# Über den dem Liouville'schen Satze entsprechenden Satz der Gastheorie

von

**C. H. Wind,**

*Lector an der Universität Groningen.*

(Mit 2 Textfiguren.)

Der Beweis, welchen Boltzmann (Vorles. über Gastheorie, S. 27) von diesem Satze gibt, scheint mir fehlerhaft zu sein.

Erstens scheint mir der geometrische Beweis der Gleichung (S. 27) $d\omega' d\omega'_1 = d\omega d\omega_1$ nicht ganz richtig, weil die Ebene, in Bezug auf welche die Punkte $C'$ und $C'_1$ die Spiegelbilder von $C$ und $C_1$ sind, selbst eine Parallelverschiebung erleidet, sobald die letzteren Punkte ihre Raumelemente $d\omega$ und $d\omega_1$ beschreiben. Zweitens scheint mir überhaupt die genannte Gleichung nicht im Allgemeinen, sondern nur in dem Fall, wo $m = m_1$ ist, giltig. (Dann aber wieder nicht, weil $d\omega' = d\omega$ wäre und $d\omega'_1 = d\omega_1$, sondern weil — wenn man den betreffenden Raumelementen die Gestalt von Cylindern gibt [vergl. die nachfolgenden Auseinandersetzungen] mit Axenhöhen $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta'$ und $\Delta'_1$ beziehungsweise und Querschnitten $p$, $p_1$, $p'$ und $p'_1$ — weil dann $p' = p$, $p'_1 = p_1$, $\Delta' = \Delta_1$, $\Delta'_1 = \Delta$ und in dieser Weise $p'\Delta'$ $p'_1\Delta'_1$ oder $d\omega' d\omega'_1$ gleich $p\Delta . p_1\Delta_1$ oder $d\omega d\omega_1$ wird).

Da mir eine möglichst allseitige Klarlegung dieses wichtigen Satzes nicht unnütz erscheint, so will ich hier zwei Beweise desselben liefern, von denen der erste bloss die Ausführungen Boltzmann's so ergänzt, dass sie einwurfsfrei werden, der zweite aber einen etwas einfacheren Weg einschlägt.

### Erster Beweis.

Als »Stösse der entgegengesetzten Art« bezeichne ich, etwas abweichend von der l. c. S. 28 gegebenen Definition, diejenigen während des Zeitelementes $dt$ in der Volumeinheit zwischen den Molekülen $m$ einerseits und den Molekülen $m_1$ anderseits stattfindenden Stösse, bei denen 1. der Geschwindigkeitspunkt des Moleküls $m$ sich nach dem Stosse innerhalb des Raumelementes $d\omega$ befindet, 2. der Geschwindigkeitspunkt des Moleküls $m_1$ sich nach dem Stosse innerhalb des Raumelementes $d\omega_1$ befindet und 3. die Centrilinie der beiden Moleküle im Momente des Zusammentreffens — jetzt von dem Molekül $m_1$ gegen das Molekül $m$ gezogen — irgend einer vom Coordinatenursprung innerhalb des Kegels $d\lambda$ gezogenen Geraden parallel ist.

Es fragt sich jetzt, die Anzahl der Stösse der entgegengesetzten Art zu ermitteln. Wir wenden zu diesem Zwecke die l. c. S. 26 angedeutete graphische Construction der Geschwindigkeitspunkte nach dem Stosse an und geben den Raumelementen $d\omega$ und $d\omega_1$ die Gestalt von Cylindern, deren Axen der Geraden $OK$ parallel sind, deren Höhen respective $\Delta$ und $\Delta_1$ sind und deren Schnitte senkrecht zu der Richtung $OK$ respective die Grösse $p$ und $p_1$ haben.

Wir lassen jetzt die Punkte $C$ und $C_1$ respective die Raumelemente $d\omega$ und $d\omega_1$ beschreiben und wollen die durch diese Bewegungen bedingten Bewegungen der Punkte $C'$ und $C'_1$ untersuchen. Einiges ergibt sich in dieser Hinsicht sofort.

