Über das Nichtverschwinden Dirichlet'scher Reihen mit reellen Gliedern

Franz Mertens.

In seinem berühmten Beweise für das Vorkommen von unendlich vielen Primzahlen in einer gegebenen arithmetischen Reihe, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, hat bekanntlich Dirichlet das Nichtverschwinden gewisser unendlicher Reihen aus der Theorie der binären quadratischen Formen entlehnt, indem er mit Hilfe des quadratischen Reciprocitätsgesetzes zeigte, dass diese Reihen als Factor in dem Ausdrucke für die Anzahl der primitiven Classen einer gegebenen Determinante auftreten.

So interessant aber auch dieser Zusammenhang der fraglichen Reihen mit der Bestimmung der Classenanzahl der primitiven binären quadratischen Formen sein möge, so ist es doch wünschenswerth, einen Beweis für das Nichtverschwinden solcher Reihen zu besitzen, welcher ohne Reciprocitätssatz und quadratische Formen auskommt.

Es sei M die Differenz der gegebenen arithmetischen Reihe und

$$M = 2^{\lambda} p^{\pi} p_1^{\pi_1} \ldots$$

wo $p, p_1, \ldots$ ungerade Primzahlen bezeichnen. Man stelle für jede zu M theilerfremde Zahl m eine vollständige Indicesreihe auf und setze

$$c_m = \varepsilon^{\frac{m-1}{2}} \eta^{\mathrm{ind}\, m} \omega^{\mathrm{ind}\, m} \omega_1^{\mathrm{ind}\, m}$$

wo ε, η, ω, ω_1,. Wurzeln der Gleichungen

$$\varepsilon^2 = 1,\ \eta^{\varphi(2^{\lambda-1})} = 1,\ \omega^{\varphi(p^{\pi})} = 1, .$$

bezeichnen. Für Zahlen m dagegen, welche nicht zu M theilerfremd sind, sei $c_m = 0$. Es handelt sich dann um den Beweis, dass die unendliche Reihe

$$\frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{3} +$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt, wenn die Wurzeln η, ω,. alle einen der Werthe $+1$ oder -1 haben und mindestens eine derselben $= -1$ ist.

Setzt man

$$\frac{c_1}{1} + \frac{c_2}{2} + \quad + \frac{c_n}{n} = \Theta(n),$$

so genügt es zu zeigen, dass $\Theta(n)$ von einem bestimmten Werthe s von n an über einer anzugebenden positiven Grösse liegt.

2.

Es seien

$$u_1,\ u_2,\ u_3, . \quad u_n$$
$$v_1,\ v_2,\ v_3, . \quad v_n$$

Unbestimmte und man setze

$$u_1 + u_2 + \quad + u_n = U$$
$$v_1 + v_2 + \quad + v_n = V$$
$$\Sigma u_\alpha v_\beta = w_m,$$

wo die Summe über alle Zerlegungen der Zahl m in zwei positive Factoren α, β zu erstrecken ist.

Die Glieder des Productes UV haben alle die Gestalt $u_\alpha v_\beta$ und zerfallen in vier Gruppen.

In die erste Gruppe stelle man alle Glieder, welche der Bedingung $\alpha\beta \leqq n$ genügen. Fasst man alle Ausdrücke $u_\alpha v_\beta$ zusammen, in welchen das Product der Stellenzeiger α, β einen und denselben Werth m hat, so ist das Resultat w_m und die Summe der Glieder der ersten Gruppe demzufolge

$$= w_1 + w_2 + w_3 + . \quad + w_n .$$

In den Gliedern der zweiten Gruppe sei $\alpha\beta > n$ und $\alpha \leqq g$, wo g die grösste in $\sqrt{n}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet. Fasst man alle Glieder zusammen, in welchen α einen und denselben Werth hat, und setzt zur Abkürzung

