E_3 - \left(M_c - \frac{2N_c}{d}\right) \qquad 48)$$

Die Gleichungen 47) und 48) bestimmen die Beziehungen zwischen den Constanten $E_1$, $E_2$, $E_3$ und den Dielektricitätsconstanten $D_a$, $D_b$, $D_c$ der Substanz.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen 32) und 36) nimmt die Gleichung 47) folgende Gestalt an:

$$E_1\left[4\pi + \left(\mathfrak{A} - \frac{2\mathfrak{M}}{d}\right) - 3\left(\mathfrak{B} - \frac{2\mathfrak{N}}{d}\right)\right]$$
$$+E_2\left[\left(\mathfrak{A} - \frac{2\mathfrak{M}}{d}\right) - 3\left(\mathfrak{C} - \frac{2\mathfrak{P}}{d}\right)\right]$$
$$+E_3\left[\left(\mathfrak{A} - \frac{2\mathfrak{M}}{d}\right) - 3\left(\mathfrak{C} - \frac{2\mathfrak{P}}{d}\right)\right] = D_a - 1. \qquad 49)$$

Der Kürze wegen setzen wir

$$\mathfrak{A} - \frac{2\mathfrak{M}}{d} = \alpha$$
$$\mathfrak{B} - \frac{2\mathfrak{N}}{d} = \beta$$
$$\mathfrak{C} - \frac{2\mathfrak{P}}{d} = \gamma.$$

Dann nehmen die Gleichung 49) und die entsprechenden aus 48) abzuleitenden Gleichungen die Gestalt an:

$$4\pi E_1 + E_1(\alpha - 3\beta) + E_2(\alpha - 3\gamma) + E_3(\alpha - 3\gamma) = D_a - 1$$
$$4\pi E_1 + E_1(\alpha - 3\gamma) + E_2(\alpha - 3\beta) + E_3(\alpha - 3\gamma) = D_b - 1 \qquad 50)$$
$$4\pi E_3 + E_1(\alpha - 3\gamma) + E_2(\alpha - 3\gamma) + E_3(\alpha - 3\beta) = D_c - 1$$

Addiren wir diese drei Gleichungen, so folgt:

$$4\pi(E_1+E_2+E_3) + 3(\alpha - \beta - 2\gamma)(E_1+E_2+E_3) = D_a + D_b + D_c - 3.$$

Lassen wir die Ellipsoide in Kugeln übergehen, so wird $E_1 = E_2 = E_3 = E$ und $D_a = D_b = D_c = D$, während sich die Werthe von $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ nicht ändern. Die Gleichung lautet dann

$$4\pi E + 3(\alpha - \beta - 2\gamma)E = D - 1.$$

Clausius findet für Kugeln (am angegebenen Orte, S. 93, Gleichung 53):

$$4\pi E = D-1,$$

woraus sich ergibt:

$$\alpha-\beta-2\gamma = 0. \tag{51}$$

Setzen wir die ursprünglichen Werthe ein, so folgt:

$$[\mathfrak{A}-(\mathfrak{B}+2\mathfrak{C})]-\frac{2}{d}[\mathfrak{M}-(\mathfrak{N}+2\mathfrak{P})] = 0,$$

welche Beziehung durch die in 35) gegebenen Relationen erfüllt ist. Dieselbe Relation würde sich übrigens aus jeder der Gleichungen 50) ergeben, wenn $E_1 = E_2 = E_3 = E$ gesetzt wird.

Die Gleichungen 50) dienen zur Bestimmung von $E_1, E_2, E_3$. Setzen wir der Kürze wegen noch

$$4\pi+(\alpha-3\beta) = \lambda,$$
$$\alpha-3\gamma = \mu,$$

so findet man leicht

$$E_1 = \frac{(D_a-1)(\lambda^2-\mu^2)+(D_b-1)(\mu^2-\mu\lambda)+(D_c-1)(\mu^2-\mu\lambda)}{\lambda^3+2\mu^3-3\mu^2\lambda} \tag{52}$$

und ähnliche Werthe für $E_2$ und $E_3$.

