Über Dirichlet'sche Reihen

F. Mertens,
M. k. Akad.

In Dirichlet's Beweise für das Vorkommen von unendlich vielen Primzahlen in einer gegebenen ganzzahligen arithmethischen Reihe, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, besteht bekanntlich die grösste Schwierigkeit in dem Nachweise, dass gewisse unendliche Reihen von Null verschiedene Werthe haben. Dirichlet führt diesen Nachweis bei den Reihen mit complexen Gliedern apagogisch durch Stetigkeitsbetrachtungen.

Man kann indessen auch ganz elementar zu demselben Ziele durch Multiplication unendlicher Reihen gelangen, wie in dem Folgenden gezeigt werden soll.

1.

Es handele sich um die Multiplication von r Reihen

$$\begin{gathered} u_1^{(1)}+u_2^{(1)}+u_3^{(1)}+\ldots \\ u_1^{(2)}+u_2^{(2)}+u_3^{(2)}+\ldots \\ \cdots \\ u_1^{(r)}+u_2^{(r)}+u_3^{(r)}+\ldots \end{gathered}$$

Von den Gliedern dieser Reihen wird vorausgesetzt, dass für je zwei Zahlen a, b, von welchen $a \leqq b$ ist,

$$\operatorname{mod}\left(u_a^{(i)}+u_{a+1}^{(i)}+u_{a+2}^{(i)}+\ldots+u_b^{(i)}\right) \leqq \frac{f_i(a)}{a^{\tau}}$$

ist, wo mod das Zeichen für den analytischen Modul, π eine gegebene positive Zahl und $f_i(n)$ eine gegebene, mit wachsendem n nicht abnehmende Function bedeuten.

Es sei zur Abkürzung

$$u_1^{(i)}+u_2^{(i)}+\ldots+u_n^{(i)}=U_n^{(i)},$$

$$\operatorname{mod} u_1^{(i)}+\operatorname{mod} u_2^{(i)}+\ldots+\operatorname{mod} u_n^{(i)}=\mathfrak{A}_n^{(i)}$$

und n eine beliebige, die Einheit übersteigende Zahl. Denkt man sich das Product

$$U_n^{(1)}.U_n^{(2)}\ldots U_n^{(r)}$$

ausgeführt, so haben alle Glieder des Resultats die Gestalt

$$u_\alpha^{(1)}.u_\beta^{(2)}\ldots u_\varepsilon^{(r)},$$

wo jeder der Stellenzeiger $\alpha, \beta \ldots \varepsilon$ von 1 bis n lauft, und zerfallen zunächst in zwei Classen. Die erste Classe möge alle Glieder umfassen, in welchen das Product der Stellenzeiger $\alpha, \beta, \ldots$ die Zahl n nicht übersteigt, die zweite die übrigen Glieder.

Um die Summe der Glieder der ersten Classe aufzustellen, fasse man alle Glieder zusammen, in welchen das Product $\alpha.\beta\ldots\varepsilon$ einen und denselben Werth hat. Setzt man

$$\Sigma u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(2)}\ldots u_\varepsilon^{(r)}=t_m,$$

wo die Summe über alle Lösungen der Gleichung

$$\alpha\beta\ldots\varepsilon=m$$

in ganzen positiven Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ zu erstrecken ist, so wird die Summe der Glieder der ersten Classe

$$=t_1+t_2+t_3+\ldots+t_n.$$

In den Gliedern der zweiten Classe muss wenigstens einer der r Stellenzeiger $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ die in $n^{\frac{1}{r}}$ enthaltene grösste ganze Zahl ν übersteigen. Man kann daher diese Glieder in r Inbegriffe vertheilen, indem man in den i^{ten} Inbegriff alle Glieder aufnimmt, in welchen der i^{te} der Stellenzeiger $\alpha, \beta, \ldots$ der erste ist, welcher die Zahl ν übersteigt.

Es sei Σ_i die Summe der Glieder des i^{ten} Inbegriffs. Jedes Glied von Σ_i muss eine der Grössen

$$u^{(i)}_{\nu+1},\ u^{(i)}_{\nu+2}, \ldots u^{(i)}_{n}$$

als Factor enthalten und man gelangt zu einer übersichtlichen Darstellung von Σ_i, wenn man alle Glieder zusammenfasst, in welchen je eine der genannten Grössen vorkommt. Bringt man zu diesem Ende jedes Glied von Σ_i auf die Form

$$u^{(i)}_{m}\,.\,u^{(\rho)}_{a}\,u^{(\sigma)}_{b}\ldots u^{(\tau)}_{c},$$

wo $\rho, \sigma, \ldots \tau$ die Stellenzeiger $1, 2, \ldots r$ nach Ausschluss von i bezeichnen, so ist

$$u^{(\rho)}_{a}\,u^{(\sigma)}_{b}\ldots u^{(\tau)}_{c}$$

ein Glied des Products

$$U^{(\rho)}_{n}\,.\,U^{(\sigma)}_{n}\ldots U^{(\tau)}_{n},$$

und zwar ein solches, in welchem

$$ab\ldots c > \frac{n}{m}$$

ist und überdies in dem Falle $i > 1$ die $i-1$ ersten der Stellenzeiger $a, b, \ldots c$ die Zahl ν nicht übersteigen. Bezeichnet also $\varphi\left(\frac{n}{m}\right)$ die Summe dieser Glieder von $U^{(\rho)}_{n}\,.\,U^{(\sigma)}_{n}\ldots U^{(\tau)}_{n}$, so ist $\varphi\left(\frac{n}{m}\right)$ der Coëfficient von $u^{(i)}_{m}$ in Σ_i und man hat

$$\Sigma_i = u^{(i)}_{\nu+1}\,\varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right) + u^{(i)}_{\nu+2}\,\varphi\left(\frac{n}{\nu+2}\right) + \ldots + u^{(i)}_{n}\,\varphi\left(\frac{n}{n}\right).$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$\begin{aligned}\Sigma_i = {} & (u^{(i)}_{\nu+1} + u^{(i)}_{\nu+2} + \ldots + u^{(i)}_{n})\,\varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right)\\ & + (u^{(i)}_{\nu+2} + u^{(i)}_{\nu+3} + \ldots + u^{(i)}_{n})\left(\varphi\left(\frac{n}{\nu+2}\right) - \varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right)\right)\\ & + (u^{(i)}_{\nu+3} + \ldots + u^{(i)}_{n})\left(\varphi\left(\frac{n}{\nu+3}\right) - \varphi\left(\frac{n}{\nu+2}\right)\right)\\ & + \ldots\end{aligned}$$

$$+$$

$$+(u_{n-1}^{(i)}+u_n^{(i)})\left(\varphi\left(\frac{n}{n-1}\right)-\varphi\left(\frac{n}{n-2}\right)\right)$$

$$+u_n^{(i)}\left(\varphi\left(\frac{n}{n}\right)-\varphi\left(\frac{n}{n-1}\right)\right),$$

so ergibt sich

$$\operatorname{mod}\Sigma_i \leqq \operatorname{mod}(u_{\nu+1}^{(i)}+\ldots+u_n^{(i)})\operatorname{mod}\varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right)$$

$$+\operatorname{mod}(u_{\nu+2}^{(i)}+\ldots+u_n^{(i)})\operatorname{mod}\left(\varphi\left(\frac{n}{\nu+2}\right)-\varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right)\right)$$

$$+\ldots$$

$$+\operatorname{mod}u_n^{(i)}\operatorname{mod}\left(\varphi\left(\frac{n}{n}\right)-\varphi\left(\frac{n}{n-1}\right)\right).$$

Hierin ist aber nach der Annahme

$$\operatorname{mod}(u_{\nu+1}^{(i)}+u_{\nu+2}^{(i)}+\ldots+u_n^{(i)}) \leqq \frac{f_i(\nu+1)}{(\nu+1)^\pi} \leqq \frac{f_i(n)}{(\nu+1)^\pi},$$

$$\operatorname{mod}(u_{\nu+2}^{(i)}+\ldots+u_n^{(i)}) \leqq \frac{f_i(\nu+2)}{(\nu+2)^\pi} \leqq \frac{f_i(n)}{(\nu+1)^\pi},$$

$$\operatorname{mod}u_n^{(i)} \leqq \frac{f_i(n)}{n^\pi} \leqq \frac{f_i(n)}{(\nu+1)^\pi}.$$

Bezeichnet ferner $\varphi_0\left(\frac{n}{m}\right)$ das Resultat, in welches $\varphi\left(\frac{n}{m}\right)$ übergeht, wenn man jede Grösse $u_m^{(\mu)}$ durch ihren Modul ersetzt, so wird

$$\operatorname{mod}\varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right) \leqq \varphi_0\left(\frac{n}{\nu+1}\right),$$

$$\operatorname{mod}\left(\varphi\left(\frac{n}{\nu+2}\right)-\varphi\left(\frac{n}{\nu+1}\right)\right) \leqq \varphi_0\left(\frac{n}{\nu+2}\right)-\varphi_0\left(\frac{n}{\nu+1}\right),$$

$$\operatorname{mod}\left(\varphi\left(\frac{n}{n}\right)-\varphi\left(\frac{n}{n-1}\right)\right) \leqq \varphi_0\left(\frac{n}{n}\right)-\varphi_0\left(\frac{n}{n-1}\right),$$

weil die Differenz

$$\varphi\left(\frac{n}{h+1}\right)-\varphi\left(\frac{n}{h}\right)$$

entweder aus lauter Gliedern von $U_n^{(\rho)}.U_n^{(\sigma)}.\;\;.U_n^{(\tau)}$ besteht oder aber zugleich mit $\varphi_0\left(\frac{n}{h+1}\right)-\varphi_0\left(\frac{n}{h}\right)$ verschwindet.

Man hat also

$$\operatorname{mod}\Sigma_i \leqq \frac{f_i(n)}{(\nu+1)^\pi}\left(\varphi_0\left(\frac{n}{\nu+1}\right)+\varphi_0\left(\frac{n}{\nu+2}\right)-\varphi_0\left(\frac{n}{\nu+1}\right)+\right.$$

$$\left.+\varphi_0\left(\frac{n}{n}\right)-\varphi_0\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)\leqq\frac{f_i(n)\varphi_0(1)}{(\nu+1)^\pi}.$$

Da aber $\varphi_0(1)$ nur aus Gliedern des Ausdrucks

$$\mathfrak{A}_n^{(\rho)}.\mathfrak{A}_n^{(\sigma)}.\;\;.\mathfrak{A}_n^{(\tau)}-\operatorname{mod} u_1^{(\rho)}.\operatorname{mod} u_1^{(\sigma)}.\;\;.\operatorname{mod} u_1^{(\tau)}$$

besteht, so ergibt sich

$$\varphi_0(1)\leqq\mathfrak{P}_n^{(i)}$$

und demzufolge

$$\operatorname{mod}\Sigma_i\leqq\frac{f_i(n)\mathfrak{P}_n^{(i)}}{(\nu+1)^\pi}$$

wenn das Product aller Ausdrücke

$$\mathfrak{A}_n^{(1)},\;\mathfrak{A}_n^{(2)},.\;\;.\mathfrak{A}_n^{(r)}$$

nach Ausschluss von $\mathfrak{A}_n^{(i)}$ mit $\mathfrak{P}_n^{(i)}$ bezeichnet wird.

Aus der Gleichung

$$U_n^{(1)}.U_n^{(2)}.\;\;.U_n^{(r)}=t_1+t_2+\quad\;+t_n+\Sigma_1+\Sigma_2+\quad\;+\Sigma_r$$

folgt nun, wenn zur Abkürzung

$$f_1(n)\mathfrak{P}_n^{(1)}+f_2(n)\mathfrak{P}_n^{(2)}+\quad\;+f_r(n)\mathfrak{P}_n^{(r)}=A_n$$

gesetzt und eine Grösse, deren Modul die Grenze g nicht übersteigt, mit $\{g\}$ bezeichnet wird,

$$U_n^{(1)}.U_n^{(2)}.\;\;.U_n^{(r)}=t_1+t_2+\quad.+t_n+\left\{\frac{A_n}{(\nu+1)^\pi}\right\}\tag{1}$$

Diese Gleichung gilt auch noch für $n=1$, wo

$$U_1^{(1)}.U_1^{(2)}.\;\;.U_1^{(r)}=t_1$$

ist.

2.

Mit Hilfe der Gleichung (1) kann nun auch eine Grenze angegeben werden, welche der Modul der Summe

$$t = t_a + t_{a+1} + \quad + t_b$$

nicht übersteigen kann. Es wird hiebei $a > 1$ angenommen.

Man hat nach (1)

$$t_1 + t_2 + \quad + t_b = U_b^{(1)} . U_b^{(2)} \quad U_b^{(r)} + \left\{ \frac{A_b}{(1+\mu)^\pi} \right\},$$

$$t_1 + t_2 + \quad + t_{a-1} = U_{a-1}^{(1)} . U_{a-1}^{(2)} . \quad . U_{a-1}^{(r)} + \left\{ \frac{A_{a-1}}{(1+\varkappa)^\pi} \right\},$$

wo μ, $\varkappa$ die grössten in $b^{\frac{1}{r}}$, $(a-1)^{\frac{1}{r}}$ enthaltenen ganzen Zahlen bezeichnen.

Durch Subtraction dieser Gleichungen ergibt sich

$$\begin{aligned} t = {} & (U_b^{(1)} - U_{a-1}^{(1)}) U_b^{(2)} \; U_b^{(3)} \quad U_b^{(r)} \\ & + (U_b^{(2)} - U_{a-1}^{(2)}) U_{a-1}^{(1)} . U_b^{(3)} \quad U_b^{(r)} \\ & + . \\ & + (U_b^{(r)} - U_{a-1}^{(r)}) U_{a-1}^{(1)}, \; U_{a-1}^{(2)} \quad U_{a-1}^{(r-1)} \\ & + \left\{ \frac{A_b}{(1+\mu)^\pi} \right\} + \left\{ \frac{A_{a-1}}{(1+\varkappa)^\pi} \right\} \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} t \leqq {} & \mathfrak{P}_b^{(1)} \operatorname{mod} \{U_b^{(1)} - U_{a-1}^{(1)}\} \\ & + \mathfrak{P}_b^{(2)} \operatorname{mod} \{U_b^{(2)} - U_{a-1}^{(2)}\} \\ & + \\ & + \mathfrak{P}_b^{(r)} \operatorname{mod} \{U_b^{(r)} - U_{a-1}^{(r)}\} \\ & + \left\{ \frac{2 A_b}{(1+\varkappa)^\pi} \right\} \end{aligned}$$

es ist aber nach der Annahme

$$\operatorname{mod} (U_b^{(i)} - U_{a-1}^{(i)}) \leqq \frac{f_i(a)}{a^\pi} \leqq \frac{f_i(b)}{(1+\varkappa)^\pi} .$$

Daher wird

$$\bmod t \leqq \frac{1}{(1+\varkappa)^\pi}\left(f_1(b)\mathfrak{P}_b^{(1)}+f_2(b)\mathfrak{P}_b^{(2)}+\ldots\right)+\frac{2A_b}{(1+\varkappa)^\pi}$$

$$\leqq \frac{3A_b}{(1+\varkappa)^\pi}.$$

3.

Sind die gegebenen Reihen so beschaffen, dass $\frac{A_n}{n^{\frac{\pi}{r}}}$ mit wachsendem n der Null zustrebt, so hat man, da $1+\nu > n^{\frac{1}{r}}$ ist,

$$\lim \frac{A_n}{(1+\nu)^\pi} = 0.$$

Das Product dieser Reihen wird demnach durch die Reihe

$$t_1+t_2+t_3+\ldots+ \text{ in inf.}$$

dargestellt.

Haben insbesondere die Glieder der gegebenen Reihen die Gestalt

$$u_m^{(i)} = \frac{c_m^{(i)}}{m}$$

und ist für jedes i und beliebige Zahlen a, b

$$c_a^{(i)}+c_{a+1}^{(i)}+\ldots+c_b^{(i)} = \{G_i\}$$

wo

$$G_1,\ G_2, \ldots G_r$$

bekannte Grössen bezeichnen, so darf der vorstehende Satz angewendet werden.