1. Eine Bewegung von $C$, respective $C_1$, in einer Ebene senkrecht zu $OK$ bedingt eine genau gleiche und gleichgerichtete Bewegung des Punktes $C'$, respective $C'_1$, lässt dagegen den Punkt $C'_1$, respective $C'$, völlig unverrückt. Diese Beziehung zwischen den Bewegungen der Punkte $C$ und $C_1$ einerseits und $C'$ und $C'_1$ anderseits ist reciprok.

2. Die Bewegungen der Punkte $C$ und $C_1$ in der Richtung der Cylinderaxen bedingen je gleichzeitige und auch nach den Axen gerichtete Bewegungen der beiden Punkte $C'$ und $C'_1$.

Wir wollen die Bewegungen in der Axenrichtung etwas näher betrachten und nennen die totalen Verschiebungen von

$C$, $C_1$, $C'$ und $C_1'$ aus ihren Anfangslagen [$(\xi, \eta, \zeta)$, $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ u. s. w.] nach dieser Richtung hin beziehungsweise $\delta$, $\delta_1$, $\delta'$ und $\delta_1'$, wobei wir alle diese Verschiebungen in einem und demselben Sinne positiv rechnen. Es ergibt sich dann durch eine einfache Überlegung und die Betrachtung der beigelegten Fig. 1, welche wohl kaum irgend einer weiteren Aufklärung bedarf, Folgendes.

3. Von jedem Satze von zusammengehörigen Verschiebungen der Punkte $C$, $C_1$, $C'$ und $C_1'$ sind je zwei beliebige

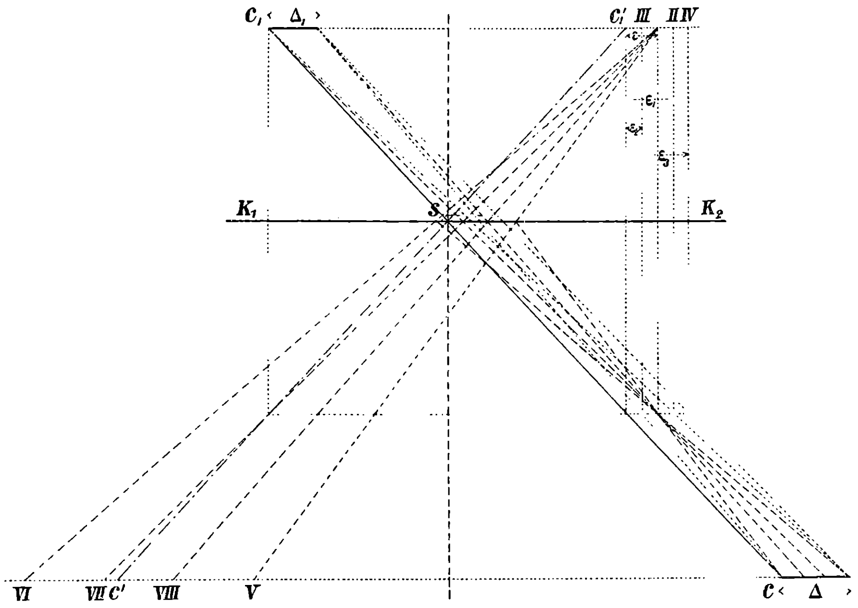


Fig. 1.

durch die zwei übrigen vollständig bestimmt. Es folgen hier einige solche Sätze von Werthen zusammengehöriger Verschiebungen, bei denen jedesmal wenigstens einer der Verschiebungswerthe aus den zwei zuerst angeschriebenen hergeleitet, der vierte aber bisweilen nicht ausgefüllt ist, und bei denen in einigen Fällen der berechnete Verschiebungswerth durch das Zeichen $\equiv$ mit einem Symbol verbunden ist, durch welches wir der Kürze halber den betreffenden Werth nachher vorstellen werden können.