Diese Gleichung ergibt für $D_a = D_b = D_c = D$ und $E_1 = E$:

$$E = \frac{(D-1)(\lambda^2+\mu^2-2\mu\lambda)}{\lambda^3+2\mu^3-3\mu^2\lambda}$$

und dies muss nach dem oben Gesagten gleich sein $\frac{D-1}{4\pi}$.

Es muss also $\frac{\lambda^3+2\mu^3-3\mu^2\lambda}{\lambda^2+\mu^2-2\mu\lambda} = \lambda+2\mu = 4\pi$ sein, d. h. mit Rücksicht auf die Werthe von $\lambda$ und $\mu$:

$$4\pi+3\alpha-3\beta-6\gamma = 4\pi$$

und

$$\alpha-\beta-2\gamma = 0,$$

dieselbe Relation, welche wir schon verificirt haben.

Unsere Formeln befinden sich also mit den Formeln von Clausius in voller Übereinstimmung.

Es handelt sich jedoch noch darum, $E_1, E_2, E_3$ wirklich zu bestimmen, und zu diesem Zwecke ist es vor Allem nöthig, den Werth der Coëfficienten $\alpha-3\beta$ und $\alpha-3\gamma$ in den Gleichungen 50) zu kennen. Es ist

$$\alpha-3\beta = (\mathfrak{A}-3\mathfrak{B})-\frac{2}{d}(\mathfrak{M}-3\mathfrak{N}).$$

Es war $\mathfrak{A} = \iiint_a \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. Man findet zunächst

$$\iint_{-\rho}^{+\rho} \frac{dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{4}{x}\,\text{arc tg}\,\frac{\rho^2}{x\sqrt{x^2+2\rho^2}};$$

da wir $\frac{d}{\rho}$ vernachlässigt haben, können wir $\frac{x}{\rho}$ ebenfalls vernachlässigen, wodurch dieser Ausdruck in $\frac{4}{x}\,\text{arc tg}\,\frac{\rho}{x\sqrt{2}}$ übergeht. Es wird hiedurch

$$\mathfrak{A} = 4\int_0^d \frac{dx}{x}\,\text{arc tg}\,\frac{\rho}{x\sqrt{2}}.$$

Was den Werth von $\mathfrak{B}$ betrifft, so kann man zunächst schreiben:

$$\mathfrak{B} = \iiint_a \frac{x^2\,dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \int_0^d x\,dx \iint_{-\rho}^{+\rho} \frac{x\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} =$$
$$= \int_0^d x\,dx\,.-\frac{1}{3}\,\frac{\partial}{\partial x}\iint_{-\rho}^{+\rho} \frac{dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\iint_{-\rho}^{+\rho} \frac{dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = 4\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\,\text{arc tg}\,\frac{\rho}{x\sqrt{2}}\right) =$$
$$= -\frac{4}{x^2}\,\text{arc tg}\,\frac{\rho}{x\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{x\rho},$$

wenn wir wieder $\frac{x}{\rho}$ vernachlässigen. Es ergibt sich daher

$$\mathfrak{B} = \frac{4}{3}\int_0^d \frac{dx}{x}\,\text{arc tg}\,\frac{\rho}{x\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}}{3}\,\frac{d}{\rho} = \frac{1}{3}\,\mathfrak{A},$$

somit $\mathfrak{A}-3\mathfrak{B} = 0$.

In gleicher Weise findet man

$$\mathfrak{M} = 4\int_0^d dx \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{x\sqrt{2}}$$

und

$$\mathfrak{N} = \frac{4}{3}\int_0^d dx \operatorname{arc\,tg} \frac{\rho}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\mathfrak{M},$$

somit $\mathfrak{M} - 3\mathfrak{N} = 0$, also endlich $\alpha - 3\beta = 0$.