Denn man hat mit Hilfe der Abel'schen Umformung

$$u_a^{(i)}+u_{a+1}^{(i)}+\ldots+u_b^{(i)}$$
$$= c_a^{(i)}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)+\left(c_a^{(i)}+c_{a+1}^{(i)}\right)\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}\right)+$$

$$+(c_a^{(i)}+c_{a+1}^{(i)}+\ldots+c_{b-1}^{(i)})\left(\frac{1}{b-1}-\frac{1}{b}\right)$$

$$+(c_a^{(i)}+c_{a+1}^{(i)}+\ldots+c_b^{(i)})\frac{1}{b}$$

$$=\{G_i\}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\ldots+\frac{1}{b-1}-\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\left\{\frac{G_i}{a}\right\}$$

Ferner wird

$$\mathfrak{A}_n^{(i)} \leqq \frac{G_i}{1}+\frac{G_i}{2}+\ldots+\frac{G_i}{n}$$

$$\leqq G_i\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right);$$

da aber

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}<1+\log n$$

ist, so wird

$$\mathfrak{A}_n^{(i)}<G_i(1+\log n).$$

Man kann demnach

$$f_i(n)=G_i, \qquad \pi=1$$

setzen und es wird A_n kleiner als der Ausdruck

$$r\,G_1\,G_2\ldots G_r(1+\log n)^{r-1}$$

Ein solcher Ausdruck tritt aber mit wachsendem n gegen jede Potenz $n^{\frac{1}{r}}$ von n zurück.

4.

Es werde jetzt das Polynom

$$T_n=t_1+t_2+\ldots+t_n$$

mit der Summe

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

multiplicirt. Zu diesem Ende setze man, über alle Theiler d von m erstreckt,

$$\Sigma d t_d = m v_m$$

und bezeichne die grösste in $\sqrt{n}$ enthaltene ganze Zahl mit μ.

Die Glieder des Products $S_n T_n$ haben alle die Gestalt $\frac{t_\beta}{\alpha}$ und zerfallen in vier Gruppen.

In die erste Gruppe stelle man die Glieder, in welchen $\alpha\beta \leqq n$ ist. Ihre Summe ist

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n.$$

Die zweite Gruppe enthalte die Glieder, in welchen $\alpha\beta > n$ und $\alpha \leqq \mu$, $\beta > \mu$ ist. Jedes derselben enthält einen der Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{\mu}$ als Factor, und zwar ist die Summe aller Glieder, welche $\frac{1}{k}$ enthalten, $= \frac{1}{k} a_k$, wenn

$$t_{1+\varepsilon} + t_{2+\varepsilon} + \ldots + t_n = a_k,$$

$$\varepsilon = E\left(\frac{n}{k}\right)$$

gesetzt wird, wo $E(z)$ die grösste in z enthaltene ganze Zahl bezeichnen soll. Die Summe der Glieder der zweiten Gruppe ist daher

$$= \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{3} a_3 + \ldots + \frac{1}{\mu} a_\mu.$$

Die dritte Gruppe umfasse alle Glieder, in welchen $\alpha\beta > n$ und $\alpha > \mu$, $\beta \leqq \mu$ ist. Jedes derselben muss eine der Grössen $t_2, t_3, \ldots t_\mu$ als Factor enthalten. Fasst man daher alle Glieder zusammen, welche t_k enthalten, und setzt wieder

$$\varepsilon = E\left(\frac{n}{k}\right),$$

so erscheint t_k mit dem Coëfficienten

$$b_k = \frac{1}{1+\varepsilon} + \frac{1}{2+\varepsilon} + \quad + \frac{1}{n}$$

und die Summe der Glieder der dritten Gruppe ist

$$= b_2 t_2 + b_3 t_3 + \quad + b_\mu t_\mu .$$

Endlich nehme man in die vierte Gruppe alle Glieder auf, in welchen α und $\beta > \mu$ sind. Ihre Summe ist

$$\left(\frac{1}{\mu+1} + \frac{1}{\mu+2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)(t_{\mu+1} + t_{\mu+2} + . \quad + t_n).$$

Nach Abschnitt 2 ist

$$a_k = \left\{\frac{3\,A_n}{(1+\zeta)^\pi}\right\},$$

wenn ζ die grösste in $E\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{r}}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet.

Da

$$(1+\zeta)^r > E\left(\frac{n}{k}\right),$$

also auch

$$(1+\zeta)^r > \frac{n}{k}$$

ist, so wird

$$1+\zeta > \frac{n^{\frac{1}{r}}}{k^{\frac{1}{r}}}$$

und demzufolge

$$a_k = \left\{\frac{3\,A_n}{n^{\frac{\pi}{r}}}\right\} k^{\frac{\pi}{r}}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+ \quad +\frac{1}{\mu}a_\mu$$

$$=\left\{\frac{3A_n}{n^{\frac{\pi}{r}}}\right\}\left(\frac{1}{2^{1-\frac{\pi}{r}}}+\frac{1}{3^{1-\frac{\pi}{r}}}+\ldots+\frac{1}{\mu^{1-\frac{\pi}{r}}}\right).$$

Es ist aber

$$\frac{\pi}{r}\frac{1}{k^{1-\frac{\pi}{r}}}<k^{\frac{\pi}{r}}-(k-1)^{\frac{\pi}{r}}$$

und demzufolge

$$\frac{1}{2^{1-\frac{\pi}{r}}}+\frac{1}{3^{1-\frac{\pi}{r}}}+\ldots+\frac{1}{\mu^{1-\frac{\pi}{r}}}<\frac{r}{\pi}\mu^{\frac{\pi}{r}} \tag{2}$$

$$<\frac{r}{\pi}n^{\frac{\pi}{2r}}$$

Man hat also

$$\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+ \quad +\frac{1}{\mu}a_\mu=\left\{\frac{3rA_n}{\pi n^{\frac{\pi}{2r}}}\right\}.$$

Ferner ist

$$\log(h+1)-\log h-\frac{1}{h+1}=\log\frac{1}{1-\frac{1}{h+1}}-\frac{1}{h+1}$$

$$=\frac{1}{2(h+1)^2}+\frac{1}{3(h+1)^3}+$$

$$<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(h+1)^2}+\frac{1}{(h+1)^3}+ \quad \right)$$

$$<\frac{1}{2h(h+1)}<\frac{2}{h+1}-\frac{2}{h+2}.$$

Wird $h=\varepsilon,\varepsilon+1,. \;.n-1$ gesetzt und summirt, so folgt

$$\log n-\log\varepsilon-b_k<\frac{2}{1+\varepsilon}<\frac{2k}{n};$$

es ist aber, wenn $\varepsilon = E\left(\frac{n}{k}\right) = \frac{n-\rho}{k}$ gesetzt und $n \geqq 4$ angenommen wird,

$$\log\frac{n}{k} - \log\varepsilon = \log\frac{n}{n-\rho} = \log\left(1+\frac{\rho}{n-\rho}\right)$$

$$< \frac{\rho}{n-\rho} < \frac{2\rho}{n},$$

weil hier nur Werthe von k in Betracht kommen, welche $\leqq \mu$ sind.

Man hat also

$$b_k = \log k + \left\{\frac{2k}{n}\right\}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung ergibt sich

$$b_2 t_2 + b_3 t_3 + \ldots + b_\mu t_\mu = t_2 \log 2 + t_3 \log 3 + \ldots + t_\mu \log \mu$$

$$+ \left\{\frac{4t_2}{n}\right\} + \left\{\frac{6t_3}{n}\right\} + \ldots + \left\{\frac{2\mu t_\mu}{n}\right\}$$

Nach Abschnitt 2 ist

$$2kt_k = \left\{\frac{6kA_n}{(1+\eta)^\pi}\right\},$$

wo η die grösste in $(k-1)^{\frac{1}{r}}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet; es ist aber

$$(1+\eta)^r > k-1$$

und daher

$$\frac{k}{(1+\eta)^\pi} < \frac{k}{(k-1)^{\frac{\pi}{r}}} = \left(\frac{k}{k-1}\right)^{\frac{\pi}{r}} k^{1-\frac{\pi}{r}} \leqq 2k^{1-\frac{\pi}{r}}$$

$$< \frac{2n^{1-\frac{\pi}{r}}}{k^{1-\frac{\pi}{r}}},$$

wenn $k^2 \leqq n$. Hienach ergibt sich nach (2)

$$\left\{\frac{4t_2}{n}\right\} + \left\{\frac{6t_3}{n}\right\} + \ldots + \left\{\frac{2\mu t_\mu}{n}\right\}$$

$$= \left\{ \frac{12 A_n}{n^{\frac{\pi}{r}}} \right\} \left(\frac{1}{2^{1-\frac{\pi}{r}}} + \frac{1}{3^{1-\frac{\pi}{r}}} + \quad \right)$$

$$= \left\{ \frac{12 r A_n}{\pi n^{\frac{\pi}{2r}}} \right\}.$$

Wird noch berücksichtigt, dass identisch

$$\begin{aligned} t_{\mu+1} \log(\mu+1) + t_{\mu+2} \log(\mu+2) + \quad + t_n \log n = \\ (t_{\mu+1} + t_{\mu+2} + \ldots + t_n) \log n \\ -(t_{\mu+1} + t_{\mu+2} + \quad . + t_{n-1})(\log n - \log(n-1)) \\ -(t_{\mu+1} + t_{\mu+2} + \quad + t_{n-1})(\log(n-1) - \log(n-2)) \\ - . \\ -t_{\mu+1}(\log(\mu+2) - \log(\mu+1)) \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich nach Abschnitt 2

$$\begin{aligned} & t_{\mu+1} \log(\mu+1) + \quad + t_n \log n \\ & = \log n \{ t_{\mu+1} + t_{\mu+2} + \quad + t_n \} \\ & \qquad + (\log n - \log(n-1)) \{ t_{\mu+1} + t_{\mu+2} + \quad . + t_{n-1} \} \\ & \qquad + \\ & \qquad + (\log(\mu+2) - \log(\mu+1)) \{ t_{\mu+1} \} \\ & = \left\{ \frac{3 A_n}{n^{\frac{\pi}{2r}}} \right\} (\log n + \log n \quad \log(n-1) + \ldots + \log(\mu+2) - \log(\mu+1)) \\ & = \left\{ \frac{9 A_n \log n}{2 n^{\frac{\pi}{2r}}} \right\}. \end{aligned}$$

Man hat demnach

$$\begin{aligned} b_2 t_2 + b_3 t_3 + \quad . b_\mu t_\mu = t_2 \log 2 + t_3 \log 3 + \quad + t_n \log n \\ + \left\{ \frac{A_n}{n^{\frac{\pi}{2r}}} \left(\frac{12 r}{\pi} + \frac{9 \log n}{2} \right) \right\} \end{aligned}$$

Endlich ist nach Abschnitt 2

$$\left(\frac{1}{\mu+1} + \frac{1}{\mu+2} + \quad + \frac{1}{n} \right) (t_{\mu+1} + . \quad + t_n) = \left\{ \frac{3 A_n \log n}{n^{\frac{\pi}{2r}}} \right\}.$$

Fasst man nun die Glieder der vier Gruppen zusammen, so ergibt sich

$$S_n T_n = v_1 + v_2 + \quad + v_n$$
$$+ t_2 \log 2 + t_3 \log 3 + \ .. + t_n \log n$$
$$+ \left\{ \frac{A_n}{n^{\frac{\pi}{2r}}} \left(\frac{15r}{\pi} + \frac{15 \log n}{2} \right) \right\}.$$

Nach (1) folgt hieraus

$$S_n U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} = S_n T_n + \left\{ \frac{A_n S_n}{n^{\frac{\pi}{r}}} \right\} \tag{3}$$
$$= v_1 + v_2 + \ . + v_n$$
$$+ t_2 \log 2 + t_3 \log 3 + . \ . + t_n \log n$$
$$+ \left\{ \frac{A_n (1 + \log n)}{n^{\frac{\pi}{r}}} + \frac{A_n}{n^{\frac{\pi}{2r}}} \left(\frac{15r}{\pi} + \frac{15 \log n}{2} \right) \right\}$$

5.

Man ersetze in Gleichung (1) für ein bestimmtes i die Grössen

$$u_1^{(i)},\ u_2^{(i)},\ u_3^{(i)},\ \ldots u_n^{(i)}$$

beziehungsweise durch

$$u_1^{(i)} \log 1,\ u_2^{(i)} \log 2,\ u_3^{(i)} \log 3, . \ . u_n^{(i)} \log n$$

und setze

$$u_2^{(i)} \log 2 + u_3^{(i)} \log 3 + \ . + u_n^{(i)} \log n = V_n^{(i)}$$

Da

$$u_a^{(i)} \log a + u_{a+1}^{(i)} \log (a+1) + \quad + u_b^{(i)} \log b$$
$$= (u_a^{(i)} + u_{a+1}^{(i)} + . \quad + u_b^{(i)}) \log b$$
$$-(u_a^{(i)} + u_{a+1}^{(i)} + \quad + u_{b-1}^{(i)}) (\log b - \log (b-1))$$
$$-(u_a^{(i)} + u_{a+1}^{(i)} + . \quad + u_{b-2}^{(i)}) (\log (b-1) - \log (b-2))$$
$$- .$$
$$-u_a^{(i)} (\log (a+1) - \log a)$$

$$= \left\{\frac{f_i(a)}{a^\pi}\right\}(\log b + \log b - \log(b-1) + \ldots + \log(a+1) - \log a)$$

$$= \left\{\frac{2\log b\, f_i(a)}{a^\pi}\right\} = \left\{\frac{2\log n\, f_i(a)}{a^\pi}\right\}$$

ist, so genügt es, um Gleichung (1) auf den vorliegenden Fall anwenden zu können, $f_i(m)$ durch $2\log n f_i(m)$ zu ersetzen. Man darf dann $\mathfrak{A}_n^{(i)}$ durch $\mathfrak{A}_n^{(i)}\log n$ und demgemäss A_n durch $(A_n + f_i(n)\mathfrak{P}_n^{(i)}\log n)$ ersetzen. Bezeichnen daher $\rho, \sigma, \ldots \tau$ die Stellenzeiger $1, 2, \ldots r$ nach Ausschluss von i und $t_m^{(i)}$ die Summe aller Producte

$$u_\alpha^{(1)} u_\beta^{(2)} \ldots u_\varepsilon^{(r)} \log \lambda_i,$$

in welchen $\alpha\beta \ldots \varepsilon = m$ und λ_i der i^{te} der Stellenzeiger $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ ist, so folgt

$$U_n^{(\rho)} U_n^{(\sigma)} \ldots U_n^{(\tau)} V_n^{(i)} = t_1^{(i)} + t_2^{(i)} + \ldots + t_n^{(i)} + \left\{\frac{(A_n + f_i(n)\mathfrak{P}_n^{(i)})\log n}{n^{\frac{\pi}{r}}}\right\}.$$

Man denke sich nun alle Gleichungen summirt, welche aus der vorstehenden hervorgehen, wenn man $i = 1, 2, 3, \ldots r$ setzt. Da

$$t_m^{(1)} + t_m^{(2)} + \ldots + t_m^{(r)} = t_m \log m$$

ist, so erhält man

$$\begin{aligned} U_n^{(2)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} V_n^{(1)} + U_n^{(1)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} V_n^{(2)} \\ + \ldots + U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r-1)} V_n^{(r)} \\ = t_2 \log 2 + t_3 \log 3 + \ldots + t_n \log n \\ + \left\{\frac{(r+1) A_n \log n}{n^{\frac{\pi}{r}}}\right\}. \end{aligned}$$

Nach (3) wird dann

$$\begin{aligned} S_n U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} - U_n^{(2)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} V_n^{(1)} \qquad (4) \\ - U_n^{(1)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} V_n^{(2)} - \ldots - U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r-1)} V_n^{(r)} \end{aligned}$$

$$= v_1+v_2+\quad+v_n$$
$$+\left\{\frac{A_n(1+(r+2)\log n)}{n^{\frac{\pi}{r}}}+\frac{A_n}{n^{\frac{\pi}{2r}}}\left(\frac{15r}{\pi}+\frac{15\log n}{2}\right)\right\}.$$

6.

Die Gleichung (4) werde jetzt auf die Dirichlet'schen Reihen angewendet.

Es sei

$$M = 2^{\rho_0} p^{\rho}$$

die Differenz einer gegebenen arithmetischen Reihe, p,. ihre etwaigen ungeraden Primfactoren, wo $\rho_0 = 0$ oder > 1 angenommen werden darf, und

$$\varphi(M) = 1+r$$

Man stelle für jede zu M theilerfremde Zahl m eine vollständige Indicesreihe auf. Ist $\rho_0 > 0$, so seien die durch die Congruenz

$$m \equiv (-1)^{\frac{m-1}{2}} 5^{\operatorname{ind} m} \qquad (\operatorname{mod} 2^{\rho_0})$$

definirten Exponenten die ersten zwei Zahlen dieser Reihe. Für jede in M aufgehende Potenz p^{ρ} einer ungeraden Primzahl p nehme man den auf eine bestimmte primitive Congruenzwurzel von p^{ρ} sich beziehenden Index von m in diese Indicesreihe auf.