$$\left.\begin{array}{l}\delta = 0\\ \delta_1 = 0\\ \delta' = 0\\ \delta_1' = 0\end{array}\right\}\ \mathrm{I} \qquad \left.\begin{array}{l}\delta = \Delta\\ \delta_1 = 0\\ \delta' = -\dfrac{m_1 - m}{m_1 + m}\,\Delta \equiv \eta_1\\ \delta_1' = \dfrac{2m}{m_1 + m}\,\Delta \equiv \varepsilon_1\end{array}\right\}\ \mathrm{II}$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta = 0\\ \delta_1 = \Delta_1\\ \delta' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m}\,\Delta_1 \equiv \eta_2\\ \delta_1' = \dfrac{m_1 - m}{m_1 + m}\,\Delta_1 \equiv \varepsilon_2\end{array}\right\}\ \mathrm{III}$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta = \Delta\\ \delta_1 = \Delta_1\\ \delta' = \\ \delta_1' = \dfrac{2m}{m_1 + m}\,\Delta + \dfrac{m_1 - m}{m_1 + m}\,\Delta_1 \equiv \varepsilon_3\end{array}\right\}\ \mathrm{IV} \qquad \left.\begin{array}{l}\delta = 0\\ \delta_1' = \varepsilon\\ \delta_1 = .\\ \delta' = \dfrac{2m_1}{m_1 - n}\,\varepsilon\end{array}\right\}\ \mathrm{V}$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta = \Delta\\ \delta_1' = \varepsilon\\ \delta_1 = \\ \delta' = \dfrac{2m_1}{m_1 - m}\,\varepsilon - \dfrac{m_1 + m}{m_1 - m}\,\Delta\end{array}\right\}\ \mathrm{VI} \qquad \left.\begin{array}{l}\delta_1 = 0\\ \delta_1' = \varepsilon\\ \delta = \\ \delta' = -\dfrac{m_1 - m}{2m}\,\varepsilon\end{array}\right\}\ \mathrm{VII}$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta_1 = \Delta_1\\ \delta_1' = \varepsilon\\ \delta = \\ \delta' = -\dfrac{m_1 - m}{2m}\,\varepsilon + \dfrac{m_1 + m}{2m}\,\Delta_1\end{array}\right\}\ \mathrm{VIII.}$$

Wir nehmen jetzt $\delta_1'$ gleich einem bestimmten Werth $\varepsilon$, gelegen zwischen den äussersten Werthen, welche die Verschiebung $\delta_1'$ von $C_1'$ überhaupt erreichen kann bei der Bewegung von $C$ und $C_1$ innerhalb der früher angenommenen Grenzen, und fragen uns, zwischen welchen Grenzen $\delta'_{max}$ und $\delta'_{min}$ die Verschiebung $\delta'$ liegen muss, damit die Werthe von $\delta_1'(\varepsilon)$ und $\delta'$

Werthen von $\delta_1$ und $\delta$ entsprechen, deren ersterer zwischen 0 und $\Delta_1$, deren letzterer aber zwischen 0 und $\Delta$ liegt.

Wir setzen einfachkeitshalber

$$\delta'_{\max}-\delta'_{\min}=\chi$$

und bemerken, dass $\chi$ im Allgemeinen eine Function von $\varepsilon$ ist, welche aber eine verschiedene Gestalt hat, je nach dem Werthgebiete, innerhalb dessen der Werth $\varepsilon$ von $\delta'_1$ angenommen wird. Nehmen wir — was ohne Schaden der Allgemeinheit unserer Betrachtungen geschehen kann — $m_1>m$ und unterscheiden wir als Fall I den, wobei $m_1-m>2m$ und mithin $\varepsilon_3>\varepsilon_2>\varepsilon_1>0$, und als Fall II den, wobei $m_1-m<2m$ und mithin $\varepsilon_3>\varepsilon_1>\varepsilon_2>0$ (die Fig. 1 ist für den Fall II gezeichnet), so haben wir in den beiden Fällen und für die verschiedenen Werthgebiete, innerhalb derer $\varepsilon$ angenommen werden kann, die in der Tabelle S. 6 angegebenen Formen für die Function $\chi$.

Berechnet man jetzt das Integral $\int_0^{\varepsilon_3}\chi\,d\varepsilon$, nachdem man zuerst für den Fall I gesetzt hat,

$$\int_0^{\varepsilon_3}\chi\,d\varepsilon=\int_0^{\varepsilon_1}\chi_a\,d\varepsilon+\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2}\chi_b\,d\varepsilon+\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_3}\chi_c\,d\varepsilon$$

und für den Fall II

$$\int_0^{\varepsilon_3}\chi\,d\varepsilon=\int_0^{\varepsilon_2}\chi_a\,d\varepsilon+\int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1}\chi_b\,d\varepsilon+\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_3}\chi_c\,d\varepsilon,$$

worin $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ und $\varepsilon_3$ die in II, III und IV angegebenen Werthe haben, so findet man für beide Fälle

$$\int_0^{\varepsilon_3}\chi\,d\varepsilon=\Delta\Delta_1. \qquad 1)$$

Diese Gleichung ist von grosser Wichtigkeit für die Lösung unseres Problems, zu der wir jetzt unmittelbar schreiten können.