$$\psi_\alpha = v_{1+a} + v_{2+a} + \quad . + v_n,$$

wo a die grösste in $\frac{n}{\alpha}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet, so ist das Resultat $u_a \psi_a$ und die Summe der Glieder der zweiten Gruppe

$$= u_2 \psi_2 + u_3 \psi_3 + \quad + u_g \psi_g .$$

Die dritte Gruppe enthalte die Glieder, in welchen $\alpha\beta > n$ und $\beta \leqq g$ ist. Setzt man

$$\varphi_\beta = u_{1+b} + u_{2+b} + \quad + u_n,$$

wo b die grösste in $\frac{n}{\beta}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet, so ist die Summe dieser Glieder:

$$v_2 \varphi_2 + v_3 \varphi_3 + \quad . + v_g \varphi_g .$$

Die vierte Gruppe endlich enthalte alle Glieder, in welchen α und $\beta > g$ sind. Ihre Summe ist:

$$(u_{1+g} + u_{2+g} + \quad . + u_n)(v_{1+g} + v_{2+g} + \ldots + v_n) .$$

Man hat demnach

$$\begin{aligned} UV = {} & w_1 + w_2 + \quad . + w_n \qquad (1) \\ & + u_2 \psi_2 + u_3 \psi_3 + \quad + u_g \psi_g \\ & + v_2 \varphi_2 + v_3 \varphi_3 + \ldots + v_g \varphi_g \\ & + (u_{1+g} + u_{2+g} + \quad + u_n)(v_{1+g} + v_{2+g} + . \quad + v_n) . \end{aligned}$$

3.

Es werde nun allgemein

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{m}} \qquad v_m = \frac{c_m}{\sqrt{m}}$$

gesetzt.

Die Grössen $w_1, w_2, .$ fallen dann alle nicht negativ aus. Es wird nämlich

$$w_m = \frac{1}{\sqrt{m}} f(m),$$

wo

$$f(m) = c_1 + c_\delta + c_{\delta'} +$$

ist und $1, \delta, \delta', .$ alle Theiler von m bezeichnen.

Ist m nicht theilerfremd zu M und $= m_1\, d$, wo m_1 zu M theilerfremd ist und d in einer Potenz von M aufgeht, so ist $f(m) = f(m_1)$.

Ist m theilerfremd zu M und eine Primzahlpotenz q^μ, so ist

$$\begin{aligned} f(q^\mu) &= 1 + c_q + (c_q)^2 + \quad + (c_q)^\mu \\ &= 1 \pm 1 + 1 \pm 1 + \\ &\geqq 0. \end{aligned}$$

Insbesondere ist bei geradem μ immer $f(q^\mu) \geqq 1$.

Ist m ein Product verschiedener Primzahlpotenzen, so ist

$$\begin{aligned} f(q^\mu r^\nu \quad .) &= f(q^\mu) \,.\, f(r^2) \,. \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

und insbesondere

$$f(q^\mu r^\nu \quad .) \geqq 1,$$

wenn alle Exponenten $\mu, \nu, .$ gerade sind.

Es ist also allgemein

$$f(m) \geqq 0$$

und insbesondere für jede Quadratzahl k^2

$$f(k^2) \geqq 1.$$

Denn auch in dem Falle, wo k^2 nicht zu M theilerfremd ist, wird

$$f(k^2) = f\left(\frac{k^2}{d^2}\right) \geqq 1,$$

wo $\frac{k}{d}$ zu M theilerfremd ist und d in einer Potenz von M aufgeht.

Hienach wird

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n \geqq \frac{f(1)}{1} + \frac{f(4)}{2} + \frac{f(9)}{3} + \frac{f(g^2)}{g} \qquad (2)$$
$$\geqq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{g}$$
$$> \log g.$$

4.