Sind dann

$$\eta,\ \omega,.$$

Wurzeln der Gleichungen

$$\varepsilon^2 = 1, \qquad \eta^{\varphi(2^{\rho_0-1})} = 1, \qquad \omega^{\varphi(p^{\rho})} = 1,.$$

so setze man

$$c_m^{(i)} = \varepsilon^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\operatorname{ind} m} \omega^{\operatorname{ind} m}$$

der Factor $\varepsilon^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\operatorname{ind} m}$ ist nur vorhanden, wenn $\rho_0 > 1$ und der Exponent von ω ist der auf den Modul p^{ρ} sich beziehende Index von m u. s. f. Der Stellenzeiger i möge die Werthe 0, 1, 2,. . r durchlaufen und zur Kennzeichnung aller verschiedenen Combinationen der möglichen Werthe von $\varepsilon, \eta, \omega, .$ dienen, wobei der Stellenzeiger 0 den Werthen

$$\varepsilon = \eta = \omega = \quad = 1$$

entsprechen soll.

Für eine nicht zu M theilerfremde Zahl m werde

$$c_m^{(i)} = 0$$

festgesetzt.

Es ist

$$c_m^{(i)} c_n^{(i)} = c_{mn}^{(i)}$$

$$c_{m+M}^{(i)} = c_m^{(i)}$$

und, wenn $i > 0$,

$$c_1^{(i)} + c_2^{(i)} + \quad + c_M^{(i)} = 0,$$

woraus

$$c_a^{(i)} + c_{a+1}^{(i)} + \ldots + c_b^{(i)} = \left\{\frac{1+r}{2}\right\}$$

folgt.

Es werde nun in Gleichung (4)

$$u_m^{(i)} = \frac{1}{m} c_m^{(i)}$$

gesetzt. Man hat dann

$$\frac{c_a^{(i)}}{a} + \frac{c_{a+1}^{(i)}}{a+1} + \quad + \frac{c_b^{(i)}}{b} = c_a^{(i)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right)$$

$$+ (c_a^{(i)} + c_{a+1}^{(i)}) \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2}\right)$$

$$+$$

$$+ (c_a^{(i)} + c_{a+1}^{(i)} + \quad . + c_{b-1}^{(i)}) \left(\frac{1}{b-1} - \frac{1}{b}\right)$$

$$+ (c_a^{(i)} + c_{a+1}^{(i)} + \quad + c_b^{(i)}) \frac{1}{b}$$

$$= \left\{\frac{r+1}{2}\right\} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} + \quad + \frac{1}{b}\right)$$

$$= \left\{\frac{r+1}{2a}\right\}$$

und kann demnach

$$f_i(n) = \frac{r+1}{2}$$

$$\pi = 1$$

setzen. Für $\mathfrak{A}_m^{(i)}$ findet man

$$\mathfrak{A}_n^{(i)} \leqq S_n < 1+\log n.$$

Ferner wird

$$V_n^{(i)} = \frac{1}{2} c_2^{(i)} \log 2 + \frac{1}{3} c_3^{(i)} \log 3 + \quad + \frac{1}{n} c_n^{(i)} \log n$$

$$= -c_2^{(i)} \left(\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 2}{2}\right) + (c_2^{(i)}+c_3^{(i)}) \left(\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 4}{4}\right)$$

$$+ (c_2^{(i)}+c_3^{(i)}+c_4^{(i)}) \left(\frac{\log 4}{4} - \frac{\log 5}{5}\right) + .$$

$$+ (c_2^{(i)}+c_3^{(i)}+ \quad . c_n^{(i)}) \frac{\log n}{n}$$

$$= \left\{\frac{r+1}{2}\right\} \left(\frac{\log 3}{3} - \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 3}{3} - \frac{\log 4}{4} + \quad \right)$$

$$= \left\{\frac{(r+1)\log 3}{3}\right\}$$

Die Grössen $v_1, v_2, . \ . v_n$ sind hier nicht negative rationale Zahlen.

Um sich hievon zu überzeugen, setze man, über alle positiven Zahlen $\alpha, \beta, . \ . \varepsilon$, deren Product in m aufgeht, erstreckt,

$$\Sigma c_\alpha^{(1)} . c_\beta^{(2)} \quad . c_\varepsilon^{(r)} = F(m).$$

Dann ist, wenn d in einer Potenz von M aufgeht und $\frac{m}{d}$ zu M theilerfremd ist,

$$v_m = \frac{1}{m} F(m) = \frac{1}{m} F\left(\frac{m}{d}\right).$$

Besteht m aus mehreren zu M theilerfremden Primzahlpotenzen $q^\sigma, q_1^\tau, . \ .$, so wird

$$F(q^\sigma q_1^\tau . \ .) = F(q^\sigma) . F(q_1^\tau).$$

Man braucht also nur noch $F(m)$ für eine zu M theilerfremde Primzahlpotenz q^σ zu bestimmen.

$F(q^\sigma)$ ist der Coëfficient von x^σ in der Entwickelung des Bruches

$$\frac{1}{(1-x)(1-xc_q^{(1)})(1-xc_q^{(2)}) \ldots (1-xc_q^{(r)})}$$

nach Potenzen von x. Ist μ die kleinste Zahl, mit welcher die einzelnen Indices von q multiplicirt werden müssen, um durch die entsprechende Zahl der Reihe

$$2, \quad \varphi(2^{\rho_0-1}), \quad \varphi(p^\rho),$$

theilbar zu sein, so sind $1, c_q^{(1)}, c_q^{(2)}, \ldots c_q^{(r)}$ μ^{te} Einheitswurzeln und man hat, wenn $\mu > 1$, für jede unter μ liegende positive Zahl ν

$$1+(c_q^{(1)})^\nu+(c_q^{(2)})^\nu+ \quad +(c_q^{(r)})^\nu = 0.$$

Ist also ω eine primitive μ^{te} Einheitswurzel und kommt ω^k in der Reihe

$$1, \quad c_q^{(1)}, \quad c_q^{(2)}, \ldots c_q^{(r)}$$

genau h_k mal vor, so hat man

$$\begin{aligned}
h_0+h_1+h_2+ \quad +h_{\mu-1} &= r+1 \\
h_0+h_1\omega+h_2\omega^2+ \quad +h_{\mu-1}\omega^{\mu-1} &= 0 \\
h_0+h_1\omega^2+h_2\omega^4+ \quad +h_{\mu-1}\omega^{2\mu-2} &= 0 \\
&\ \,\vdots \\
h_0+h_1\omega^{\mu-1}+h_2\omega^{2\mu-2}+ \ldots +h_{\mu-1}\omega^{(\mu-1)(\mu-1)} &= 0
\end{aligned}$$

und demzufolge

$$h_0 = h_1 = h_2 = \quad = h_{\mu-1} = \frac{1+r}{\mu}.$$

Dies gilt auch noch für $\mu = 1$. Hienach wird

$$\begin{aligned}
&(1-x)(1-xc_q^{(1)})(1-xc_q^{(2)}) \ldots (1-xc_q^{(r)}) \\
&\qquad = ((1-x)(1-x\omega)(1-x\omega^2) \ldots (1-x\omega^{\mu-1}))^{\frac{1+r}{\mu}} \\
&\qquad = (1-x^\mu)^{\frac{1+r}{\mu}}
\end{aligned}$$

$F(q^\sigma)$ ist demnach als Coëfficient von x^σ in $\dfrac{1}{(1-x^\mu)^{\frac{1+r}{\mu}}}$ eine nicht negative Zahl. Dann ist aber allgemein $F(m) \geqq 0$.

Insbesondere ist

$$v_1 = F(1) = 1$$

und daher

$$v_1+v_2+\quad+v_n \geqq 1.$$

Die Gleichung (4) lautet in dem vorliegenden Falle

$$\begin{aligned} S_n U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} - U_n^{(2)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} V_n^{(1)} \\ - U_n^{(1)} U_n^{(3)} \ldots U_n^{(r)} V_n^{(2)} - \ldots - U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r-1)} V_n^{(r)} \\ = v_1+v_2+\quad+v_n+\{\Delta_n\}, \end{aligned} \tag{5}$$

wo

$$\Delta_n = \frac{1}{2} r(r+1)(1+\log n)^{r-1} \left(\frac{1+(r+2)\log n}{n^{\frac{1}{r}}} + \frac{15\left(r+\frac{1}{2}\log n\right)}{n^{\frac{1}{2r}}} \right).$$

Befinden sich nun in der Reihe

$$U_n^{(1)},\ U_n^{(2)}, \ldots U_n^{(r)}$$

irgend zwei conjugirte Grössen, etwa $U_n^{(1)}$ und $U_n^{(2)}$, was nur in den Fällen $M = 4, 8$ nicht stattfindet, so setze man

$$\operatorname{mod} U_n^{(1)} = \operatorname{mod} U_n^{(2)} = R_n$$

und zur Abkürzung

$$1+\frac{2r-4}{3}\log 3 = a$$

$$\frac{1+r}{3}\log 3 = b$$

$$\frac{2^{r-3}}{(1+r)^{r-2}} = c.$$

Dann ist

$$S_n U_n^{(1)} U_n^{(2)} \quad U_n^{(r)} = \left\{ R_n^2 (1+\log n) \left(\frac{1+r}{2}\right)^{r-2} \right\}$$

$$U_n^{(2)} U_n^{(3)} \quad . U_n^{(r)} V_n^{(1)} = \left\{ R_n \left(\frac{r+1}{2} \right)^{r-2} b \right\}$$

$$U_n^{(1)} U_n^{(3)} . \quad . U_n^{(r)} V_n^{(2)} = \left\{ R_n \left(\frac{r+1}{2} \right)^{r-2} b \right\}$$

$$U_n^{(1)} U_n^{(2)} U_n^{(4)} \quad V_n^{(3)} = \left\{ R_n^2 \left(\frac{r+1}{2} \right)^{r-3} b \right\}$$

und somit nach (5)

$$\left(\frac{r+1}{2} \right)^{r-1} ((a+\log n) R_n^2 + 2 b R_n) \geqq 1 - \Delta_n$$

oder

$$R_n^2 + \frac{2b . R_n}{a+\log n} \geqq \frac{2c(1-\Delta_n)}{a+\log n}. \tag{6}$$

Verschafft man sich daher eine möglichst kleine Zahl s von der Art, dass etwa

$$\Delta_s < \frac{1}{2}$$

und zugleich

$$\frac{b}{a+\log s} + \frac{r+1}{2(s+1)} \leqq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a+\log s} + \frac{b^2}{(a+\log s)^2}} \tag{7}$$

ausfällt, so wird zunächst nach (6)

$$R_s^2 + \frac{2b}{a+\log s} R_s > \frac{c}{a+\log s},$$

also

$$R_s + \frac{b}{a+\log s} > \sqrt{\frac{c}{a+\log s} + \left(\frac{b}{a+\log s} \right)^2}$$

und dann nach (7)

$$R_s > \frac{r+1}{2(s+1)} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a+\log s} + \frac{b^2}{(a+\log s)^2}}.$$

Ist $n > s$, so hat man

$$\frac{c_{s+1}^{(1)}}{s+1} + \frac{c_{s+2}^{(1)}}{s+2} + \ldots + \frac{c_n^{(1)}}{n} = \left\{ \frac{r+1}{2(s+1)} \right\},$$

also

$$U_s^{(1)} = U_n^{(1)} + \left\{ \frac{r+1}{2(s+1)} \right\}$$

und demzufolge

$$R_s \leqq R_n + \frac{r+1}{2(s+1)}$$

Von $n = s$ an ist daher

$$R_n > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{a+\log s} + \frac{b^2}{(a+\log s)^2}}.$$

7

Das Nichtverschwinden einer Reihe

$$\frac{c_1^{(i)}}{1} + \frac{c_2^{(i)}}{2} + \frac{c_3^{(i)}}{3} + \ldots$$

mit reellen Gliedern lässt sich auch ohne eine ausgedehnte Theorie der quadratischen Formen nur mit Hilfe der Form $x^2 - Dy^2$ und des Reciprocitätssatzes beweisen, welcher ja auch bei dem Dirichlet'schen Beweise intervenirt.

Es sei, über alle Theiler d von m erstreckt,

$$\Sigma c_d^{(i)} = \psi(m)$$

und

$$\psi(1) + \psi(2) + \ldots + \psi(n) = S.$$

Bezeichnet $E(z)$ die grösste in z enthaltene ganze Zahl und setzt man

$$E\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m} - r_m$$

$$E(\sqrt{n}) = \mu,$$

so wird

$$S = c_1^{(i)} E\left(\frac{n}{1}\right) + c_2^{(i)} E\left(\frac{n}{2}\right) + \ldots + c_n^{(i)} E\left(\frac{n}{n}\right)$$

$$= nU_n^{(i)} - c_1^{(i)} r_1 - c_2^{(i)} r_2 - \ldots - c_n^{(i)} r_n$$

und

$$c_1^{(i)} r_1 + c_2^{(i)} r_2 + \ldots + c_\mu^{(i)} r_\mu = \{\mu\}$$

$$c_{\mu+1}^{(i)} r_{\mu+1} + \quad + c_n^{(i)} r_n = c_{\mu+1}^{(i)} (r_{\mu+1} - r_{\mu+2})$$
$$+ (c_{\mu+1}^{(i)} + c_{\mu+2}^{(i)})(r_{\mu+2} - r_{\mu+3})$$
$$+$$
$$+ (c_{\mu+1}^{(i)} + c_{\mu+2}^{(i)} + \quad . + c_n^{(i)}) r_n$$
$$= \left\{\frac{r+1}{2}\right\} (\mathrm{mod}\,(r_{\mu+1} - r_{\mu+2}) + \mathrm{mod}\,(r_{\mu+2} - r_{\mu+3}) + \quad);$$

da aber

$$r_m - r_{m+1} = \frac{n}{m} - \frac{n}{m+1} - \left(E\left(\frac{n}{m}\right) - E\left(\frac{n}{m+1}\right)\right),$$

also

$$\mathrm{mod}\,(r_m - r_{m+1}) \leqq \frac{n}{m} - \frac{n}{m+1} + E\left(\frac{n}{m}\right) - E\left(\frac{n}{m+1}\right)$$

ist, so folgt

$$c_{\mu+1}^{(i)} r_{\mu+1} + \quad . + c_n^{(i)} r_n = \left\{\frac{r+1}{2}\right\}\left(\frac{n}{\mu+1} + E\frac{n}{\mu+1}\right)$$
$$= \{(r+1)\sqrt{n}\}$$
$$c_1^{(i)} r_1 + \quad + c_n^{(i)} r_n = \{(r+2)\sqrt{n}\}$$

Man hat also

$$U_n^{(i)} = \frac{1}{n} S + \left\{\frac{r+2}{\sqrt{n}}\right\} \tag{8}$$

Die Zahl $\psi(m)$ kann nicht negativ sein. Ist nämlich

$$m = q^{\rho} q_1^{\sigma}.$$

wo $q, q_1, .$ verschiedene Primzahlen bezeichnen, so wird

$$\psi(m) = \psi(q^{\rho})\psi(q_1^{\sigma}).$$
$$\psi(q^{\sigma}) = 1 + c_q^{(i)} + (c_q^{(i)})^2 + . \quad + (c_q^{(i)})^{\sigma}.$$

Bezeichnet daher S' die Summe aller Zahlen $\psi(m)$, welche sich nur auf die zu $2M$ theilerfremden Zahlen m bis zur Grenze n beziehen, so ist

$$S \geqq S'$$

Für eine zu $2M$ theilerfremde Zahl m aber ist $c_m^{(i)}$ als Legendre—Jacobi'sches Symbol darstellbar. Ist nämlich P das Product derjenigen ungeraden Primfactoren von M, für welche die entsprechenden Einheitswurzeln in der Reihe $\omega, \omega_1, \ldots$ den Werth -1 haben, Q das Product der übrigen Primfactoren von M, und setzt man

$$D = \varepsilon(-1)^{\frac{P-1}{2}} 2^{\frac{1-\eta}{2}} PQ^2,$$

so ist

$$c_m^{(i)} = \left(\frac{D}{m}\right)$$

Die Zahl $\psi(m)$ gibt demnach in diesem Falle die Anzahl aller Wurzeln an, welche die Congruenzen

$$z^2 \equiv D \pmod{m}$$

$$z^2 \equiv D \left(\bmod \frac{m}{\delta^2}\right)$$

zusammengenommen besitzen, wenn $1, \delta^2, \ldots$ die verschiedenen quadratischen Theiler von m bedeuten. S' ist daher die Anzahl aller Wurzeln, welche die vorstehenden Congruenzen für alle zu $2D$ theilerfremden Zahlen m bis zur Grenze n zulassen.