Nun war (Gleichung 51)

$$\alpha - \beta - 2\gamma = 0,$$

was wir auch schreiben können

$$3\alpha - 3\beta - 6\gamma = \alpha - 3\beta + 2(\alpha - 3\gamma) = 0.$$

Da $\alpha - 3\beta = 0$, folgt hieraus auch $\alpha - 3\gamma = 0$. Die Gleichungen 50) nehmen also die einfache Gestalt an:

$$\begin{aligned} 1 + 4\pi E_1 &= D_a \\ 1 + 4\pi E_2 &= D_b \\ 1 + 4\pi E_3 &= D_c, \end{aligned} \tag{53}$$

woraus mit Berücksichtigung der Werthe von $E_1$, $E_2$, $E_3$ (Gleichung 18):

$$\begin{aligned} D_a &= 1 + \frac{4\pi a^3 N}{3J(1-g)} & \qquad & \frac{a^3 N}{3J(1-g)} = \frac{D_a - 1}{4\pi} \\ D_b &= 1 + \frac{4\pi b^3 N}{3J(1-g)} & \text{oder} \qquad & \frac{b^3 N}{3J(1-g)} = \frac{D_b - 1}{4\pi} \\ D_c &= 1 + \frac{4\pi c^3 N}{3J(1-g)} & \qquad & \frac{c^3 N}{3J(1-g)} = \frac{D_c - 1}{4\pi} \end{aligned} \tag{54}$$

Durch diese Gleichungen ist zunächst das Verhältniss der Axen der Ellipsoide bestimmt:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \sqrt[3]{\frac{D_a - 1}{D_c - 1}} = \rho \\ \frac{b}{c} &= \sqrt[3]{\frac{D_b - 1}{D_c - 1}} = \sigma; \end{aligned} \tag{55}$$

ferner liefern sie einen Ausdruck für die Raumerfüllung, wenn wir sie mit einander multipliciren und berücksichtigen, dass $\frac{4\pi abc}{3} N = g$ ist:

$$\frac{g}{1-g} = J \sqrt[3]{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)} \tag{56}$$

$$g = \frac{J \sqrt[3]{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)}}{1+J \sqrt[3]{(D_a-1)(D_b-1)(D_c-1)}} \tag{57}$$

Für Kugeln wäre $D_a = D_b = D_c = D$ und $J = \frac{1}{3}$ zu setzen, somit

$$g = \frac{D-1}{D+2},$$

wie bekannt.

Es erübrigt noch, die gefundenen Formeln auf einen speciellen Fall anzuwenden. Es wurde vorausgesetzt, dass $a > b > c$, es muss also $D_a > D_b > D_c$ sein, wie aus den Gleichungen 54) ersichtlich ist.

Für krystallisirten Schwefel vom specifischen Gewichte 2·075 fand Boltzmann[1] die drei Dielektricitätsconstanten 4·773, 3·97, 3·81, während die elektromagnetische Lichttheorie 4·596, 3·886, 3·591 liefert. Näherungsweise dürfen wir die Richtungen, nach welchen diese Werthe gelten, als senkrecht auf einander ansehen. Es wird dann, wenn wir die aus der elektromagnetischen Lichttheorie fliessenden Werthe zu der Berechnung wählen, $\rho = 1{\cdot}1154$ und $\sigma = 1{\cdot}0366$. (Die Boltzmann'schen Werthe würden $\rho = 1{\cdot}1031$ und $\sigma = 1{\cdot}0185$ ergeben.) Hieraus folgt das Axenverhältniss

$$a \quad b \quad c = 1{\cdot}1154 \quad 1{\cdot}0366 \quad 1.$$

Ferner ist $J = \int_0^1 \frac{u^2 du}{(1-\lambda^2 u^2)^{1/2}(1-\lambda'^2 u^2)^{1/2}}$

und da $0 \begin{matrix} < \lambda u < \\ < \lambda' u < \end{matrix} 1$

---

[1] Boltzmann, Über die Verschiedenheit der Dielektricitätsconstante des krystallisirten Schwefels nach verschiedenen Richtungen. Diese Sitzungsberichte, 70 (2), S. 366.