Wir betrachten all' diejenigen Zusammenstösse zwischen irgend einem Molekül $m$ einerseits und irgend einem Molekül $m_1$ anderseits in einer gegebenen Volumeinheit und während eines Zeitelementes $dt$, wobei die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

| Fall | Werthgebiet für $\varepsilon$ | Aus der Fig. 1 folgt, dass determinirt ist, ausser durch $\delta_1' = \varepsilon$, | | Es ist also nach V bis VIII | | Es hat die Function $\chi$ die Form |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $\delta'_{max}$ durch | $\delta'_{min}$ durch | $\delta'_{max}$ | $\delta'_{min}$ | |
| I | *a.* $\varepsilon_1 > \varepsilon > 0$ | $\delta = 0$ | $\delta_1 = 0$ | $\frac{2m_1}{m_1 - m}\varepsilon$ | $-\frac{m_1 - m}{2m}\varepsilon$ | $\chi a = \frac{(m_1 + m)^2}{2m(m_1 - m)}\varepsilon$ |
| | *b.* $\varepsilon_2 > \varepsilon > \varepsilon_1$ | $\delta = 0$ | $\delta = \Delta$ | $\frac{2m_1}{m_1 - m}\varepsilon$ | $\frac{2m_1}{m_1 - m}\varepsilon - \frac{m_1 + m}{m_1 - m}\Delta$ | $\chi b = \frac{m_1 + m}{m_1 - m}\Delta$ |
| | *c.* $\varepsilon_3 > \varepsilon > \varepsilon_2$ | $\delta_1 = \Delta_1$ | $\delta = \Delta$ | $-\frac{m_1 - m}{2m}\varepsilon + \frac{m_1 + m}{2m}\Delta_1$ | $\frac{2m_1}{m_1 - m}\varepsilon - \frac{m_1 + m}{m_1 - m}\Delta$ | $\chi c = -\frac{(m_1 + m)^2}{2m(m_1 - m)}\varepsilon + \frac{m_1 + m}{2m}\Delta_1 + \frac{m_1 + m}{m_1 - m}\Delta$ |
| II | *a.* $\varepsilon_2 > \varepsilon > 0$ | $\delta = 0$ | $\delta_1 = 0$ | $\frac{2m_1}{m_1 - m}\varepsilon$ | $-\frac{m_1 - m}{2m}\varepsilon$ | $\chi a = \frac{(m_1 + m)^2}{2m(m_1 - m)}$ |
| | *b.* $\varepsilon_1 > \varepsilon > \varepsilon_2$ | $\delta_1 = \Delta_1$ | $\delta_1 = 0$ | $-\frac{m_1 - m}{2m}\varepsilon + \frac{m_1 + m}{2m}\Delta_1$ | $-\frac{m_1 - m}{2m}\varepsilon$ | $\chi b = \frac{m_1 + m}{2m}\Delta_1$ |
| | *c.* $\varepsilon_3 > \varepsilon > \varepsilon_1$ | $\delta_1 = \Delta_1$ | $\delta = \Delta$ | $-\frac{m_1 - m}{2m}\varepsilon + \frac{m_1 - m}{2m}\Delta_1$ | $\frac{2m}{m_1 - m}\varepsilon - \frac{m_1 + m}{m_1 - m}\Delta$ | $\chi c = -\frac{(m_1 + m)^2}{2m(m_1 - m)}\varepsilon + \frac{m_1 + m}{2m}\Delta_1 + \frac{m_1 + m}{m_1 - m}\Delta$ |

*a)* Der Geschwindigkeitspunkt des Moleküls $m$ soll vor dem Stosse sich befinden innerhalb eines cylindrischen Raumelementes, welches einen Theil bildet der Verlängerung des cylindrischen Raumelementes $d\omega$ nach der Axenrichtung und also auch den gleichen Querschnitt $p$ wie dieses hat. Als Höhe soll dieses Raumelement aber die oben definirte Strecke $\chi$ haben. Die Anzahl der Moleküle $m$, welche in der Volumeinheit dieser Bedingung genügen, ist offenbar $f'p\chi$, wenn $f'$ steht statt $f(\xi', \eta', \zeta', t)$.