Nach der Abel'schen Umformung ist

$$\frac{c_k}{\sqrt{k}} + \frac{c_{k+1}}{\sqrt{k+1}} + \ldots + \frac{c_n}{\sqrt{n}}$$
$$= c_k\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) + (c_k + c_{k+1})\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)$$
$$+ (c_k + c_{k+1} + c_{k+2})\left(\frac{1}{\sqrt{k+2}} - \frac{1}{\sqrt{k+3}}\right) + \ldots$$
$$+ (c_k + c_{k+1} + \ldots + c_{n-1})\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$+ (c_k + c_{k+1} + \ldots + c_n)\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Da aber ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$c_k + c_{k+1} + \ldots \leqq \frac{1}{2}\varphi(M)$$

ist, so folgt

$$\frac{c_k}{\sqrt{k}} + \frac{c_{k+1}}{\sqrt{k+1}} + \ldots + \frac{c_n}{\sqrt{n}} \leqq \qquad (3)$$
$$\leqq \frac{1}{2}\varphi M\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqq \frac{\varphi(M)}{2\sqrt{k}}$$

Hienach ist, wenn a die grösste in $\frac{n}{\alpha}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet,

$$\psi_a \leqq \frac{\varphi(M)}{2\sqrt{1+a}} < \frac{\varphi(M)}{2\sqrt{n}} \sqrt{\alpha}.$$

Dann wird aber

$$u_\alpha \psi_a = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \psi_a < \frac{\varphi(M)}{2\sqrt{n}}$$

$$u_2 \psi_2 + u_3 \psi_3 + \qquad + u_g \psi_g < \frac{g\varphi(M)}{2\sqrt{n}} \leqq \frac{1}{2} \varphi(M)$$

also

$$u_2 \psi_2 + u_3 \psi_3 + \qquad + u_g \psi_g + \frac{1}{2} \varphi(M) > 0. \tag{4}$$

5.

Da

$$2\sqrt{m} - 2\sqrt{m-1} - \frac{1}{\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}(\sqrt{m}+\sqrt{m-1})^2}$$

also

$$0 < 2\sqrt{m} - 2\sqrt{m-1} - \frac{1}{\sqrt{m}} < 4\left(\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{\sqrt{m+1}}\right)$$

ist, so ergibt sich, wenn $m = k+1,\ k+2, .\ \ n$ gesetzt und addirt wird,

$$0 < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{4}{\sqrt{k+1}}.$$

Man kann daher

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{\sqrt{k+2}} + . \quad + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{k} - \frac{4\rho}{\sqrt{k+1}} \tag{5}$$

setzen, wo $0 < \rho < 1$.

Hieraus folgt, wenn b die grösste in $\frac{n}{\beta}$ enthaltene ganze Zahl bezeichnet,

$$\varphi_3 = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{b} - \frac{4\rho}{\sqrt{1+b}}.$$

Setzt man aber $b = \frac{n-\gamma}{\beta}$, so wird

$$\sqrt{b} = \sqrt{\frac{n}{\beta}} - \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-\gamma}}{\sqrt{\beta}}$$

$$= \sqrt{\frac{n}{\beta}} - \frac{\gamma}{\beta}\,\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-\gamma}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+b}} = \sqrt{\frac{\beta}{n+\beta-\gamma}}$$

und demzufolge

$$\varphi_3 = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{\frac{n}{\beta}} + \frac{2\gamma}{\beta}\,\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-\gamma}} - \frac{4\rho\sqrt{\beta}}{\sqrt{n+\beta-\gamma}}$$

$$= 2\sqrt{n} - 2\sqrt{\frac{n}{\beta}} \pm 4\rho\sqrt{\frac{\beta}{n}}.$$

Hienach wird

$$v_2\varphi_2 + v_3\varphi_3 + \ldots + v_g\varphi_g = 2\sqrt{n}\,(v_2+v_3+\ldots+v_g) \tag{6}$$

$$-2\sqrt{n}\left(\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{3}+\ldots+\frac{c_g}{g}\right) \pm \frac{4\rho g}{\sqrt{n}}$$

$$= 2\sqrt{n}\,(v_1+v_2+\ldots+v_g) - 2\sqrt{n}\,\Theta(g) \pm 4\rho.$$

Ferner ist nach (5)