Es sei nun Δ der Zahlenwerth von D und man setze in $x^2 - Dy^2$ für y nach und nach alle Zahlen

$$2, 4, \ldots 2E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2\Delta}}\right)$$

und für x alle zu $2D$ theilerfremden Zahlen ein, welche die Grenze $\sqrt{\frac{n}{2}}$ nicht übersteigen, bei negativem D positiv sind und bei positivem D über $y\sqrt{D+1}$ liegen. Für alle diese Zahlenpaare x, y fällt dann $x^2 - Dy^2$ zu $2D$ theilerfremd, positiv und $\leqq n$ aus. Bezeichnet daher $\mathfrak{N}$ die Anzahl dieser Zahlenpaare und $\chi(m)$ die Anzahl derselben, für welche $x^2 - Dy^2 = m$ wird, so ist

$$\mathfrak{N} = \chi(1) + \chi(2) + \ldots + \chi(n).$$

Es ist nun leicht nachzuweisen, dass

$$\chi(m) \leqq \psi(m)$$

ist.

Es sei zu diesem Ende x, y eines der fraglichen Zahlenpaare,

$$x^2-Dy^2 = m,$$

δ der grösste gemeinschaftliche Theiler von x und y, und

$$x = \delta X, \qquad y = \delta Y.$$

Es ist dann

$$X^2-DY^2 = \frac{m}{\delta^2}.$$

Bestimmt man daher eine Zahl h aus der Congruenz

$$hY \equiv 1 \quad \left(\bmod \frac{m}{\delta^2}\right)$$

und setzt

$$hX \equiv \omega \quad \left(\bmod \frac{m}{\delta^2}\right),$$

so ergibt sich

$$h^2(X^2-DY^2) = h^2 \frac{m}{\delta^2}$$

oder

$$\omega^2 \equiv D \quad \left(\bmod \frac{m}{\delta^2}\right).$$

ω ist also eine der bei der Bildung der Anzahl $\psi(m)$ mitzuzählenden Wurzeln.

Aus zwei verschiedenen Zahlenpaaren x_1, y_1 und x_2, y_2, für welche

$$x_1^2-Dy_1^2 = m, \qquad x_2^2-Dy_2^2 = m$$

ist, kann aber in der vorstehenden Weise nie dieselbe Wurzel ω hervorgehen. Dies könnte nur eintreten, wenn x_2, y_2 denselben grössten gemeinschaftlichen Theiler δ besitzen, wie x_1, y_1. Setzt man aber

$$x_1 = \delta X_1, \quad y_1 = \delta Y_1, \quad x_2 = \delta X_2, \quad y_2 = \delta Y_2,$$

$$h_1 Y_1 \equiv 1, \qquad h_2 Y_2 \equiv 1 \quad \left(\bmod \frac{m}{\delta^2}\right)$$

und wäre zugleich

$$h_1 X_1 \equiv \omega, \qquad h_2 X_2 \equiv \omega \quad \left(\bmod \frac{m}{\delta^2}\right),$$

so hätte man

$$h_1 X_1 - h_2 X_2 \equiv 0, \qquad h_1 Y_1 - h_2 Y_2 \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{m}{\delta^2}\right),$$

also auch

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \equiv 0 \quad \left(\bmod \frac{m}{\delta^2}\right)$$

Aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{m^2}{\delta^4} &= (X_1^2 - D Y_1^2)(X_2^2 - D Y_2^2)\\ &= (X_1 X_2 - D Y_1 Y_1)^2 - D(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)^2\end{aligned}$$

folgt dann, dass auch $X_1 X_2 - D Y_1 Y_2$ durch $\frac{m}{\delta^2}$ theilbar sein muss und man kann

$$X_1 X_2 - D Y_1 Y_2 = \frac{m}{\delta^2} t$$

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = \frac{m}{\delta^2} \cdot u$$

setzen und u nicht negativ annehmen. Es wäre dann

$$t^2 - D u^2 = 1.$$

Ist nun D negativ, so folgt hieraus, da t positiv ist,

$$u = 0, \qquad t = 1.$$

Ist aber D positiv, so hat man

$$\begin{aligned} t + u\sqrt{D} &= \frac{X_2 + Y_2\sqrt{D}}{X_1 + Y_1\sqrt{D}} = \frac{X_1 - Y_1\sqrt{D}}{X_2 - Y_2\sqrt{D}}\\ &= \sqrt{\frac{X_2 + Y_2\sqrt{D}}{X_2 - Y_2\sqrt{D}}}\ \sqrt{\frac{X_1 - Y_1\sqrt{D}}{X_1 + Y_1\sqrt{D}}}\end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{y_2}{x_2}\sqrt{D}}{1-\frac{y_2}{x_2}\sqrt{D}}}\ \sqrt{\frac{1-\frac{y_1}{x_1}\sqrt{D}}{1+\frac{y_1}{x_1}\sqrt{D}}}$$

$$< \sqrt{\frac{1+\frac{y_2}{x_2}\sqrt{D}}{1-\frac{y_2}{x_2}\sqrt{D}}} < \sqrt{\frac{1+\sqrt{\frac{D}{D+1}}}{1-\sqrt{\frac{D}{D+1}}}}$$

$$< \sqrt{D+1}+\sqrt{D}$$

und daher auch

$$t-u\sqrt{D} > \sqrt{D+1}-\sqrt{D}$$

Durch Subtraction folgt hieraus

$$2u\sqrt{D} < 2\sqrt{D},$$

also $u < 1$ und demzufolge $u = 0$, $t = 1$.

In allen Fällen ist also

$$X_1X_2-DY_1Y_2 = \frac{m}{\delta^2}$$

$$X_1Y_2-X_2Y_1 = 0$$

und somit

$$X_2 = X_1, \qquad Y_2 = Y_1$$

Verschiedene Zahlenpaare führen also zu verschiedenen Wurzeln ω und es kann nicht $\chi(m) > \psi(m)$ sein.

Dann ist aber

$$S \geqq S' \geqq \mathfrak{N}.$$

Da jede zu $2D$ theilerfremde Zahl auf die Form $k+2DV$ gebracht werden kann, so zerfallen die Zahlenpaare x, y je nach den Werthen von k in $\varphi(2\Delta)$ Classen.

Die Anzahl der Zahlenpaare, welche einer bestimmten Zahl k entsprechen, wird für ein negatives D erhalten, wenn man die Anzahl $E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2\Delta}}\right)$ der Werthe von y mit der Anzahl

$$E\left(\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}-k}{2\Delta}\right)$$ der Werthe von x multiplicirt, und ist also

$$>\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2\Delta}}-1\right)\left(\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}-k}{2\Delta}-1\right),$$

also umsomehr

$$>\frac{n}{8\Delta\sqrt{\Delta}}-\frac{1+2\sqrt{\Delta}}{2\Delta}\sqrt{\frac{n}{2}}$$

Mithin ist

$$\mathfrak{N}>\frac{\varphi(2\Delta)}{8\Delta\sqrt{\Delta}}n-\frac{\varphi(2\Delta)(1+2\sqrt{\Delta})}{2\Delta}\sqrt{\frac{n}{2}}$$

Für ein positives D ist die Anzahl der Werthe von x für ein bestimmtes y

$$=E\frac{\sqrt{\frac{n}{2}}-k}{2\Delta}-E\frac{y\sqrt{D+1}+2D-k}{2D},$$

also

$$>\frac{1}{2D}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}-y\sqrt{D+1}\right)-2$$

und daher die Anzahl der Zahlenpaare x, y

$$>\frac{1}{2D}\left(\sqrt{\frac{n}{2}}E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}\right)-\sqrt{D+1}\,E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}\right)\left(1+E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}\right)\right)\right)$$

$$-2E\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}\right)$$

$$>\frac{1}{2D}\sqrt{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}-1\right)$$

$$-\frac{\sqrt{D+1}}{2D}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{2D}}\right)-\sqrt{\frac{n}{2D}}$$

$$>\left(1-\frac{\sqrt{D+1}}{2\sqrt{D}}\right)\frac{n}{8D\sqrt{D}}-\frac{(2\sqrt{D}+\sqrt{D+1}+4D)}{4D}\sqrt{\frac{n}{2D}}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{N} > \frac{\varphi(2D)}{8D\sqrt{D}}\left(1-\frac{\sqrt{D+1}}{2\sqrt{D}}\right)n-$$

$$-\frac{\varphi(2D)}{4D}(2\sqrt{D}+\sqrt{D+1}+4D)\sqrt{\frac{n}{2D}}$$

Setzt man also

$$g = \frac{\varphi(2\Delta)}{8\Delta\sqrt{\Delta}}, \qquad h = \frac{\varphi(2\Delta)}{2\Delta\sqrt{2}}(1+2\sqrt{\Delta})$$

oder

$$g = \frac{\varphi(2D)}{8D\sqrt{D}}\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D+1}{D}}\right),$$

$$h = \frac{\varphi(2D)(\sqrt{D+1}+2\sqrt{D}+4D)}{4D\sqrt{2D}},$$

je nachdem D negativ oder positiv ist, so wird

$$\mathfrak{N} \quad gn-\sqrt{n}$$

und daher nach (8)

$$U_n^{(i)} > g-\frac{h+r+2}{\sqrt{n}}$$

8.

Die Gleichung (4) ist auch auf die Reihen anwendbar, welche bei dem Beweise für die Darstellbarkeit von Primzahlen durch eine gegebene quadratische Form auftreten.[1]

Es sei für eine gegebene nicht quadratische Determinante D

$$f_1, f_2, \cdot \quad f_x$$

Lejeune Dirichlet, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1840, Crelle's Journal, Bd. 21, Comptes rendus, 1840.

H. Weber: Beweis des Satzes, dass jede eigentlich primitive quadratische Form unendlich viele Primzahlen darzustellen fähig ist. Math. Annalen, Bd. 20.

A. Meyer: Über einen Satz von Dirichlet; Crelle, Bd. 103.

P. Bachmann: Die analytische Zahlentheorie. Leipzig, 1894.

ein System von eigentlich primitiven quadratischen Fundamentalformen, welche beziehungsweise zu den Exponenten m_1, $m_2, \ldots m_\varkappa$ gehören und der Bedingung genügen, dass die Formel

$$f = f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$$

genau ein vollständiges System Ω von eigentlich primitiven Formen der Determinante D liefert, wenn e_1 alle Werthe 0, $1, \ldots m_1 - 1$, e_2 alle Werthe $0, 1, \ldots m_2 - 1, \ldots$ $e_\varkappa$ alle Werthe $0, 1, \ldots m_\varkappa - 1$ durchlaufen und $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$ die aus der Zusammensetzung von e_1 Formen f_1 mit e_2 Formen $f_2 \ldots$ mit $e_\varkappa$ Formen $f_\varkappa$ hervorgehende Form bezeichnet. Die Anzahl h aller Formen von Ω ist demnach

$$h = m_1 \, m_2 \ldots m_\varkappa.$$

Kommen unter den Zahlen $m_1, m_2, \ldots m_\varkappa$ gerade vor, so seien es die $\lambda - 1$ ersten

$$m_1, m_2, \ldots m_{\lambda-1}.$$

Alle sich selbst uneigentlich äquivalenten Formen des vollständigen Systems Ω ergeben sich dann aus der obigen Formel, wenn e_1 einen der Werthe $0, \frac{1}{2} m_1$, e_2 einen der Werthe $0, \frac{1}{2} m_2, \ldots e_{\lambda-1}$ einen der Werthe $0, \frac{1}{2} m_{\lambda-1}$ und $m_\lambda, \ldots m_\varkappa$ den Werth 0 annehmen. Die Anzahl l der eigentlich primitiven ambigen Classen oder der Geschlechter, in welche die Formen von Ω zerfallen, ist demnach $2^{\lambda-1}$. Dies gilt auch noch, wenn $\lambda = 1$, also keine der Zahlen $m_1, m_2, \ldots$ gerade und die Hauptclasse die einzige ambige Classe ist. Die Formen $f_\lambda \ldots f_\varkappa$ gehören dem Hauptgeschlechte an.

Hienach gibt es für die Determinante D λ Charaktere von der Form

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (-1)^{\frac{n^2-1}{8}} \quad (-1)^{\frac{n-1}{2} + \frac{n^2-1}{8}} \quad \left(\frac{n}{p}\right),$$

welche mit

$$\chi_1(n), \; \chi_2(n), \ldots \chi_\lambda(n)$$

bezeichnet werden mögen. Unter einem Charakterproducte der Determinante D werde das Product irgend einer Anzahl von verschiedenen Charakteren oder ein solcher Charakter selbst oder auch nur die Einheit verstanden, so dass alle Charakterproducte mit den Gliedern des entwickelt zu denkenden Productes

$$(1+\chi_1(n)).(1+\chi_2(n)).\quad.(1+\chi_\lambda(n))$$

zusammenfallen.

Das Legendre-Jacobi'sche Zeichen $\left(\frac{D}{n}\right)$ ist immer als Charakterproduct darstellbar, welches mindestens einen der Charaktere als Factor enthält. Ist $\Pi_0(n)$ dieses Charakterproduct, so hat man für alle zu $2D$ theilerfremde und durch Formen aus Ω darstellbare Zahlen n

$$\left(\frac{D}{n}\right) = \Pi_0(n) = 1.$$

Mittelst dieser Gleichung kann einer der in $\Pi_0(n)$ vorkommenden Charaktere, etwa $\chi_1(n)$, durch das Product $\frac{\Pi_0(n)}{\chi_1(n)}$ ausgedrückt werden.

Die l Charakterproducte, in welchen der Factor $\chi_1(n)$ nicht vorkommt, sollen kurz als unabhängige Charakterproducte bezeichnet werden. Zwei verschiedene unabhängige Charakterproducte, wofern es überhaupt zwei solche gibt, d. h. $l > 1$ ist, können nicht für alle Formen von Ω denselben Werth haben.

Es sei ω_1 eine beliebige $m_1$te, ω_2 eine beliebige $m_2$te,. $\omega_\varkappa$ eine beliebige $m_\varkappa$te Einheitswurzel und man bilde für jede Form $f_1^{e_1}f_2^{e_2}.\quad.f_\varkappa^{e_\varkappa}$ von Ω das Product $\omega_1^{e_1}\omega_2^{e_2}.\quad.\omega_\varkappa^{e_\varkappa}$, welches kurz das dieser Form zugehörige Product $\omega_1^{e_1}\omega_2^{e_2}.\quad.\omega_\varkappa^{e_\varkappa}$ heissen möge. Es gibt dann bei festen Werthen von $e_1, e_2,.\quad.e_\varkappa$ so viele solcher Producte, als es Wurzelverbindungen $\omega_1, \omega_2,.\quad.\omega_\varkappa$ gibt.

Unter den h Wurzelsystemen $\omega_1, \omega_2,.\quad.\omega_\varkappa$ gibt es l solche, für welche

$$\omega_1 = \pm 1, \qquad \omega_2 = \pm 1, \qquad \omega_{\lambda-1} = \pm 1, \qquad \omega_\lambda = \qquad = \omega_\varkappa = 1$$

ist. Sind

$$(\alpha_{01}, \alpha_{02},.\quad.\alpha_{0\varkappa}), (\alpha_{11}, \alpha_{12},.\quad.\alpha_{1\varkappa}),.\quad.(\alpha_{l-1,1}, \alpha_{l-1,2},.\quad.\alpha_{l-1,\varkappa})$$

diese Wurzelsysteme, wo $\alpha_{01} = \alpha_{02} = \quad = \alpha_{0\varkappa} = 1$, so können dieselben entweder alle möglichen Wurzelsysteme $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$ erschöpfen oder nicht, je nachdem $l = h$ oder $h > l$ ist. Im zweiten Falle lassen sich alle Wurzelsysteme in $\frac{h}{l}$ Reihen von der Form

$$(\alpha_{01}\alpha_1, \alpha_{02}\alpha_2, \ldots \alpha_{0\varkappa}\alpha_\varkappa), \quad (\alpha_{11}\alpha_1, \alpha_{12}\alpha_2, \ldots \alpha_{1\varkappa}\alpha_\varkappa), \ldots$$
$$(\alpha_{01}\beta_1, \alpha_{02}\beta_2, \ldots \alpha_{0\varkappa}\beta_\varkappa), \quad (\alpha_{11}\beta_1, \alpha_{12}\beta_2, \ldots \alpha_{1\varkappa}\beta_\varkappa), \ldots$$

$$(\alpha_{01}\varepsilon_1, \alpha_{02}\varepsilon_2, \ldots \alpha_{0\varkappa}\varepsilon_\varkappa), \quad (\alpha_{11}\varepsilon_1, \alpha_{12}\varepsilon_2, \ldots \alpha_{1\varkappa}\varepsilon_\varkappa), \ldots$$

vertheilen, wo

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \quad = \alpha_\varkappa = 1$$

Wenn das System $\beta_1^{-1}, \beta_2^{-1}, \ldots \beta_\varkappa^{-1}$ der conjugirten Werthe von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\varkappa$ nicht in der Reihe

$$(\alpha_{01}\beta_1, \alpha_{02}\beta_2, \ldots \alpha_{0\varkappa}\beta_\varkappa), \quad (\alpha_{11}\beta_1, \alpha_{12}\beta_2, \ldots \alpha_{1\varkappa}\beta_2).$$

vorkommt, so kann

$$\gamma_1 = \beta_1^{-1}, \gamma_2 = \beta_2^{-1}, \ldots \gamma_\varkappa = \beta_\varkappa^{-1}$$

gesetzt werden. Ebenso darf man annehmen, dass die Wurzelsysteme der fünften Reihe aus den conjugirten Werthen derjenigen Wurzeln bestehen, welche die Systeme der vierten Reihe bilden, wenn sie nicht schon der vierten Reihe angehören. So lassen sich die Wurzelsysteme

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\varkappa), \quad (\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\varkappa), \ldots \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\varkappa),$$

paarweise gruppiren und nur diejenigen Wurzelsysteme $(\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_\varkappa)$ bilden eine Ausnahme, deren conjugirte $(\delta_1^{-1}, \delta_2^{-1}, \ldots \delta_\varkappa^{-1})$ in der Reihe

$$(\alpha_{01}\delta_1, \alpha_{02}\delta_2, \ldots \alpha_{0\varkappa}\delta_\varkappa), \quad (\alpha_{11}\delta_1, \alpha_{12}\delta_2, \ldots \alpha_{1\varkappa}\delta_\varkappa), \ldots$$

vorkommen.