*b)* Der Geschwindigkeitspunkt des Moleküls $m_1$ soll vor dem Stosse sich befinden innerhalb eines cylindrischen Raumelementes, welches einen Theil bildet der Verlängerung (nach der Axenrichtung) des cylindrischen Raumelementes $d\omega_1$ und also auch einen gleichen Querschnitt $p_1$ wie dieses hat. Als Höhe soll dieses Raumelement aber nur die gegen $\varepsilon_3$ unendlich kleine Strecke $d\varepsilon$ haben, deren Lage aus dem früher Gesagten erhellt. Die Anzahl der Moleküle $m_1$, welche in der Volumeinheit dieser Bedingung genügen, ist offenbar $F'_1 p_1 d\varepsilon$, wo $F'_1$ wieder steht für $F(\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1, t)$.

*c)* Die Centrilinie der beiden Moleküle im Momente des Zusammenstosses soll der Bedingung sub 3, S. 23 genügen.

Die Anzahl aller Stösse der hier hervorgehobenen Art ergibt sich leicht zu

$$\frac{d}{d\varepsilon} dr' . d\varepsilon = f' F'_1 p p_1 \chi \, d\varepsilon \, \sigma^2 g \cos\vartheta \, d\lambda \, dt. \qquad 2)$$

Aus der Weise, in der die Strecken $\chi$ und $d\varepsilon$ definirt sind, folgt unmittelbar, dass die eben hervorgehobenen Stösse solche sind, wobei der Geschwindigkeitspunkt eines Moleküls $m$ in das Raumelement $d\omega$ und der eines Moleküls $m_1$ in das Raumelement $d\omega_1$ hineingeschafft wird, Stösse »der entgegengesetzten Art« also, welche je eine Vermehrung der Anzahl $fd\omega$, sowie der Anzahl $F_1 d\omega_1$ um eine Einheit zur Folge haben.

Es bilden aber die hier betrachteten nur einen unendlich kleinen Bruchtheil a l l e r Stösse der entgegengesetzten Art. Die ganze Anzahl, $dr'$, derselben bestimmt man, wie sich aus dem Vorhergesagten sofort ergibt, indem man den Ausdruck 2) zwischen den Grenzen 0 und $\varepsilon_3$ nach $\varepsilon$ integrirt, wobei alle

Factoren jenes Ausdruckes mit Ausnahme von $\chi$ als von $\varepsilon$ unabhängig zu betrachten sind. Man bekommt in dieser Weise

$$dr' = f'F_1'pp_1\sigma^2 g \cos\vartheta\, d\lambda\, dt \int_0^{\varepsilon_3} \chi\, d\varepsilon,$$

wofür man, nach 1), setzen darf

$$dr' = f'F_1'pp_1\sigma^2 g \cos\vartheta\, d\lambda\, dt\, \Delta\Delta_1,$$

und deshalb, weil $pp_1\Delta\Delta_1 = d\omega\, d\omega_1$, auch

$$\underline{dr' = f'F_1'\sigma^2 g \cos\vartheta\, d\omega\, d\omega_1\, d\lambda\, dt.}$$

**Vereinfachte Herleitung der zum obigen Beweise benutzten Gleichung $\int_0^{\varepsilon_3} \chi\, d\varepsilon = \Delta\Delta_1$.**

Denken wir uns als rechtwinklige Coordinaten in einer Fig. 2$a$ die Werthenpaare von $\delta$ und $\delta_1$ und in einer zweiten Fig. 2$b$ die entsprechenden Werthenpaare von $\delta'$ und $\delta_1'$ aus-

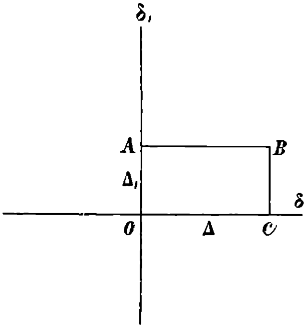

Fig. 2$a$.

