©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Die homogenen Coordinaten als Wurf-coordinaten

Gustav Kohn in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1895.)

1. In einem rationalen Gebiet erster Stufe kann eine Parametervertheilung bekanntlich dadurch fixirt werden, dass man drei beliebig gewählten Elementen (Punkten) die Parameterwerthe 0, ∞, 1 zuweist. Werden nur Null- und Unendlichkeitspunkt für die Parametervertheilung gewählt, so sind lediglich die Verhältnisse der Parameter der einzelnen Punkte festgelegt.

Der folgende Satz führt die Bestimmung eines Punktes in einem linearen Raum R_n von n Dimensionen durch homogene Coordinaten direct zurück auf die Parametervertheilung (Coordinatenbestimmung) in einer geraden Linie.

Die homogenen Coordinaten $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$, welche ein Punkt Y in einem Coordinatensystem besitzt, dessen Fundamentalebenen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $\ldots x_{n+1} = 0$ und dessen Einheitspunkt E ist, sind proportional den Parameterwerthen, welche auf der Verbindungslinie der Punkte E und Y ihren Schnittpunkten mit den Fundamentalebenen des Coordinatensystems in einer Parametervertheilung zukommen, für die Y der Nullpunkt und E der Unendlichkeitspunkt ist.

Der Beweis für diese Behauptung liegt in dem Gleichungssystem

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\rho x_1 = y_1 - \lambda$$
$$\rho x_2 = y_2 - \lambda$$

$$\rho x_{n+1} = y_{n+1} - \lambda .$$

In diesem Gleichungssystem, in welchem $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ die laufenden Coordinaten eines Punktes, ρ einen Proportionalitätsfactor und λ einen Parameter bedeutet, hat man die Parameterdarstellung einer geraden Linie und man erhält für $\lambda = 0$ den Punkt Y, für $\lambda = \infty$ den Punkt E, während für $\lambda = y_i \quad x_i = 0$ resultirt.

2. Für die homogenen Coordinaten eines Punktes Y des R_n lässt sich noch eine andere ähnliche Bedeutung angeben, die sich folgendermassen ausspricht:

Macht man auf der Normcurve des R_n, welche die Ecken der Coordinatenpyramide und den Einheitspunkt E mit dem Punkt Y verbindet, E zum Nullpunkt und Y zum Unendlichkeitspunkt einer Parametervertheilung, so sind die Parameter der Ecken der Coordinatenpyramide den homogenen Coordinaten $y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$ des Punktes Y proportional.

Die Richtigkeit deser Behauptung wird in Evidenz gesetzt durch das Gleichungssystem

$$\rho x_1 = \frac{y_1}{y_1 - \lambda}$$
$$\rho x_2 = \frac{y_2}{y_2 - \lambda}$$

$$\rho x_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{y_{n+1} - \lambda} .$$

Man hat nämlich in diesen Gleichungen offenbar die Parameterdarstellung für eine rationale Curve n^{ter} Ordnung, d. h. eine Normcurve des R_n und die Parameterwerthe

$$\lambda = 0, \infty ; \; y_1, y_2, \ldots y_{n+1}$$

ergeben thatsächlich der Reihe nach die Punkte E, Y und die Ecken der Coordinatenpyramide.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

3. Die Bedeutung unserer beiden Sätze tritt besser hervor, wenn man die Verallgemeinerung des Doppelverhältnissbegriffes heranzieht, welche ich in dem Aufsatze »Über die Erweiterung eines Grundbegriffes der Geometrie der Lage«, Math. Ann., Bd. 46, vorgeschlagen habe. Dort wird der Wurf von n Elementen eines einförmigen Trägers durch die Festsetzung definirt, dass zwei Reihen von je n Elementen dann denselben Wurf bestimmen sollen, wenn es eine projective Beziehung ihrer Träger gibt, welche die n ersten Elemente der Reihe nach in die n zweiten überführt, und es wird überdies unter dem Wurf von n Punkten des R_{n-3} ihr Wurf auf der hindurchgehenden Normcurve des R_{n-3} verstanden.

Mann kann nun den Wurf von $n+3$ (in bestimmter Folge gegebenen) Elementen eines einförmigen Trägers durch die Verhältnisse von $n+1$ Zahlen festlegen. Solche $n+1$ Zahlen sind die Parameter $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$, die den $n+1$ ersten Elementen in einer Parametervertheilung zukommen, in welcher das vorletzte Element den Parameter Null, das letzte den Parameter Unendlich besitzt. Diese $n+1$ Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$, deren Verhältnisse nur vom Wurf der $n+3$ Elemente abhängen und ihn bestimmen, kann man passend als *homogene Coordinaten des Wurfes* bezeichnen.

Der erste von unseren beiden Sätzen besagt nun:

Die homogenen Coordinaten eines Punktes Y im R_n stimmen mit den homogenen Coordinaten des Wurfes überein, der auf der Verbindungslinie von Y mit dem Einheitspunkt E bestimmt wird von ihren Schnittpunkten mit den Coordinatenebenen, dem Punkt Y und dem Einheitspunkt E.

Der zweite Satz sagt:

Die homogenen Coordinaten eines Punktes Y im R_n sind nichts anderes als die homogenen Coordinaten des Wurfes, den die Ecken der Coordinatenpyramide und der Einheitspunkt zusammen mit dem Punkte Y im R_n bestimmen.

Die übliche *Staudt-Fiedler'sche* geometrische Interpretation der homogenen Coordinaten deutet die Quotienten von je zwei derselben als Doppelverhältnisse. Diese Einzel-

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

interpretationen erscheinen hier in übersichtlicher Weise zusammengefasst.

Ausserdem erweist sich die hier gegebene Bedeutung der homogenen Coordinaten als nützlich bei verschieden geometrischen Untersuchungen; insbesondere führt sie zu analytischen Beweisen einfachster Art für die Sätze, welche ich nach synthetischen Methoden im 46. Bde. der Math. Ann. abgeleitet habe.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1895

Band/Volume: 104_2a

Autor(en)/Author(s): Kohn Gustav

Artikel/Article: Die homogenen Coordinaten als Wurfcoordinaten. 1167-1170