Die Wurzelsysteme

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\varkappa), \quad (\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\varkappa), \ldots \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\varkappa)$$

sollen als engere Systeme bezeichnet werden.

Stellt man die Werthe auf, welche jedes einzelne unabhängige Charakterproduct $\Pi(m)$ für die durch die Fundamentalformen $f_1, f_2, \ldots f_\varkappa$ darstellbaren zu $2D$ theilerfremden Zahlen m annimmt, so erhält man l Systeme von $\lambda-1$ positiven oder negativen Einheiten. Diese Werthsysteme sind alle untereinander verschieden. Fielen nämlich zwei solche Werthsysteme zusammen, so hätten die betreffenden Charakterproducte auch für alle h Formen von Ω gleiche Werthe, was nicht der Fall ist. Die genannten Werthsysteme sind daher genau alle Systeme von $\lambda-1$ positiven oder negativen Einheiten, welche man überhaupt bilden kann. Es muss also auch ein und nur ein Charakterproduct $\Pi(m)$ geben, für welches

$$\Pi(m_1) = \alpha_{i1}, \quad \Pi(m_2) = \alpha_{i2} \ldots \Pi(m_\varkappa) = \alpha_{i\varkappa}$$

wird, wenn allgemein m_μ eine durch f_μ dargestellte zu $2D$ theilerfremde Zahl bezeichnet. Es ist dann für jede Form $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$, welche zu demselben Geschlechte wie eine die Zahl m darstellende Form gehört,

$$\Pi(m) = \alpha_{i1}^{e_1}\, \alpha_{i2}^{e_2} \ldots \alpha_{i\varkappa}^{e_\varkappa}.$$

Die Producte

$$\alpha_{01}^{e_1} \alpha_{02}^{e_2} \ldots \alpha_{0\varkappa}^{e_\varkappa}, \quad \alpha_{11}^{e_1} \alpha_{12}^{e_2} \ldots \alpha_{1\varkappa}^{e_\varkappa}, \qquad \alpha_{l-1\,1}^{e_1} \alpha_{l-1\,2}^{e_2} \ldots \alpha_{l-1\,\varkappa}^{e_\varkappa}$$

sollen mit

$$P_0, P_1, \ldots P_{l-1},$$

die Producte

$$\alpha_1^{e_1} \alpha_2^{e_2} \ldots \alpha_\varkappa^{e_\varkappa}, \quad \beta_1^{e_1} \beta_2^{e_2} \ldots \beta_\varkappa^{e_\varkappa}, \quad \varepsilon_1^{e_1} \varepsilon_2^{e_2}.$$

mit

$$Q_0, Q_1, \ldots Q_{n-1}$$

bezeichnet werden.

9.

Es sei ferner[1] eine positive Zahl M gegeben, welche durch 8 und D theilbar ist, und es sei

$$M = 2^\vartheta q^\rho \ldots$$

[1] A. Meyer, l. c.

wo $q, .$ die ungeraden Primfactoren von M bezeichnen. Man stelle für jede zu M theilerfremde Zahl m eine Reihe von Indices auf, welche sich auf die Moduln

$$4,\ 2^{\vartheta},\ q^{\rho}, .$$

beziehen, und bilde aus Wurzeln $\eta,\ \omega, .$ der Gleichungen

$$\varepsilon^2 = 1, \qquad \eta^{\varphi(2^{\vartheta}-1)} = 1, \qquad \omega^{\varphi(q^{\rho})} = 1 .$$

das Product

$$W = \varepsilon^{\frac{1}{2}(m-1)}\,\eta^{\operatorname{in} dm}\,\omega^{\operatorname{in} dm}$$

Für ein gegebenes zu M theilerfremdes m hat der Ausdruck W $\varphi(M)$ Werthe, welche allen möglichen Combinationen der Werthe der Wurzeln

$$\eta,\ \omega, .$$

entsprechen. Unter diesen Werthen gibt es einen, welcher mit dem Charakterproduct $\Pi_0(m)$ zusammenfällt und mit

$$\varepsilon_0^{\frac{1}{2}(m-1)}\,\eta_0^{\operatorname{in} dm}\,\omega^{\operatorname{in} dm}$$

bezeichnet werden möge. Denn man braucht nur, um dieses Charakterproduct zu erhalten, für jedes in $\Pi_0(m)$ stehende Legendre'sche Symbel $\left(\frac{m}{p}\right)$ die der betreffenden Potenz von p entsprechende Wurzel $= -1$, die den in M, aber nicht in D aufgehenden ungeraden Primzahlpotenzen entsprechenden Wurzeln dagegen $= 1$ und überdies, wenn in $\Pi_0(m)$ einer der Charaktere

$$(-1)^{\frac{m-1}{2}} \quad (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \qquad (-1)^{\frac{m-1}{2}+\frac{m^2-1}{8}}$$

vorkommt, beziehungsweise

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_0 = -1 & \eta_0 = 1 \\ \varepsilon_0 = 1 & \eta_0 = -1 \\ \varepsilon_0 = -1 & \eta_0 = -1 \end{array}$$

zu setzen.

Mit Hilfe des Wurzelsystemes

$$\varepsilon_0,\ \eta_0,\ \omega_0,.$$

können alle Wurzelsysteme

$$\eta,\ \omega,..$$

derart in Paare vertheilt werden, dass, wenn das eine Wurzelsystem eines Paares aus den Wurzeln $\varepsilon, \eta, \omega,.$ besteht, das andere Wurzelsystem desselben Paares von den Wurzeln $\varepsilon_0.\varepsilon, \eta_0.\eta, \omega_0.\omega,.$ gebildet wird. Nimmt man aus je einem solchen Paare ein Wurzelsystem, so sollen die so erhaltenen $\frac{1}{2}\varphi(M)$ Systeme engere Wurzelsysteme genannt werden. Zu demselben möge das Wurzelsystem

$$\varepsilon = 1, \qquad \eta = 1, \qquad \omega = 1..$$

gehören. Die Werthe von W für die engeren Wurzelsysteme sollen mit

$$\psi_0(m),\ \psi_1(m),\ \psi_2(m),\ldots\psi_{\mathfrak{m}-1}(m)$$

bezeichnet werden, wo $\psi_0(m)$ den Wurzeln $\varepsilon = \eta = \omega = .\ . = 1$ entspricht.

Hat W für ein Wurzelsystem eines Paares den Werth $\psi_i(m)$, so hat es für das andere Wurzelsystem desselben Paares den Werth $\psi_i(m)\Pi_0(m)$. Für alle zu M theilerfremde durch Formen aus Ω darstellbare Zahlen m fallen diese zwei Werthe zusammen.

Für eine zu M nicht theilerfremde Zahl m soll für jedes i

$$\psi_i(m) = 0$$

festgesetzt werden.

10.

Es gibt $h\ \varphi(M)$ verschiedene Wurzelsysteme

$$\eta,\ \omega,\ldots\omega_1,\ \omega_2,.\ .\omega_\varkappa.$$

Ein solches Wurzelsystem heisse ein engeres, wenn sowohl die Wurzeln $\varepsilon, \eta, \omega..$ als auch die Wurzeln $\omega_1, \omega_2,\ldots\omega_\varkappa$ engere

Wurzelsysteme bilden. Die Anzahl $\frac{h}{l}\cdot\frac{1}{2}\varphi(M)$ dieser engeren Wurzelsysteme soll mit $1+r$ bezeichnet werden.

Bildet man das Product

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}(m-1)}\eta^{\operatorname{in} dm}\omega^{\operatorname{in} dm}\ldots\omega_1^{e_1}\omega_2^{e_2}\ldots\omega_\varkappa^{e_\varkappa}$$

für irgend eine zu M theilerfremde und durch Formen aus Ω darstellbare Zahl m und für die Exponenten $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ irgend einer Form $f_1^{e_1}f_2^{e_2}\ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$, welche demselben Geschlechte angehört, wie eine die Zahl m darstellende Form, so durchläuft dasselbe für alle möglichen Wurzelsysteme

$$\eta, \omega, \ldots \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$$

jeden der Werthe, welche es für die engeren Wurzelsysteme annimmt, also die Werthe

$$\begin{array}{l}\psi_0(m)Q_0,\ \psi_1(m)Q_0, \ldots \psi_{\mathfrak{m}-1}(m)Q_0\\ \psi_0(m)Q_1,\ \psi_1(m)Q_1, \ldots \psi_{\mathfrak{m}-1}(m)Q_1\\ \\ \psi_0(m)Q_{\mathfrak{n}-1},\ \psi_1(m)Q_{\mathfrak{n}-1}, \ldots \psi_{\mathfrak{m}-1}(m)Q_{\mathfrak{n}-1}\end{array} \tag{9}$$

genau $2l$ mal. Denn man erhält alle möglichen Werthe des obigen Productes, wenn man jeden Ausdruck $\psi_a(m)Q_b(m)$ mit je einem der $2l$ Factoren

$$\begin{array}{l}P_0,\ P_1, \ldots P_{l-1}\\ P_0\Pi_0(m),\ P_1\Pi_0(m), \ldots P_{l-1}\Pi_0(m)\end{array}$$

multiplicirt. Da aber diese Factoren bestimmten Charakterproducten $\Pi(m)$ und daher auch bestimmten Ausdrücken $\psi_i(m)$ gleich sind, so ändert die Multiplication mit denselben nicht die Gesammtheit der Grössen (9).

11.

Es sei m eine zu M theilerfremde und durch Formen aus Ω darstellbare Zahl und Q_b ein auf das Exponentensystem $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ einer Form $f_1^{e_1}f_2^{e_2}\ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$ sich beziehendes Wurzelproduct, welche zu demselben Geschlechte wie die die Zahl m darstellenden Formen gehört; es sei ferner μ die kleinste positive Zahl von der Art, dass das μfache aller in $\psi_a(m)Q_b$ vorkommenden Indices und aller Exponenten $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$, beziehungsweise durch die Zahlen

$$2,\ \varphi(2^{\vartheta-1}),\ \varphi(q^\rho), \ldots m_1,\ m_2, \ldots m_\varkappa$$

theibar wird. Es ist dann, wenn $\mu > 1$, für jedes i, welches > 0 und $< \mu$ ist,

$$\Sigma \psi_a^i(m)\, Q_b^i = 0,$$

wo die Summe über alle Werthe von a und b zu erstrecken ist.

Das $2l$fache dieser Summe ist nämlich die über alle möglichen Wurzelsysteme

$$\varepsilon,\ \eta,\ \omega, \ldots \omega_1,\ \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$$

zu erstreckende Summe

$$\Sigma\, \varepsilon^{i\frac{1}{2}(m-1)} \eta^{i \operatorname{in} dm} \omega^{i \operatorname{in} dm} \ldots \omega_1^{ie_1} \omega_2^{ie_2} \ldots \omega_\varkappa^{ie_\varkappa}.$$

Letztere zerfällt aber in ein Product von Theilsummen, welche eine der Gestalten

$$1 + (-1)^{i\frac{m-1}{2}}$$

$$1 + \zeta^{i \operatorname{in} dm} + \zeta^{2i \operatorname{in} dm} + \ldots + \zeta^{(\varphi k - 1) i \operatorname{in} dm}$$

$$1 + \zeta^{ie_\alpha} + \zeta^{2ie_\alpha} + \ldots + \zeta^{(m_\alpha - 1) ie_\alpha}$$

haben, wo ζ eine primitive $\varphi(k)^{\text{te}}$ oder $m_\alpha{}^{\text{te}}$ Einheitswurzel und k eine der Zahlen

$$2^{\vartheta-1},\ q^\rho, .$$

ist. Eine solche Theilsumme verschwindet aber immer, wenn $i\frac{1}{2}(m-1)$ nicht durch 2 oder $i \operatorname{in} dm$, nicht durch $\varphi(k)$, oder endlich ie_α nicht durch m_α theilbar ist.

Da das Product $\psi_a(m)Q_b$ für alle Werthe von a und b eine μ^{te} Einheitswurzel ist, so lässt sich die vorstehende Gleichung in der Form

$$h_0 + h_1 t^i + h_2 t^{2i} + \ldots + h_{\mu-1} t^{(\mu-1)i} = 0$$

schreiben, wenn t eine primitive μ^{te} Einheitswurzel bezeichnet und h_α ausdrückt, wie viele unter den Producten $\psi_a(m)Q_b = t^\alpha$ sind. Nimmt man die Gleichung

$$h_0+h_1+h_2+\ldots+h_{\mu-1} = 1+r$$

hinzu, so ergibt sich

$$h_0 = h_1 = \ldots = h_{\mu-1} = \frac{1+r}{\mu}.$$

Dies gilt auch noch für $\mu = 1$.

Man hat daher, über alle Werthe von a und b erstreckt,

$$\begin{aligned}\Pi(1-z\psi_a(m)Q_b) &= ((1-z)(1-tz)(1-t^2z)\ldots(1-t^{\mu-1}z))^{\frac{1+r}{\mu}}\\ &= (1-z^\mu)^{\frac{1+r}{\mu}}\end{aligned}$$

12.

Man bezeichne eine quadratische Form

$$\left(\frac{m}{\delta^2},\ v,\ \frac{v^2-D}{m}\delta^2\right)$$

kurz als Hilfsform der Zahl m für die Determinante D, wenn δ^2 ein quadratischer Theiler von m und v eine nicht negative unter dem Zahlenwerthe von $\frac{m}{\delta^2}$ liegende Wurzel der Congruenz

$$z^2 \equiv D \quad \left(\operatorname{mod} \frac{m}{\delta^2}\right)$$

ist. Man stelle für jede zu M theilerfremde Zahl m alle möglichen Hilfsformen auf, bestimme, falls solche Hilfsformen existiren, für jede derselben die äquivalente Form $f_1^{e_1}f_2^{e_2}\ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$ in Ω und bezeichne die Summe der Producte Q_b, welche sich auf alle erhaltenen Exponentensysteme $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ beziehen, mit $\Theta_b(m)$. Existiren aber keine Hilfsformen der Zahl m, so sei

$$\Theta_b(m) = 0.$$

Dies vorausgeschickt, sei (a, b) das i^{te} der r Zahlenpaare

$$\begin{array}{llll} & (1, 0), (2, 0), & & (\mathfrak{m}-1, 0) \\ & (0, 1), (1, 1), (2, 1), & & (\mathfrak{m}-1, 1) \\ & (0, 2), (1, 2), (2, 2), & & (\mathfrak{m}-1, 2) \\ (0, \mathfrak{n}-1), & (1, \mathfrak{n}-1), & (2, \mathfrak{n}-1, & (\mathfrak{m}-1, \mathfrak{n}-1) \end{array} \tag{10}$$

und man setze

$$\frac{\psi_a(m)\Theta_b(m)}{m} = u_m^{(i)}$$

Es fragt sich, ob die Formel (4) auf die r Ausdrücke

$$U_n^{(i)} = \frac{\psi_a(1)\Theta_b(1)}{1} + \frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)}{2} + . \quad + \frac{\psi_a(n)\Theta_b(n)}{n}$$

anwendbar ist,

13.