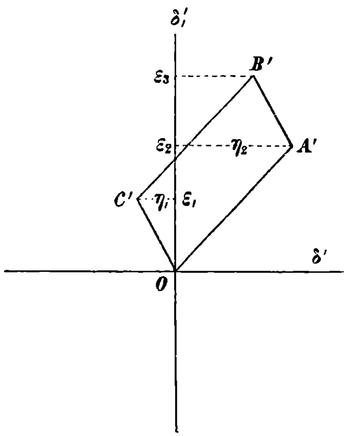

Fig. 2$b$.

gesetzt, so entsprechen den sämmtlichen Werthenpaaren von $\delta$ und $\delta_1$, wobei der Werth von $\delta$ zwischen den Grenzen 0 und $\Delta$ und der Werth von $\delta_1$ zwischen den Grenzen 0 und $\Delta_1$ fällt, in der Fig. 2 $a$ die Punkte eingeschlossen von einem Rechteck $OABC$ mit $OC = \Delta$ und $OA = \Delta_1$, in der Fig. 2$b$ aber die Punkte eines schiefen Parallelogrammes $O'A'B'C'$, wo die Coordinaten

$\delta'$ und $\delta'_1$ für $A'$ die Werthe $\eta_2$ und $\varepsilon_2$ beziehungsweise und für $C'$ die Werthe $\eta_1$ und $\varepsilon_1$ beziehungsweise haben (siehe II u. III, S. 24).

Denkt man sich nun das Parallelogramm $O'A'B'C'$ in unendlich schmalen Streifen parallel zur $\delta'$-Axe zerlegt, so entspricht von jedem dieser Streifen die Breite einem Elemente $d\varepsilon$ und die Länge dem dazugehörigen Werthe der Function $\chi$, der Inhalt also einem Elemente des Integrals $\int_0^{\varepsilon_3} \chi\, d\varepsilon$. Der Gesammtinhalt des Parallelogramms $O'A'B'C'$ entspricht dem Werthe dieses Integrals.

Da jener Inhalt aber gleich $\eta_2\varepsilon_1 - \eta_1\varepsilon_2$, d. h., wegen der eigenthümlichen Werthe von $\eta_1$, $\eta_2$, $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$, gleich $\Delta\Delta_1$ ist, ist also auch

$$\int_0^{\varepsilon_3} \chi\, d\varepsilon = \Delta\Delta_1.$$

## Zweiter Beweis.

Um die Anzahl der S. 22 definirten Stösse der entgegengesetzten Art zu berechnen, kann man auch in folgender Weise vorgehen.

Es sind leicht zwei Raumelemente $d\omega'$ und $d\omega'_1$ anzugeben, innerhalb deren die Geschwindigkeitspunkte der betreffenden Moleküle $m$ und $m_1$ vor dem Stosse nothwendig liegen müssen, damit bei irgend welchen der Bedingung sub 3. schon genügenden Stössen auch die Bedingungen sub 1. und 2. erfüllt sein können. Es sind dies nämlich die Elemente, welche in dem Falle, für den die Fig. 2 auf S. 19 der Boltzmann'schen »Gastheorie« gilt, die Punkte $C'$ und $C'_1$ beziehungsweise beschreiben, wenn bei unveränderter Richtung der Geraden $OK$ die Punkte $C$ und $C_1$ die Elemente $d\omega$ und $d\omega'$ beziehungsweise beschreiben. Man darf aber nicht behaupten, dass es zur Erfüllung jener Bedingungen sub 1. und 2. (neben der sub 3.) schon genügen würde, dass die Geschwindigkeitspunkte der Moleküle $m$ und $m_1$ vor dem Stosse je an irgend einer Stelle der zwei Raumelemente $d\omega'$ und $d\omega'_1$ beziehungsweise sich befänden. Dies lehrt schon eine einfache geometrische Betrachtung im Zusammenhange mit der eben genannten Fig. 2. Auch ergibt sich aber bei solcher sofort, dass — wenn man das Raumelement $d\omega_1'$ in »unendlich viel unendlich kleine« Raumelemente $d\tau$ höherer Ordnung zerlegt denkt — sich zu jedem Element $d\tau$ ein bestimmter Theil $\varphi$ des Raumelementes $d\omega'$ angeben lässt der Weise, dass man nur die Geschwindigkeitspunkte der Moleküle $m$ und $m_1$ vor dem Stosse respective in $\varphi$ und in $d\tau$ hinein zu verlegen hat, damit den Bedingungen sub 1. und 2. genügt werde. Jedem Elemente $d\tau$ von $d\omega_1'$ entspricht dann aber nach Überlegungen, die wir hier nicht weiter auszuführen brauchen, weil sie den in der mehr genannten »Gastheorie« in Bezug auf die »Stösse der hervorgehobenen Art« gehaltenen ganz ähnlich sind, ein (»unendlich kleiner«) Theil der gesammten Anzahl der Stösse entgegengesetzter Art, welcher angegeben wird durch den Ausdruck