$$= \int_0^1 \Big[ 1 + \frac{1}{2}(\lambda^2+\lambda'^2)u^2 + \frac{1}{8}(3\lambda^4+2\lambda^2\lambda'^2+3\lambda'^4)u^4 + $$
$$+ \frac{1}{16}(5\lambda^6+3\lambda^4\lambda'^2+3\lambda^2\lambda'^4+5\lambda'^6)u^6 + \qquad \Big] u^2 du$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{10}(\lambda^2+\lambda'^2) + \frac{1}{56}(3\lambda^4+2\lambda^2\lambda'^2+3\lambda'^4) +$$
$$+ \frac{1}{144}(5\lambda^6+3\lambda^4\lambda'^2+3\lambda^2\lambda'^4+5\lambda'^6) +$$

Es ist $\lambda^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{\rho^2-\sigma^2}{\rho^2}$, $\lambda'^2 = \frac{a^2-c^2}{a^2} = \frac{\rho^2-1}{\rho^2}$,

das gibt

$$\lambda^2 = 0\cdot 13639, \quad \lambda'^2 = 0\cdot 19627,$$

daher

$$\lambda^2+\lambda'^2 = 0\cdot 32266$$
$$3\lambda^4+2\lambda^2\lambda'^2+3\lambda'^4 = 0\cdot 32489$$
$$5\lambda^6+3\lambda^4\lambda'^2+3\lambda^2\lambda'^4+5\lambda'^6 = 0\cdot 07689,$$

woraus

$$J = 0\cdot 37193.$$

Mit Hilfe dieses Werthes findet man gemäss 56)

$$\frac{g}{1-g} = 1\cdot 11427$$

und gemäss 57)

$$g = 0\cdot 52703.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Raumerfüllung sich nicht ändert, wenn der krystallisirte Schwefel in amorphen übergeführt wird, könnte man nun mit dem gefundenen Werthe von $g$ die Dielektricitätsconstante des amorphen Schwefels berechnen. Nun ist aber das specifische Gewicht frischen amorphen Schwefels 1·92, seine Raumerfüllung $g'$ also geringer als die des krystallisirten. Da sich die Raumerfüllungen verhalten wie die specifischen Gewichte, ist $g' = \frac{1\cdot 92}{2\cdot 075} g = 0\cdot 9253\, g = 0\cdot 48766$.

Gemäss der Formel $D = \frac{1+2g'}{1-g'}$ findet man

$$D = 3\cdot 853,$$

während Boltzmann[1] nach derselben Methode, mittelst welcher er die Dielektricitätsconstanten des krystallisirten Schwefels bestimmte, den Werth 3·90, aus Condensatorversuchen dagegen den Werth 3·84 gefunden hat.

Die gute Übereinstimmung dieser Werthe mit dem aus den Brechungsquotienten des krystallisirten Schwefels gefundenen darf wohl als ein Beleg für die aus der elektromagnetischen Lichttheorie sich ergebende Beziehung zwischen Brechungsquotient und Dielektricitätsconstante angesehen werden.

Es ist mir schliesslich eine angenehme Pflicht, dankbar zu erwähnen, dass ich die vorliegende Untersuchung auf eine Anregung hin unternommen habe, welche von Herrn Prof. Franz Exner ausgegangen ist.

---

[1] Boltzmann, Über einige an meinen Versuchen über die elektrostatische Fernwirkung dielektrischer Körper anzubringende Correctionen. Diese Sitzungsberichte, 70 (2), S. 339. Boltzmann hat allerdings nicht mit amorphem Schwefel gearbeitet; doch haben die Untersuchungen Benischke's (Experimentaluntersuchung über Dielektrica, diese Sitzungsberichte 1894) ergeben, dass sich die Dielektricitätsconstante des amorphen Schwefels nicht ändert, wenn er in gewöhnlichen übergeht.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 104_2a

Autor(en)/Author(s): Lampa Anton

Artikel/Article: Zur Theorie der Dielektrica. 681-723