Die Summe

$$\Phi(z) = \psi_a(1)\Theta_b(1) + \psi_a(2)\Theta_b(2) + \quad + \psi_a(\mathfrak{z})\Theta_b(\mathfrak{z}),$$

wo $\mathfrak{z} = E(z)$, ist für jedes der Zahlenpaare (10) eine Grösse von der Ordnung $\sqrt{z}$.

Fasst man nämlich in derselben alle Glieder zusammen, in welchen $e_1, e_2, . \quad . e_\varkappa$ dieselben Werthe haben, so erscheint das der Form $f_1^{e_1} f_2^{e_2}. \quad . f_\varkappa^{e_\varkappa}$ zugehörige Product

$$Q_b = \omega_1^{e_1}\omega_2^{e_2} \quad . \omega_\varkappa^{e_\varkappa}$$

mit der Summe S derjenigen Ausdrücke $\psi_a(m)$ multipliciert, in welchen die Zahlen m eine mit $f_1^{e_1} f_2^{e_2}. \quad . f_\varkappa^{e_\varkappa}$ äquivalente Hilfsform $\left(\frac{m}{\delta^2}, v, \frac{v^2 - D}{m}\delta^2\right)$ besitzen. Aus jeder die Form

$$f = f_1^{e_1} f_2^{e_2} . . . f_\varkappa^{e_\varkappa}$$

in eine solche Hifsform verwandelnden Substitution $(\alpha, \alpha'; \gamma, \gamma')$ geht eine Darstellung der Zahl m durch f hervor, wenn

$$x = \delta\alpha \qquad y = \delta\gamma$$

gesetzt wird. Es gibt aber genau τ solche Substitutionen, wenn τ bei negativer Determinante die Anzahl der Lösungen der Pell'schen Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1$$

bezeichnet und bei positiver Determinante $\tau = 1$ gesetzt und α, γ den Bedingungen

$$\alpha > 0 \qquad 0 \leqq \gamma < \frac{AU}{T-BU}\alpha$$

unterworfen werden, wo A, B die beiden ersten Coëfficienten der Form f und T, U die kleinste positive Lösung der Pell'schen Gleichung bedeuten. Man erhält daher auch das τfache der Summe S, wenn man die Ausdrücke $\psi_a(f(x,y))$ addirt, welche aus allen Zahlenpaaren x, y mit folgenden Eigenschaften hervorgehen: $f(x,y)$ muss zu M theilerfremd und nicht grösser als z ausfallen und bei positiver Determinante haben x, y überdies den Bedingungen

$$x > 0 \qquad 0 \leqq y < \frac{AU}{T-BU}x$$

zu genügen.

Es sind zunächst die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufzusuchen, welche die Zahlen x, y erfüllen müssen, damit $f(x,y)$ zu M theilerfremd ausfalle. Setzt man

$$x = \xi + uM \qquad 0 \leqq \xi < M$$
$$y = \zeta + vM \qquad 0 \leqq \zeta < M,$$

so ist $f(x,y)$ zugleich mit $f(\xi, \zeta)$ theilerfremd zu M. Bestimmt man also durch Versuche alle Zahlenpaare ξ, ζ, für welche $f(\xi, \zeta)$ zu M theilerfremd ausfällt, so sind alle Zahlenpaare x, y, für welche $f(x,y)$ dieselbe Eigenschaft besitzt, ausschliesslich in den Paaren von arithmetischen Reihen

$$x = \xi + uM \qquad y = \zeta + vM$$

enthalten.

Da f für alle Zahlenpaare x, y, welche aus zwei bestimmten zusammengehörigen arithmetischen Reihen dieser Art hervorgehen, Zahlen von der Gestalt $f(\xi, \zeta)+\omega M$ darstellt, so hat $\psi_a(f(x,y))$ für alle diese Zahlenpaare denselben Werth $\psi_a(f(\xi,\zeta))$. Es genügt also, die Anzahl aller solcher Zahlenpaare zu kennen, für welche $f(x, y)$ nicht grösser als z ausfällt und im Falle einer positiven Determinante

$$0 \leqq \zeta + vM < \frac{AU}{T-BU}(\xi + vM)$$

ist. Diese Anzahl ist aber bekanntlich eine Zahl von der Form

$$\mathfrak{g} z + \mathfrak{h}\sqrt{z},$$

wo $\mathfrak{g}$ bei negativer Determinante den Werth $\frac{\pi}{M^2\sqrt{-D}}$ und bei positiver den Werth $\frac{\log(T+U\sqrt{D})}{2M^2\sqrt{D}}$ hat und $\mathfrak{h}$ eine feste Grenze $\mathfrak{h}_0$ nicht übersteigt.

Hienach ist derjenige Bestandtheil der Summe S, welcher sich auf die in zwei bestimmten zusammengehörigen arithmetischen Reihen enthaltenen darstellenden Zahlen x, y bezieht

$$= \frac{\mathfrak{g} z + \mathfrak{h}\sqrt{z}}{\tau}\psi_a(f(\xi, \zeta))$$

und S nimmt die Gestalt

$$S = \frac{\mathfrak{g}}{\tau} z\Sigma\psi_a(f(\xi, \zeta)) + \mathfrak{h}'\sqrt{z}$$

an, wo das Summenzeichen auf alle Zahlenpaare ξ, ζ zu erstrecken ist und $\mathfrak{h}'$ die Grenze $\frac{M^2}{\tau}\mathfrak{h}_0$ nicht übersteigt.

Setzt man den gefundenen Werth von S in die Gleichung

$$\Phi(z) = \Sigma Q_b S$$

ein, in welcher die Summe über alle Werthe von $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ zu erstrecken ist, so ergibt sich

$$\Phi(z) = \frac{\mathfrak{g} z}{\tau}\Sigma Q_b\psi_a(f(\xi, \zeta)) + \mathfrak{H}\sqrt{z},$$

wo jetzt die Summation sich auf alle Werthe von $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ und die zugehörigen Zahlenpaare ξ, ζ bezieht und $\mathfrak{H}$ die Grenze $\frac{hM^2}{\tau}$ nicht übersteigt.

Die Summe

$$L = \Sigma Q_b \psi_a(f(\xi, \zeta))$$

verschwindet aber für alle Zahlenpaare (10).

Um dies darzuthun, darf man der Einfachheit wegen den ersten Coëfficienten A von f theilerfremd zu M und den zweiten B durch M theilbar annehmen.

Ist nun das Wurzelsystem

$$\eta, \omega, \ldots$$

in dem Ausdrucke $\psi_a(m)$ so beschaffen, dass derselbe sich auf ein Charakterproduct $\Pi(m)$ reducirt, so hat $\psi_a(f(\xi, \zeta))$ für alle Zahlenpaare ξ, ζ denselben Werth $\Pi(A)$. Bringt man demnach $\Pi(A)$ auf die Gestalt $\varepsilon_1^{e_1}\varepsilon_2^{e_2} \ldots \varepsilon_\varkappa^{e_\varkappa}$ und setzt

$$Q_b = \omega_1^{e_1}\omega_2^{e_2} \ldots \omega_\varkappa^{e_\varkappa},$$

so wird

$$L = \mathfrak{A}\,\Sigma(\varepsilon_1\omega_1)^{e_1}(\varepsilon_2\omega_2)^{e_2} \ldots (\varepsilon_\varkappa\omega_\varkappa)^{e_\varkappa},$$

wo $\mathfrak{A}$ die Anzahl der Zahlenpaare ξ, ζ bezeichnet und die Summe über alle Werthe der Exponenten $e_1, e_2, \ldots e_\varkappa$ zu erstrecken ist. Es kann aber nicht zugleich

$$\omega_1 = \varepsilon_1 \qquad \omega_2 = \varepsilon_2 \qquad \omega_\varkappa = \varepsilon_\varkappa$$

sein, da alsdann wegen der Realität von $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_\varkappa$ $b = 0$ also

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \qquad = \varepsilon_\varkappa = 1$$

und daher auch $a = 0$ sein müsste. Da somit eines der Producte $\varepsilon_1\omega_1, \varepsilon_2\omega_2, \ldots \varepsilon_\varkappa\omega_\varkappa$ von 1 verschieden ist, so hat man

$$\Sigma(\varepsilon_1\omega_1)^{e_1}(\varepsilon_2\omega_2)^{e_2} \qquad (\varepsilon_\varkappa\omega_\varkappa)^{e_\varkappa} = 0$$

und demzufolge

$$L = 0.$$

Wenn aber $\psi_a(m)$ sich nicht auf ein Charakterproduct reducirt, so ist schon

$$\Sigma\psi_a(f(\xi, \zeta)) = 0.$$

Es seien q^ρ eine der in M genau aufgehenden ungeraden Primzahlpotenzen, ξ_0, ζ_0 die echten Reste von ξ, ζ in Bezug auf den Modul q^ρ, ξ_1, ζ_1 die von ξ, ζ in Bezug auf den Modul $\frac{M}{q^\rho}$ und ω die zu q^ρ gehörende Einheitswurzel in $\psi_a(f(\xi,\zeta))$. Man setze zur Abkürzung

$$f(\xi_0, \zeta_0) = m_0$$

$$\psi_a(f(\xi, \zeta)) = \omega^{\operatorname{in} df(\zeta,\xi)}\,\psi' = \omega^{\operatorname{in} dm_0}\psi'$$

Derjenige Bestandtheil der vorstehenden Summe, welcher sich auf alle Zahlenpaare ξ, ζ mit festen Resten ξ_1, ζ_1 bezieht, ist dann

$$= \psi' \Sigma\, \omega^{\operatorname{in} dm_0},$$

wo die Summation alle nicht negativen und q^ρ nicht erreichenden Zahlen ξ_0 und η_0 zu umfassen hat, welche der Form f einen zu q^ρ theilerfremden Werth m_0 ertheilen.

Geht nun q in M aber nicht in D auf, so durchläuft m_0 nach dem Modul q^ρ genau $q^\rho - \left(\frac{D}{q}\right) q^{\rho-1}$ mal ein vollständiges Restsystem von zu q^ρ theilerfremden Zahlen und in dm_0 demzufolge ebenso oft jede der Zahlen

$$0,\ 1,\ 2, \quad \ldots \quad \varphi(q^\rho) - 1\,.$$

Es ist also

$$\Sigma\, \omega^{\operatorname{in} dm_0} = \left(q^\rho - \left(\frac{D}{q}\right) q^{\rho-1}\right) \left(1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{\varphi(q^\rho)-1}\right)$$
$$= 0,$$

wenn nicht $\omega = 1$ ist.

Geht q in D auf, so ist

$$m_0 \equiv A\xi_0^{\,2} \pmod{q}$$

und daher

$$\operatorname{in} dm_0 \equiv \operatorname{in} dA \pmod{2};$$

in dm_0 durchläuft $2q^\rho$ mal jede der Zahlen

$$\operatorname{in} dA,\ \operatorname{in} dA + 2,\ \operatorname{in} dA + 4 \ldots \operatorname{in} dA + \varphi(q^\rho) - 2$$

und man hat

$$\Sigma\,\omega^{\mathrm{in}\,dm_0} = 2q^\rho\,\omega^{\mathrm{in}\,dA}(1+\omega^2+\omega^4+\ldots+\omega^{\varphi(q^\rho)-2})$$
$$= 0,$$

wenn nicht $\omega = \pm 1$ ist.

Ist endlich ξ_0, ζ_0 das echte Restepaar von ξ, ζ in Bezug auf den Modul 2^ϑ, ξ_1, ζ_1 das von ξ, ζ in Bezug auf den Modul $\frac{M}{2^\vartheta}$ und

$$f(\xi_0,\zeta_0) = m_0$$
$$\psi_a(f(\xi,\zeta)) = \varepsilon^{\frac{1}{2}(m_0-1)}\eta^{\mathrm{in}\,dm_0}\psi',$$

so ist

$$m_0 \equiv A\xi_0^2 + C\zeta_0^2 \pmod{2^\vartheta}$$

und man hat folgende Fälle zu unterscheiden.

Ist $D\equiv 1 \pmod 4$, so durchläuft m_0 in Bezug auf den Modul 2^ϑ 2^ϑ mal alle ungeraden Zahlen

$$1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ 2^\vartheta-1$$

und es ist daher

$$\Sigma\,\varepsilon^{\frac{1}{2}(m_0-1)}\eta^{\mathrm{in}\,dm_0} = (1+\varepsilon)\,(1+\eta+\eta^2+\ldots+\eta^{2^{\vartheta-2}-1})$$
$$= 0,$$

wenn nicht $\varepsilon = \eta = 1$ ist.

Ist $D\equiv 3 \pmod 4$ oder $D\equiv 4 \pmod 8$, so wird

$$m_0 \equiv A \pmod 4;$$

m_0 durchläuft also $2^{\vartheta+1}$ mal jede der Zahlen

$$1,\ 5,\ 9,\ \ldots\ 2^\vartheta-3$$

oder jede der Zahlen

$$3,\ 7,\ 11,\ \ldots\ 2^\vartheta-1,$$

je nachdem $A\equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod 4$ ist, und man hat

$$\Sigma\,\varepsilon^{\frac{1}{2}(m_0-1)}\eta^{\mathrm{in}\,dm_0} = \varepsilon^{\frac{A-1}{2}}(1+\eta+\eta^2+\ldots+\eta^{2^{\vartheta-2}-1})$$
$$= 0,$$

wenn nicht $\eta = 1$ ist.

Ist $D \equiv 0 \pmod 8$, so wird

$$m_0 \equiv A\xi_0^2 \equiv A \pmod 8;$$

m_0 durchläuft mod 2^ϑ $2^{\vartheta+2}$mal die Zahlen

$$A,\ A+8,\ A+16, \qquad A+2^\vartheta-8$$

also in dm_0 ebenso oft die Zahlen

$$\frac{A^2-1}{8},\ \frac{A^2-1}{8}+2,\ \frac{A^2-1}{8}+4,. \quad \frac{A^2-1}{8}+2^{\vartheta-2}_{-2}$$

Daher wird

$$\Sigma \varepsilon^{\frac{1}{2}(m_0-1)} \eta^{\text{in } dm_0} = 2^{\vartheta+2} \varepsilon^{\frac{A-1}{2}} \eta^{\frac{1}{8}(A^2-1)} (1+\eta^2+\eta^4+\ \ ..)$$
$$= 0,$$

wenn nicht $\eta = \pm 1$ ist.

Ist $D \equiv 2 \pmod 8$, so wird

$$m_0 \equiv A(\xi_0^2-2\eta_0^2) \equiv A(\vdash 2\eta_0^2) \pmod 8$$
$$\equiv \pm A \pmod 8;$$

m_0 durchläuft je $2^{\vartheta+1}$mal jede der Zahlenreihen

$$A, \quad A+8, \quad A+16$$
$$-A, \ -A+8, \ -A+16,..$$

also in dm_0 $2^{\vartheta+2}$mal die Zahlen

$$\frac{A^2-1}{8},\ \frac{A^2-1}{8}+2,\ \frac{A^2-1}{8}+4,.$$

Daher wird

$$\Sigma \varepsilon^{\frac{1}{2}(m_0-1)} \eta^{\text{in } dm_0} = 2^{\vartheta+1} \left(\varepsilon^{\frac{A-1}{2}} + \varepsilon^{\frac{A+1}{2}}\right) \eta^{\frac{A^2-1}{8}} (1+\eta^2+\eta^4+ \qquad)$$
$$= 0,$$

wenn nicht $\varepsilon = 1$, $\eta = \pm 1$ ist.

Ist endlich $D \equiv 6 \pmod 8$, so wird

$$m_0 \equiv A(\xi_0^2+2\eta_0^2) \equiv A(1+2\eta_0^2)$$
$$\equiv A$$

oder

$$\equiv 3A \pmod 8);$$

m_0 durchläuft mod 2^{ϑ} je $2^{\vartheta+1}$mal jede der Zahlenreihen

$$A,\quad A+8,\quad A+16, .$$

$$3A,\ 3A+8,\ 3A+16, .$$

also in dm_0 ebenso oft jede der Reihen

$$\frac{A^2-1}{8},\qquad \frac{A^2-1}{8}+2,\ \frac{A^2-1}{8}+4, .$$

$$\frac{A^2-1}{8}+1,\ \frac{A^2-1}{8}+3,\ \frac{A^2-1}{8}+5, .$$

Daher wird

$$\Sigma \varepsilon^{\frac{1}{2}(m_0-1)} \eta^{\text{in}\, dm_0} = 2^{\vartheta+1} \varepsilon^{\frac{A-1}{2}} \eta^{\frac{A^2-1}{8}} (1+\varepsilon\eta)(1+\eta^2+ \quad .)$$

$$= 0,$$

wenn nicht

$$\varepsilon = \eta = \pm 1$$

ist.