$$ddr' = f'\varphi F_1' d\tau \sigma^2 g \cos\vartheta\, d\lambda\, dt.$$

Die gesammte Anzahl der Stösse entgegengesetzter Art bekommt man hieraus, wenn man den Ausdruck insofern integrirt, dass man $d\tau$ das ganze Element $d\omega_1'$ beschreiben lässt. Man erhält in dieser Weise

$$dr' = \sigma^2 d\lambda\, dt f' F_1' g \cos\vartheta \int_{d\omega_1'} \varphi\, d\tau. \tag{3}$$

Da anderseits, nach obiger Definition der Stösse entgegengesetzter Art, die Anzahl $dr'$ jedenfalls dem Product $d\omega\, d\omega_1$ proportional sein muss, darf man ohne Weiteres setzen:

$$\int_{d\omega_1'} \varphi\, d\tau = \Psi\, d\omega\, d\omega_1 = \Psi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta\,.\, d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1. \tag{4}$$

Eine weitere einfache geometrische Überlegung ergibt nun, dass die Form der Function $\varphi$ und somit die eben eingeführte Grösse $\Psi$ in keiner Weise von der Richtung und der Länge, noch von der Lage im Raume der Strecke $C_1 C$ abhängig ist und daher von $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\xi_1$, $\eta_1$ und $\zeta_1$ vollständig unabhängig sein muss. Wir wollen aber jetzt auch noch nachweisen, dass $\Psi$ einfach der Einheit gleich ist.

Substituiren wir zu dem Zwecke den Werth für $\int_{d\omega_1'} \varphi\, d\tau$ aus 4) in 3) und integriren den kommenden Ausdruck für $dr'$ nach $\xi$, $\eta$, $\zeta$ und auch nach $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ über den ganzen Raum, wobei selbstverständlich die Argumente $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$, $\xi_1'$, $\eta_1'$ und $\zeta_1'$ von $f'$ und $F_1'$, sowie das Product $g\cos\vartheta$ als Functionen von $\eta$, $\zeta$, $\xi_1$, $\eta_1$ und $\zeta_1$ ausgedrückt zu denken sind, so haben wir

$$\iint d\nu' = \sigma^2 d\lambda\, dt\, \Psi \iint f' F_1' g \cos\vartheta \cdot d\xi\, d\eta\, d\zeta \,.\, d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1.$$