$$u_{1+g}+u_{2+g}+\ldots+u_n = 2\sqrt{n} - 2\sqrt{g} - \frac{4\rho}{\sqrt{1+g}}$$

und daher nach (3)

$$(u_{1+g}+u_{2+g}+\ldots+u_n)(v_{1+g}+v_{2+g}+\ldots+v_n) \tag{7}$$

$$= 2\sqrt{n}\,(v_{1+g}+v_{2+g}+\ldots+v_n)$$

$$\pm\left(2\sqrt{g}+\frac{4\rho}{\sqrt{1+g}}\right)\frac{\rho^1\varphi(M)}{2\sqrt{1+g}}$$
$$=2\sqrt{n}\,(v_{1+g}+v_{2+g}+\ldots+v_n)\pm\rho_1\varphi(M)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right),$$

wo ρ', ρ_1 ebenfalls nicht negativ und kleiner als 1 sind.

Man hat daher auch nach (6), (7)

$$\begin{gathered}v_2\varphi_2+v_3\varphi_3+\ldots+v_g\varphi_g\\ +(u_{1+g}+u_{2+g}+\ldots+u_n)(v_{1+g}+v_{2+g}+\ldots+v_n)\\ +2\sqrt{n}\,\Theta(g)-2\sqrt{n}\,V+4+\varphi(M)\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\geqq 0.\end{gathered}\tag{8}$$

6.

Schreibt man die Gleichung (1) in der Gestalt

$$\begin{gathered}UV-v_2\varphi_2-v_3\varphi_3-\ldots-v_g\varphi_g\\ -u_2\psi_2-u_3\psi_3-\ldots u_g\psi_g\\ -(u_{1+g}+u_{2+g}+\ldots+u_n)(v_{1+g}+v_{2+g}+\ldots+v_n)\\ =w_1+w_2+\ldots+w_n\end{gathered}$$

und addirt zu derselben die Ungleichungen (4) und (8), so ergibt sich nach (2)

$$\begin{aligned}2\sqrt{n}\,\Theta(g)-(2\sqrt{n}-U)V+4+\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\varphi(M)\\ >w_1+w_2+\ldots+w_n\\ >\log g.\end{aligned}$$

Nach (5), (3) ist aber

$$2\sqrt{n}-U<4$$
$$V\leqq\frac{1}{2}\varphi(M)$$

und demzufolge

$$2\sqrt{n}\,\Theta(g)+4+\left(\frac{7}{2}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\varphi(M)>\log g$$

oder

$$\Theta(g)>\frac{\log g}{2\sqrt{n}}-\frac{4+\left(\frac{7}{2}+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\varphi(M)}{2\sqrt{n}}.$$

Wird noch der Einfachheit wegen n durch n^2 ersetzt, so folgt

$$\Theta(n) > \frac{\log n}{2n} - \frac{4 + \left(\frac{7}{2} + \frac{2}{n}\right)\varphi(M)}{2n}.$$

Man bestimme nun eine möglichst kleine Zahl s von der Art, dass

$$\frac{1}{2}\log s \geqq 4 + \left(\frac{7}{2} + \frac{2}{s}\right)\varphi(M) + \varphi(M)\frac{s}{1+s}$$

wird. Da nach der Abel'schen Umformung

$$\frac{c_{1+s}}{1+s} + \frac{c_{2+s}}{2+s} + \cdot \quad \cdot + \frac{c_n}{n} \leqq \frac{1}{2}\varphi(M)\frac{1}{1+s}$$

ist, so wird dann von $n = s$ an

$$\Theta(n) > \frac{\log s}{2s} - \frac{4 + \left(\frac{7}{2} + \frac{2}{s}\right)\varphi(M)}{2s} - \frac{1}{2}\varphi(M)\frac{1}{s+1}$$

$$> \frac{\log s}{4s}.$$