Es wird also

$$\Phi(z) = \mathfrak{H}\sqrt{z}$$

Dann ist aber

$$u_{\mathfrak{a}}^{(i)} + u_{\mathfrak{a}+1}^{(i)} + . \quad + u_{\mathfrak{b}}^{(i)} = \frac{\Phi(\mathfrak{a})-\Phi(\mathfrak{a}-1)}{\mathfrak{a}}$$

$$+ \frac{\Phi(\mathfrak{a}+1)-\Phi(\mathfrak{a})}{\mathfrak{a}+1} + \ldots + \frac{\Phi(\mathfrak{b})-\Phi(\mathfrak{b}-1)}{\mathfrak{b}}$$

$$= -\frac{\Phi(\mathfrak{a}-1)}{\mathfrak{a}} + \Phi(\mathfrak{a})\left(\frac{1}{\mathfrak{a}} - \frac{1}{\mathfrak{a}+1}\right)$$

$$+ \Phi(\mathfrak{a}+1)\left(\frac{1}{\mathfrak{a}+1} - \frac{1}{\mathfrak{a}+1}\right) +$$

$$+ \Phi(\mathfrak{b}-1)\left(\frac{1}{\mathfrak{b}-1} - \frac{1}{\mathfrak{b}}\right) + \frac{\Phi(\mathfrak{b})}{\mathfrak{b}},$$

also

$$\operatorname{mod}(u_{\mathfrak{a}}^{(i)}+u_{\mathfrak{a}+1}^{(i)}+\quad+u_{\mathfrak{b}}^{(i)})$$
$$\leqq \frac{h\mathfrak{h}_0 M^2}{\tau}\left(\frac{\sqrt{\mathfrak{a}-1}}{\mathfrak{a}}+\sqrt{\mathfrak{a}}\left(\frac{1}{\mathfrak{a}}-\frac{1}{\mathfrak{a}+1}\right)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\sqrt{\mathfrak{b}-1}\left(\frac{1}{\mathfrak{b}-1}-\frac{1}{\mathfrak{b}}\right)+\frac{\sqrt{\mathfrak{b}}}{\mathfrak{b}}\right)$$
$$< \frac{h\mathfrak{h}_0 M^2}{\tau}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}}}+2\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}}}-\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{a}+1}}\right)+\quad.+\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{b}-1}}-\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{b}}}\right)+\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{b}}}\right)$$
$$< \frac{3h\mathfrak{h}_0 M^2}{\tau\sqrt{\mathfrak{a}}}.$$

Formel (4) ist demnach auf die Ausdrücke $U_n^{(i)}$ anwendbar, wenn

$$\pi = \frac{1}{2}, \qquad f_j(n) = \frac{3h\mathfrak{h}_0 M^2}{\tau}$$

gesetzt wird.

14.

In dem vorliegenden Falle ist

$$\mathfrak{A}_n^{(i)} = \operatorname{mod}\frac{\psi_a(1)\Theta_b(1)}{1}+\operatorname{mod}\frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)}{2}+$$
$$+\quad+\operatorname{mod}\frac{\psi_a(n)\Theta_b(n)}{n}$$

Da aber die Anzahl der Hilfsformen einer zu $2D$ theilerfremden Zahl m höchstens der Anzahl $T(m)$ der Theiler dieser Zahl gleich ist, so hat man

$$\operatorname{mod}\Theta_b(m)\leqq T(m),$$

also auch

$$\operatorname{mod}\psi_a(m)\Theta_b(m)\leqq T(m)$$

und daher

$$\mathfrak{A}_n^{(i)}\leqq\frac{T(1)}{1}+\frac{T(2)}{2}+\quad+\frac{T(n)}{n}$$
$$<\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)^2$$
$$<(1+\log n)^2.$$

15.

Es handelt sich jetzt noch um den Nachweis, dass die Grössen $v_1, v_2, \ldots$ nicht negativ sind.

Es sei

$$F(m) = mv_m = \Sigma \Pi \psi_a(\delta_{a,b})\Theta_b(\delta_{a,b}),$$

wo das Productzeichen auf alle in (10) angeführten Zahlenpaare a, b und die Summe auf alle möglichen Gruppen von r ganzen positiven Zahlen

$$\delta_{01}, \delta_{02}, \ldots \delta_{10}, \delta_{11}, \ldots \delta_{m-1, n-1}$$

zu beziehen ist, deren Product in m aufgeht.

Sind m, m_1 theilerfremd zu einander, so ist

$$\Theta_b(m) . \Theta_b(m_1) = \Theta_b(mm_1).$$

Sind nämlich

$$f = \left(\frac{m}{\delta^2} \quad v, \frac{v^2-D}{m}\delta^2\right)$$

$$f_1 = \left(\frac{m_1}{\delta_1^2}, v_1, \frac{v_1^2-D}{m_1}\delta_1^2\right)$$

irgend zwei Hilfsformen von m und m_1, und setzt man

$$w \equiv v \quad \left(\operatorname{mod} \frac{m}{\delta^2}\right)$$

$$w \equiv v_1 \quad \left(\operatorname{mod} \frac{m_1}{\delta_1^2}\right),$$

wo $0 < w < \frac{mm_1}{(\delta\delta_1)^2}$, so ist

$$\left(\frac{mm_1}{(\delta\delta_1)^2} \quad w, \frac{w^2-D}{mm_1}(\delta\delta_1)^2\right)$$

eine aus f, f_1 zusammengesetzte Hilfsform von mm_1. Umgekehrt kann jede Hilfsform von mm_1 in dieser Weise aus zwei und nur zwei Hilfsformen von m und m_1 hervorgehen.

Hieraus folgt zunächst, dass es keine Hilfsformen von m oder m_1 gibt, wenn keine solche für mm_1 existiren.

Gibt es aber Hilfsformen für m und m_1 und sind die Hilfsformen von m den Formen

$$f_1^{a_1} f_2^{a_2} \ldots f_\varkappa^{a_\varkappa},\; f_1^{b_1} f_2^{b_2} \ldots f_\varkappa^{b_\varkappa}, .$$

die Hilfsformen von m_1 den Formen

$$f_1^{a'_1},\, f_2^{a'_2} \ldots f_\varkappa^{a'_\varkappa},\; f_1^{b'_1},\, f_2^{b'_2}, \ldots f_\varkappa^{b'_\varkappa}, .$$

äquivalent, so sind die Hilfsformen von mm_1 ausschliesslich den Formen

$$f_1^{a_1+a'_1} f_2^{a_2+a'_2} \ldots f_\varkappa^{a_\varkappa+a'_\varkappa},\; f_1^{a_1+b'_1} f_2^{a_2+b'_2} \ldots f_\varkappa^{a_\varkappa+b'_\varkappa}, .$$

äquivalent. Es ist dann

$$\Theta_b(m) = \omega_1^{a_1}\omega_2^{a_2} \ldots + \omega^{b_1}\omega_2^{b_2} +$$

$$\Theta_b(m_1) = \omega_1^{a'_1}\omega_2^{a'_2} \ldots + \omega^{b'_1}\omega_2^{b'_2} \ldots +$$

$$\Theta_b(mm_1) = \omega_1^{a_1+a'_1}\omega_2^{a_2+a'_2} \ldots + \omega_1^{a_1+b'_1}\omega_2^{a_2+b'_2} \ldots$$
$$+ \omega_1^{b_1+a'_1}\omega_2^{b_2+a'_2} \ldots +$$

und daher

$$\Theta_b(m)\Theta_b(m_1) = \Theta_b(mm_1).$$

Da überdies

$$\psi_a(m)\psi_a(m_1) = \psi_a(mm_1)$$

ist, so wird

$$\psi_a(m)\Theta_b(m) . \psi_b(m)\Theta_b(m_1) = \psi_a(mm_1)\Theta_b(mm_1)$$

und demzufolge

$$F(m)F(m_1) = F(mm_1).$$

Man braucht also $F(m)$ nur für eine in M nicht aufgehende, durch Formen von Ω darstellbare Primzahlpotenz p^σ zu ermitteln.

Ist $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$ einer Hilfsform von p äquivalent und Q_b das zugehörige Wurzelproduct $\omega_1^{e_1}\omega_2^{e_2} \ldots \omega_\varkappa^{e_\varkappa}$ so ist

$$\Theta_b(p) = Q_b + Q_b^{-1}$$

$$\Theta_b(p^2) = Q_b^2 + Q_b^0 + Q_b^{-2}$$

$$\Theta_b(p^\sigma) = Q_b^\sigma + Q_b^{\sigma-2} + \ldots + \Theta_b^{-\sigma}$$

$\Theta_b(p^\sigma)$ ist somit der Coëfficient von x^σ in der Entwicklung des Ausdruckes

$$\frac{1}{(1-xQ_b)(1-xQ_b^{-1})}$$

und somit $\psi_a(p^\sigma)\Theta_b(p^\sigma)$ der Coëfficient derselben Potenz von x in dem Ausdrucke

$$\frac{1}{(1-x\psi_a(p)Q_b)(1-x\psi_a(p)Q_b^{-1})}$$

Dann ist aber $F(p^\sigma)$ der Coëfficient von x^σ in der Entwicklung des Ausdruckes

$$\Pi\frac{1}{(1-x\psi_a(p)Q_b)(1-x\psi_a(p)Q_b^{-1})},$$

in welchem sich das Productzeichen auf alle Werthe 0, 1, . . $\mathfrak{m}-1$ von a und alle Werthe 0, 1,. . . $\mathfrak{n}-1$ von b bezieht und welcher nach Abschnitt 10

$$=\frac{1}{(1-x^\mu)^{2.\frac{r+1}{\mu}}}$$

ist. $F(p^\sigma)$ ist demnach eine nicht negative ganze Zahl.

Ist m nicht zu M theilerfremd, d ein Theiler von m und einer Potenz von M und $\frac{m}{d}$ zu M theilerfremd, so ist

$$F(m) = F\left(\frac{m}{d}\right),$$

also ebenfalls nicht negativ.

Insbesondere ist

$$F(1) = 1.$$

Es ist demnach

$$v_1+v_2+\ldots+v_n \geqq 1.$$

16.

Nach Formel (4) wird nun

$$S_n U_n^{(1)}U_n^{(2)}\ldots U_n^{(r)} - V_n^{(1)}U_n^{(2)}U_n^{(3)}\ldots U_n^{(r)} - \ldots - V_n^{(r)}U_n^{(1)}U_n^{(2)}\ldots U_n^{(r-1)} =$$
$$= v_1+v_2+\ldots+v_n+\{\Delta_n\},$$

wo Δ_n von der Ordnung $\dfrac{(\log n)^{2r-1}}{n^{\frac{1}{4r}}}$ ist. Mit Hilfe dieser Gleichung kann in derselben Weise, wie in Abschnitt 6 für den Modul jeder der Grössen $U_n^{(i)}$ eine untere von Null verschiedene Grenze angegeben werden, wenn es in der Reihe

$$U_n^{(1)},\ U_n^{(2)}, .\quad .U_n^{(r)}$$

noch eine zweite Grösse $U_n^{(k)}$ mit von i verschiedenem oberen Stellenzeiger k gibt, welche denselben Modul wie $U_n^{(i)}$ hat.

Da die Reihen

$$u_1^{(i)}+u_2^{(i)}+u_3^{(i)}+ .$$
$$u_2^{(i)}\log 2+u_3^{(i)}\log 3+ .$$

alle convergent sind, so kann man positive Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von der Art angeben, dass für jedes i

$$\operatorname{mod} U_n^{(i)} \leqq \mathfrak{A},$$
$$\operatorname{mod} V_n^{(i)} \leqq \mathfrak{B}$$

ist. Setzt man dann

$$\operatorname{mod} U_n^{(i)} = \operatorname{mod} U_n^{(k)} = R_n,$$

so wird

$$\operatorname{mod} S_n U_n^{(1)} U_n^{(2)} \ldots U_n^{(r)} \leqq (1+\log n)\,\mathfrak{A}^{r-2} R_n^2$$

und

$$\operatorname{mod} V_n^{(\mu)} U_n^{(\alpha)} U_n^{(\beta)} . \quad U_n^{(\varepsilon)} \leqq \mathfrak{A}^{r-2}\mathfrak{B} R_n$$

oder

$$\leqq \mathfrak{A}^{r-3}\mathfrak{B} R_n^2,$$

je nachdem nur eine der Zahlen i, k in der Reihe

$$\alpha,\ \beta, .$$

vorkommt oder beide. Daher ist

$$\mathfrak{A}^{r-3}(\mathfrak{A}(\log n+1)+(r-2)\mathfrak{B})\,R_n^2+2\,\mathfrak{A}^{r-2}\mathfrak{B} R_n$$
$$\geqq 1-\Delta_n$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\mathfrak{A}(\log n+1)+(r-2)\mathfrak{B} = \mathfrak{C}_n$$

gesetzt wird,

$$R_n^2 + 2\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}_n} R_n \geqq \frac{1-\Delta_n}{\mathfrak{A}^{r-3}\mathfrak{C}_n}.$$

Hieraus folgt

$$R_n + \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}_n} \geqq \sqrt{\frac{1-\Delta_n}{\mathfrak{A}^{r-3}\mathfrak{C}_n} + \frac{\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{C}_n^2}}$$

Bestimmt man nun s so, dass

$$\Delta_s < \frac{1}{2}$$

und zugleich

$$\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}_s} + \frac{3h\mathfrak{h}_0 M^2}{\tau\sqrt{s}} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\mathfrak{A}^{r-3}\mathfrak{C}_s} + \frac{\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{C}_s^2}}$$

wird, so hat man von $n = s$ an

$$R_n > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\mathfrak{A}^{r-1}\mathfrak{C}_s} + \frac{\mathfrak{A}^2\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{C}_s^2}}.$$

Entspricht die Grösse $U_n^{(i)}$ einem Wurzelsystem

$$\eta, \omega, \ldots \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa,$$

für welches Q_b imaginär ist und Q_b^{-1} nicht in der Reihe

$$Q_b P_0, \; Q_b P_1, \ldots \; Q_b P_{l-1}$$

vorkommt, so kommt die dem conjugirten Wurzelsysteme

$$\varepsilon^{-1}, \eta^{-1}, \omega^{-1}, \ldots \omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}, \ldots$$

entsprechende Grösse $U_n^{(k)}$ ebenfalls in der Reihe

$$U_n^{(1)}, \; U_n^{(2)}, \ldots$$

vor und hat einen von i verschiedenen oberen Stellenzeiger k.

Ist Q_b imaginär und kommt Q_b^{-1} in der Reihe

$$Q_b P_0, \; Q_b P_1, \ldots \; Q_b P_{l-1}$$

vor, so hat man

$$Q_b^{-1} = Q_b P_\delta$$

und $\delta > 0$. Ist dann

$$U_n^{(i)} = \frac{\psi_a(1)\Theta_b(1)}{1} + \frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)}{2} +$$

und setzt man

$$\psi_a(m) P_\delta = \psi_c(m),$$

$$U_n^{(k)} = \frac{\psi_c(1)\Theta_b(1)}{1} + \frac{\psi_c(2)\Theta_b(2)}{2} + \ldots,$$

so ist k von i verschieden und

$$U_n^{(k)} = U_n^{(i)}$$

Denn der conjugirte Werth von $\Theta_b(m)$ ist einerseits $= P_\delta \Theta_b(m)$ und anderseits $= \Theta_b(m)$, da $\Theta_b(m)$ reell ist. Man hat also

$$\Theta_b(m) P_\delta = \Theta_b(m)$$

und demzufolge

$$\Theta_b(m) = 0$$

für alle Zahlen m, wo $P_\delta = -1$ ist. Ist aber $P_\delta = 1$, so ist $\psi_a(m) = \psi_c(m)$.

Wenn also Q_b imaginär ist, so ist die Reihe

$$\frac{\psi_a(1)\Theta_b(1)}{1} + \frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)}{2} +$$

immer von Null verschieden.