Das in diesem Ausdrucke vorkommende doppelte (eigentlich sechsfache) Integral formen wir dadurch um, dass wir statt $\eta$, $\zeta$, $\xi_1$, $\eta_1$ und $\zeta_1$ die mit diesen Grössen in bekannter Weise zusammenhängenden Geschwindigkeitscomponenten $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$, $\xi_1'$, $\eta_1'$ und $\zeta_1'$ als independente Variabeln einführen. Diese Transformation nehmen wir in drei Stufen[1] vor: Erstens führen wir anstatt von $\xi_1$, $\eta_1$ und $\zeta_1$ die Geschwindigkeitscomponenten $x$, $y$ und $z$ des gemeinschaftlichen Schwerpunktes der sich an dem Stosse betheiligenden Moleküle $m$ und $m_1$ ein; dabei haben wir das Product $d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1$ zu ersetzen durch $\left(\frac{m+m_1}{m_1}\right)^3 dx\, dy\, dz$, weil wir uns die Integration so vorgenommen denken können, dass zuerst bei unveränderlichen $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ nach $\xi_1$, $\eta_1$ und $\zeta_1$ integrirt wird. Nachher führen wir anstatt von $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ die Variabeln $\xi'$, $\eta'$ und $\zeta'$ ein, wobei wir das Raumelement $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ einfach durch das Raumelement $d\xi' d\eta' d\zeta'$ zu ersetzen haben, weil wir uns jetzt wieder zuerst die Integration nach $\xi$, $\eta$ und $\zeta$ bei constanten $x, y, z$ vorzunehmen denken können. Schliesslich führen wir anstatt von $x$, $y$, $z$ die Variabeln $\xi_1'$, $\eta_1'$ und $\zeta_1'$ ein, wobei wir das Raumelement $dx\, dy\, dz$ zu ersetzen haben durch $\left(\frac{m_1}{m+m_1}\right)^3 d\xi_1' d\eta_1' d\zeta_1'$, weil wir uns jetzt wieder zuerst die Integration nach $x$, $y$ und $z$ bei unveränderten $\xi'$, $\eta'$ und $\zeta'$ vorzunehmen denken können.

Als Resultat der Umformung ergibt sich also

$$\iint d\nu' = \sigma^2 d\lambda\, dt\, \Psi \iint f' F_1' g \cos\vartheta \cdot d\xi' d\eta' d\zeta' \,.\, d\xi_1' d\eta_1' d\zeta_1', \qquad 5)$$

worin $f' F_1' g \cos\vartheta$ als Function der neuen Variabeln ausgedrückt gedacht werden muss. Es ist nun nach dem, was

[1] Zu dieser stufenweisen Transformation gab mir eine briefliche Bemerkung des Herrn Boltzmann Anlass.

früher bezüglich der Bedeutung von $dr'$ und der Weise, in der das doppelte Integral genommen werden muss, gesagt ist, klar, dass $\iint dr'$ die Anzahl bezeichnet der während des Zeitelementes $dt$ in der Volumeinheit zwischen den Molekülen $m$ einerseits und den Molekülen $m_1$ anderseits stattfindenden Stösse, bei denen nur die Bedingung sub 3. erfüllt ist.

Wie die Anzahl der Stösse der ursprünglich hervorgehobenen Art angegeben wird durch

$$dr = f d\omega F_1 d\omega_1 \sigma^2 g \cos\vartheta d\lambda dt,$$

so wird die Anzahl derjenigen Stösse, welche sich von diesen nur insofern unterscheiden, dass die Raumelemente $d\xi' d\eta' d\zeta'$ und $d\xi_1' d\eta_1' d\zeta_1'$ an die Stelle von $d\omega$, beziehungsweise $d\omega_1$, treten und dass die Centrilinie entgegengesetzt gerichtet ist, angegeben durch

$$dr'' = f' d\xi' d\eta' d\zeta' F_1' d\xi_1' d\eta_1' d\zeta_1' \sigma^2 g \cos\vartheta d\lambda dt. \tag{6}$$

Durch Integration des letzteren Ausdruckes nach $\xi'$, $\eta'$ und $\zeta'$, sowie nach $\xi_1'$, $\eta_1'$ und $\zeta_1'$, über den ganzen Raum bekommt man aber factisch dieselbe Anzahl, welche nach dem oben gesagten durch $\iint dr'$ angedeutet wird; d. h.

$$\iint dr' = \iint dr''$$

Setzt man aber in das zweite Glied dieser Gleichung den Werth für $dr''$ aus Gleichung 6) ein und vergleicht nachher mit 5), so folgt unmittelbar

$$\Psi = 1.$$

Damit wird aber die Anzahl der Stösse entgegengesetzter Art [vergl. 3) und 4)]

$$\underline{dr' = f' F_1' d\omega d\omega_1 \sigma^2 g \cos\vartheta d\lambda dt,}$$

was zu beweisen war.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: 106_2a

Autor(en)/Author(s): Wind C.H.

Artikel/Article: Über den dem Liouville'schen Satze entsprechenden Satz der Gastheorie. 21-32