17

Ist Q_i reel, also $i = 0$, so ist $\Theta_0(m)$ die Anzahl aller Theiler von m oder Null, je nachdem m durch Formen aus Ω darstellbar ist oder nicht. In beiden Fällen ist, über alle Theiler δ von m erstreckt,

$$\Theta_0(m) = \Sigma\left(\frac{D}{\delta}\right).$$

Für jede zu $2D$ theilerfremde Zahl m ist aber

$$\left(\frac{D}{m}\right) = \Pi_0(m)$$

$$= \varepsilon_0^{\frac{1}{2}(m-1)} \eta_0^{\operatorname{in} dm} \omega_0^{\operatorname{in} dm}$$

Ist daher

$$\psi_a(m) = \varepsilon^{\frac{1}{2}(m-1)} \eta^{\text{in } dm} \omega^{\text{in } dm}.$$

und setzt man

$$\psi_c(m) = (\varepsilon\varepsilon_0)^{\frac{1}{2}(m-1)} (\eta\eta_0)^{\text{in } dm} (\omega\omega_0)^{\text{in } dm}$$

so besteht weder das Wurzelsystem

$$\varepsilon, \eta, \omega, .$$

noch das System

$$\varepsilon\varepsilon_0, \eta\eta_0, \omega\omega_0, .$$

aus lauter positiven Einheiten. Man kann also den Satz des Abschnittes 3 auf das Product der beiden Reihen

$$\frac{\psi_a(1)}{1} + \frac{\psi_a(2)}{2} + \frac{\psi_a(3)}{3} +$$

$$\frac{\psi_c(1)}{1} + \frac{\psi_c(2)}{2} + \frac{\psi_c(3)}{3} +$$

anwenden. Dasselbe ergibt sich

$$= \frac{C_1}{1} + \frac{C_2}{2} + \frac{C_3}{3} +$$

wo, über alle Lösungen α, β der Gleichung

$$\alpha\beta = m$$

erstreckt,

$$C_m = \Sigma\, \psi_a(\alpha)\psi_c(\beta)$$

ist. Es ist aber

$$\psi_a(\alpha)\psi_c(\beta) = \psi_a(\alpha)\psi_a(\beta)\Pi_0(\beta)$$

$$= \psi_a(m)\left(\frac{D}{\beta}\right)$$

und demzufolge

$$C_m = \psi_a(m)\Sigma\left(\frac{D}{\beta}\right)$$

$$= \psi_a(m)\Theta_0(m).$$

Daher ist

$$\frac{\psi_a(1)\Theta_0(1)}{1}+\frac{\psi_a(2)\Theta_0(2)}{2}+\frac{\psi_a(3)\Theta_0(3)}{3}+$$

$$=\left(\frac{\psi_a(1)}{1}+\frac{\psi_a(2)}{2}+\quad\right)\left(\frac{\psi_c(1)}{1}+\frac{\psi_c(2)}{2}+\quad\right)$$

und somit nach Abschnitt 6, 7 von Null verschieden.

18.

Steht einmal fest, dass alle Reihen

$$\frac{\psi_a(1)\Theta_b(1)}{1}+\frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)}{2}+\frac{\psi_a(3)\Theta_b(3)}{3}+.$$

von Null verschieden sind, so kann der Dirichlet'sche Satz über die Darstellbarkeit von Primzahlen einer bestimmten zulässigen Linearform durch eine gegebene eigentlich primitive quadratische Form f in derselben Weise bewiesen werden, wie ich es in dem 77ten Bande des Crelle'schen Journals ausgeführt habe. Man kann nämlich für die Summe der natürlichen Logarithmen aller bis zu einer gegebenen Grenze G vorkommenden Primzahlen der in Rede stehenden Art, deren jeder durch eben diese Primzahl dividirt ist, einen asymptotischen Ausdruck von der Gestalt

$$\frac{2l}{\sigma h\varphi(M)}\log G+\{\Gamma\}$$

aufstellen, wo Γ eine angebbare Constante und $\sigma=2$ oder $=1$ ist, je nachdem die Form f ambig ist oder nicht. Dieser Ausdruck enthält unmittelbar den gewünschten Beweis. Nimmt man z. B.

$$n\geqq e^{\frac{\Gamma\sigma\varphi(M)}{l}}$$

so weiss man, dass zwischen n und n^2 sicher Primzahlen der gewünschten Art anzutreffen sind.

Setzt man für eine Primzahl p

$$\Theta_b(p)=\mathcal{Q}_b+\mathcal{Q}_b^{-1},$$

so ist $\psi_a(p^\mu)\,\Theta_b(p^\mu)$ der Coëfficient von x^μ in der Entwickelung des Ausdruckes

$$\frac{1}{(1-x\psi_a(p)\varrho_b)\,(1-x\psi_a(p)\varrho_b^{-1})};$$

differentiirt man diesen Ausdruck nach x, so erscheint $\mu\psi_a(p^\mu)$ $\Theta_b(p^\mu)$ als Coëfficient von $x^{\mu-1}$ in dem Ausdrucke

$$\frac{1}{(1-x\psi_a(p)\varrho_b(p))(1-x\psi_a(p)\varrho_b^{-1})}\left(\frac{\psi_a(p)\varrho_b}{1-x\psi_a(p)\varrho_b}+\frac{\psi_a(p)\varrho_b^{-1}}{1-x\psi_a(p)\varrho_b^{-1}}\right)$$

$$=(1+x\psi_a(p)\Theta_b(p)+x^2\psi_a(p^2)\Theta_b(p^2)+\quad)$$
$$(\psi_a(p)\Theta_b(p)+x\psi_a(p^2)(\varrho_b^2+\varrho_b^{-2})+\quad)$$

Es ist also

$$\begin{aligned}\mu\psi_a(p^\mu)\Theta_b(p^\mu) = {} & \psi_a(p)(\varrho_b+\varrho_b^{-1})\psi_a(p^{\mu-1})\ \Theta_b(p^{\mu-1})\\ & +\psi_a(p^2)(\varrho_b^2+\varrho_b^{-2})\psi_a(p^{\mu-2})\Theta_b(p^{\mu-2})\\ & +\\ & +\psi_a(p^\mu)(\varrho_b^\mu+\varrho_b^{-\mu})\psi_a(1)\varrho_b(1).\end{aligned}$$

Hieraus folgt allgemeiner, wenn $m=m^1p^\mu$ und m^1 nicht mehr durch p theilbar ist,

$$\mu\psi_a(m)\Theta_b(m)=\sum_{k=1}^{k=\mu}\psi_a(p^k)\,(\varrho_b^k+\varrho_b^{-k})\,\psi_a\left(\frac{m}{p^k}\right)\Theta_b\left(\frac{m}{p^k}\right).$$

Man zerlege nun in jedem Gliede $\dfrac{\psi_a(m)\Theta_b(m)\log m}{m}$ des Ausdruckes

$$B_n=\frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)\log 2}{2}+\frac{\psi_a(3)\Theta_b(3)\log 3}{3}$$
$$+\quad+\frac{\psi_a(n)\Theta_b(n)\log n}{n}$$

den Logarithmus in die Logarithmen der Primfactoren von m und ordne das Resultat nach den Logarithmen der einzelnen Primzahlen. Tritt die Primzahl p in m genau μmal als Factor auf, so liefert das Glied $\dfrac{\psi_a(m)\Theta_b(m)\log m}{m}$ zu dem Gesammtgliede mit $\log p$ den Beitrag

$$\frac{\log p}{m}\cdot\mu\,\psi_a(m)\,\Theta_b(m)=\psi_a(p)\,(Q_b+Q_b^{-1})\,\frac{\log p}{p}\,\frac{\psi_a(m_1)(Q_b m_1)}{m_1}$$

$$+\psi_a(q^2)\,(Q_b^2+Q_b^{-2})\,\frac{\log q}{q^2}\,\frac{\psi_a(m_2)\,\Theta_b(m_2)}{m_2}$$

$$+$$

wo

$$m_1=\frac{m}{q},\ m_2=\frac{m}{p^2},$$

Setzt man

$$F(z)=\frac{\psi_a(1)\,\Theta_b(1)}{1}+\frac{\psi_a(2)\,\Theta_b(2)}{2}+\ldots+\frac{\psi_a(\nu)\,\Theta_b(\nu)}{\nu},$$

wo $\nu=E(z)$, so wird demnach

$$B_{\eta}=\sum F\left(\frac{n}{p}\right)\psi_a(p)\,(Q_b+Q_b^{-1})\,\frac{\log p}{p}$$

$$+\sum F\left(\frac{n}{p^2}\right)\psi_a(p^2)(Q_b^2+Q_b^{-2})\,\frac{\log p}{p^2}$$

$$+\sum F\left(\frac{n}{p^3}\right)\psi_a(p^3)(Q_b^3+Q_b^{-3})\,\frac{\log p}{p^3}$$

$$+\ldots$$

Nun ist nach Abschnitt 13

$$F\left(\frac{n}{p}\right)=F(\infty)+\left\{\frac{3hf_0M^2}{\sqrt{n}}\right\}\sqrt{p}$$

und

$$\sum F\left(\frac{n}{p^2}\right)\psi_a(p^2)(Q_b^2+Q_b^{-2})\,\frac{\log p}{p^2}$$

$$+\sum F\left(\frac{n}{p^3}\right)\psi_a(p^3)(Q_b^3+Q_b^{-3})\,\frac{\log p}{p^3}+$$

$$=\{2L\}\sum\frac{\log p}{p\,(p-1},$$

wenn L eine Grenze bezeichnet, welche der Modul von $F(z)$ nicht übersteigen kann.

Ferner ist[1]

$$\sum^{n} \frac{\log p}{\sqrt{p}} = \left\{ 4\sqrt{n} \right\}$$

Daher wird

$$B_n = F(\infty) \sum^{n} \psi_a(q)(Q_b + Q_b^{-1}) \frac{\log p}{p}$$
$$+ \left\{ 2L \sum_{2}^{\infty} \frac{\log p}{p(p-1)} + 12h\mathfrak{h}_0 M^2 \right\}$$

Da die Reihe

$$\frac{\psi_a(2)\Theta_b(2)\log 2}{2} + \frac{\psi_a(3)\Theta_b(3)\log 3}{3} + \ldots$$

convergirt und $F(\infty)$ nicht $= 0$ ist, so kann demnach der Modul der Summe

$$\sum^{n} \psi_a(p)(Q_b + Q_b^{-1}) \frac{\log p}{p}$$

nie eine angebbare Grenze G übersteigen.

Dasselbe[2] gilt von dem Ausdrucke

$$\sum^{n} \frac{2\log p}{p} - \log n$$

19.

Es handle sich nun um die Isolirung der Primzahlen p_0 einer bestimmten Linearform $Mu+N$, welche durch eine gegebene Form

$$f = f_1^{\bar{\pi}_1} f_2^{\bar{\pi}_2} \cdots f_\chi^{\bar{\pi}_\chi}$$

aus Ω darstellbar und nicht grösser als n sind. Damit diese Bedingungen verträglich sind, müssen alle Charakterproducte $\Pi(N)$ denselben Werth haben, wie beziehungsweise die

---

[1] L. c.

[2] Crelle's Journal, Bd. 78, S. 49, 61.

Charakterproducte $\Pi(m_0)$, wenn m_0 eine bestimmte zu M theilerfremde durch f dargestellte Zahl bezeichnet. Ist

$$NN' \equiv 1 \pmod{M},$$

so ist dann auch

$$\Pi(N') = \Pi(N) = \Pi(m_0)$$

und somit

$$\Pi(N'p) = \Pi(m_0 p),$$

wenn p irgend eine in M nicht aufgehende und durch Formen aus Ω darstellbare Primzahl bezeichnet. Alle einzelnen Charakterproducte $\Pi(pN')$ haben also dieselben Werthe wie für die durch die Formen

$$f_1^{\pi_1+e_1} f_2^{\pi_2+e_2} \ldots f_\varkappa^{\pi_\varkappa+e_\varkappa},\ f_1^{\pi_1-e_1} f_2^{\pi_2-e_2} \ldots f_\varkappa^{\pi_\varkappa-e_\varkappa}$$

darstellbaren zu M theilerfremden Zahlen, wenn p durch die Form $f_1^{e_1} f_2^{e_2} \ldots f_\varkappa^{e_\varkappa}$ darstellbar ist. Setzt man daher

$$\Theta_b(p) = Q_b + Q_b^{-1} = \omega_1^{e_1}\omega_2^{e_2} \ldots \omega_\varkappa^{e_\varkappa} + \omega_1^{-e_1}\omega_2^{-e_2} \ldots \omega_\varkappa^{-e_\varkappa}$$

und bestimmt die kleinsten positiven Zahlen μ, ν von der Art, dass das μfache aller Indices von $\psi_a(pN')$ und der Exponenten π_1+e_1, $\pi_2+e_2 \ldots \pi_\varkappa+e_\varkappa$ einerseits und das νfache aller Indices von $\psi_a(pN')$ und der Exponenten π_1-e_1, $\pi_2-e_2 \ldots \pi_\varkappa-e_\varkappa$ anderseits, beziehungsweise durch

$$2,\ \varphi(2^{\vartheta-1}),\ \varphi(q^{\rho}), \qquad m_1, m_2, \ldots m_\varkappa$$

theilbar ist, so wird nach Abschnitt 11

$$\Pi \frac{1}{(1-x\psi_a(pN')\,\omega_1^{\pi_1+e_1}\omega_2^{\pi_2+e_2} \ldots)(1-x\psi_a(pN')\,\omega_1^{\pi_1-e_1}\omega_2^{\pi_2-e_2} \ldots)}$$

$$= \frac{1}{(1-x^{\mu})^{\frac{1+r}{\mu}}} \cdot \frac{1}{(1-x^{\nu})^{\frac{1+r}{\nu}}},$$

wo das Product über alle Werthe von a und alle engeren Wurzelsysteme $\omega_2, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$ zu erstrecken ist.

Nimmt man auf beiden Seiten den Coëfficienten von x, so erhellt, dass die über alle Werthe von a und alle engeren Wurzelsysteme $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$ zu erstreckende Summe

$$\sum \frac{\psi_a(pN')\Theta_b(p)}{1+r}\,\omega_1^{\pi_1}\omega_2^{\pi_2}\ldots\omega_\varkappa^{\pi_\varkappa} \tag{11}$$

den Werth 0, 1 oder 2 hat, je nachdem keine der beiden Zahlen μ, ν oder eine derselben oder die eine und die andere den Werth 1 hat.

Damit $\mu = 1$ sei, müssen alle Indices von pN' den Werth 0 haben und alle Exponenten $\pi_1+e_1, \pi_2+e_2, \ldots \pi_\varkappa+e_\varkappa$, beziehungsweise durch $m_1, m_2, \ldots m_\varkappa$ theilbar sein. Dies kann aber nur eintreten, wenn

$$pN' \equiv 1 \pmod M$$

also

$$p \equiv N \pmod M$$

ist und die die Zahl p darstellende Form $f_1^{-e_1}f_2^{-e_2}\ldots f_\varkappa^{-e_\varkappa}$ mit f zusammenfällt, wenn demnach p der Linearform $Mu+N$ angehört und durch f darstellbar ist.

Damit $\nu = 1$ sei, müssen alle Indices von pN' und alle Exponenten $\pi_1-e_1, \pi_2-e_2, \ldots \pi_\varkappa-e_\varkappa$ den Werth 0 haben; es muss also

$$p \equiv N \pmod M,$$

und

$$f_1^{e_1}f_2^{e_2}\ldots f_\varkappa^{e_\varkappa} = f$$

oder p in der Linearform $Mu+N$ enthalten und durch f darstellbar sein.

Damit $\mu = \nu = 1$ sei, muss demnach gleichzeitig

$$\begin{array}{ll} \pi_1+e_1 \equiv 0 \pmod{m_1} & \pi_2+e_2 \equiv 0 \pmod{m_2}. \\ \pi_1-e_1 \equiv 0 & \pi_2-e_2 \equiv 0\ldots \end{array}$$

oder

$$\pi_1 \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{1}{2}m_1\right),\ \pi_2 \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{1}{2}m_2\right), \ldots \pi_{\lambda_1} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ \frac{1}{2}m_\lambda\right)$$

sein. Dieser Fall kann also nur statthaben und hat immer statt, wenn f ambig ist.

Dies vorausgeschickt, multipliciere man die Summe

$$\sum^{n} \psi_a(p)\,\Theta_b(p)\,\frac{\log p}{p} \tag{12}$$

mit

$$\frac{1}{r+1}\,\psi_a(N')\,\omega_1^{\gamma_1}\,\omega_2^{\gamma_2}\ldots\omega_\varkappa^{\gamma_\varkappa}$$

und summire hierauf über alle Werthe von a und alle engeren Wurzelsysteme $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$. In dem Resultate erscheint, wenn man eine der Primzahlen p herausgreift, auf welche sich die Summe (12) bezieht, der dieser Primzahl entsprechende Ausdruck $\frac{\log p}{p}$ mit der Summe (11) multiplicirt. Er fällt daher fort, wenn p keine der Primzahlen p_0 ist und bleibt mit dem Coëfficienten σ zurück, wenn p mit einer der Primzahlen p_0 zusammenfällt. Das Resultat hat demnach die Gestalt

$$\sum \frac{\log p_0}{p_0}.$$

Führt man dann statt der Summe (12) ihren Werth ein, welcher für $a = b = 0$ die Gestalt $\log n + \{G_1\}$ und für alle anderen Werthe von a und b einen Werth $\{G\}$ hat, so ergibt sich

$$\sum \frac{\log p_0}{p_0} = \frac{1}{r+1}\log n + \left\{\frac{rG+G'}{r+1}\right\}.$$