Über einen Satz der additiven Zahlentheorie

Dr. **R. Daublebsky v. Sterneck** in Wien.

Bekanntlich hat schon Legendre aus einer von Euler aufgestellten Formel folgenden Satz abgeleitet: Ist n keine Pentagonalzahl, so lässt es sich auf gleich viele Arten als Summe einer geraden, wie einer ungeraden Anzahl verschiedener ganzzahliger positiver Summanden darstellen; ist hingegen n der Pentagonalzahl $\frac{3k^2-k}{2}$ gleich, so beträgt der Unterschied der Anzahlen der geraden und ungeraden[1] Darstellungen $(-1)^k$.

Die Eigenschaft, gleich viele gerade, wie ungerade Darstellungen zu enthalten, hat Herr K. Th. Vahlen[2] auch von jenen kleineren Classen von Darstellungen der Zahl n nachgewiesen, welche dadurch definirt sind, dass bei allen Darstellungen der betreffenden Classe die Summe der modulo 3 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden einen und denselben Werth hat. Nur für die Pentagonalzahl $\frac{3k^2-k}{2}$ beträgt der Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden Darstellungen in jener Classe $(-1)^k$, für welche die Summe der absolut kleinsten Reste der Summanden (modulo 3) den Werth k hat.

---

[1] Kürzerer Ausdruck für »Darstellungen durch eine gerade, respective ungerade Anzahl von Summanden«.

[2] Beiträge zu einer additiven Zahlentheorie. Journal f. d. Mathematik, Bd. 112.

In der folgenden kurzen Mittheilung möchte ich nun einerseits zeigen, wie sich in ganz einfacher Weise der letztere Satz auf Grund des Legendre'schen herleiten lässt; anderseits sollen die von Herrn Vahlen definirten Classen von Darstellungen noch weiter in kleinere Classen zerlegt werden, für welche die Eigenschaft, gleich viele gerade, wie ungerade Darstellungen zu enthalten, im Allgemeinen ebenfalls bestehen bleibt.

1.

Den Legendre'schen Satz beweist man am einfachsten folgendermassen:[1] Wir betrachten eine bestimmte Darstellung der Zahl n durch lauter verschiedene Summanden; es sei α der kleinste dieser Summanden; ferner sollen genau die λ grössten der Summanden eine arithmetische Progression mit der Differenz 1 bilden; ist $\lambda > \alpha$, so vergrössere man die α grössten Summanden um 1 Einheit und annullire hiefür den Summanden α; ist $\lambda \leqq \alpha$, so verkleinere man die λ grössten Summanden um je 1 Einheit und füge zur Compensation λ als neuen Summanden in die Darstellung ein; hiedurch werden je eine gerade und eine ungerade Darstellung einander gegenseitig eindeutig zugeordnet. Diese Zuordnung versagt nur bei den folgenden Darstellungen:

$$n = k+(k+1)+ \quad +(2k-1)$$
$$n = k+(k+1)+ \quad .+(2k-2)$$

Im ersteren Falle ist $n = \frac{3k^2-k}{2}$, in letzterem $n = \frac{3(1-k)^2-(1-k)}{2}$; da überdies die erstere Darstellung aus k, die letztere aus $k-1$ Summanden besteht, ist der Beweis des Legendre'schen Satzes erbracht.

2.

Betrachten wir nun jene Darstellungen der Zahl n durch lauter verschiedene Summanden, bei welchen die Summe der

[1] Ich verdanke die Kenntniss dieses Beweises den Vorlesungen meines hochverehrten Lehrers, Prof. L. Gegenbauer.

mod. 3 gebildeten absolut kleinsten Reste der Summanden h beträgt und bezeichnen mit $[n]^h$ den Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden derartigen Darstellungen.

Es liege nun eine bestimmte dieser Darstellungen vor. Subtrahiren wir von jedem Summanden seinen absolut kleinsten Rest (mod. 3), so geht der eventuell vorhandene Summand 1 vollständig unter, während alle übrigen Summanden durch 3 theilbare Zahlen liefern. Wir erhalten also aus der vorliegenden Darstellung eine additive Erzeugung von $n-h$ durch lauter durch 3 theilbare Zahlen, deren jede sich höchstens dreimal vorfinden kann.

Umgekehrt fassen wir nun eine bestimmte Darstellung einer Zahl k durch lauter durch 3 theilbare Summanden, deren jeder bis zu dreimal vorkommen kann, ins Auge und wollen abzählen, aus wie vielen Darstellungen von $k+h$ durch lauter verschiedene Summanden mit der Restsumme h wir uns dieselbe durch obigen Process entstanden denken können. Finden wir irgendein Element dreimal vor, etwa $3m$, $3m$, $3m$, so kann dies nur aus der Elementengruppe $3m-1$, $3m$, $3m+1$ hervorgegangen sein; ein Paar gleicher Elemente $3m$, $3m$ kann aus den drei Elementenpaaren $3m-1$, $3m$; $3m-1$, $3m+1$; $3m$, $3m+1$, ein einzelnes Element $3m$ aus den 3 Elementen $3m-1$, $3m$, $3m+1$ entstanden sein, so dass also jedes in der Darstellung nicht dreimal auftretende Element aus je einer Elementengruppe hervorgegangen gedacht werden kann, welche bezüglich den Beitrag -1, 0, $+1$ zur Restsumme h lieferte.

Wir wollen nun ein nicht dreimal auftretendes Element, kurz ein unvollständiges Tripel gleicher Elemente nennen und annehmen, es fänden sich in der Darstellung von k genau ρ unvollständige Tripel vor.

Kommt das Element 1 in der Darstellung von $k+h$ nicht vor, so müssen offenbar von den ρ unvollständigen Tripeln $|h|+2\lambda$ solchen Elementengruppen ihre Entstehung verdanken, welche einen von 0 verschiedenen Beitrag zur Restsumme h liefern, und zwar $|h|+\lambda$ derselben je einer Gruppe mit dem Beitrage sign. h und λ derselben je einer solchen mit dem Beitrage $-$sign. h, wobei λ eine beliebige ganze, nicht negative Zahl sein kann; dies ist auf

$$\xi^{\rho}_{|h|} = \sum_{\lambda=0,1,2,\ldots} \binom{\rho}{|h|+2\lambda}\binom{|h|+2\lambda}{\lambda}$$

Arten möglich, und aus ebenso vielen Darstellungen von $k+h$ ohne Element 1 können wir uns die vorliegende Darstellung von k entstanden denken.

Kommt aber das Element 1 vor, so muss die Restsumme der übrigen Elemente $h-1$ betragen; also kann ich mir die vorliegende Darstellung von k auch aus $\xi^{\rho}_{|h-1|}$ verschiedenen Darstellungen von $k+h$ mit dem Elemente 1 entstanden denken; die letzteren Darstellungen enthalten offenbar um einen Summanden mehr als die früheren.

Besteht also die vorliegende Darstellung von k, wenn man jeden Summanden so oft zählt, so oft er auftritt, aus ν Summanden, so ergeben alle jene Darstellungen von $k+h$, aus welchen diese hervorgegangen sein kann, zur Anzahldifferenz $[k+h]^{h}$ den Beitrag

$$(-1)^{\nu}(\xi^{\rho}_{|h|}-\xi^{\rho}_{|h-1|}).$$

Da dieser Ausdruck bloss sein Vorzeichen ändert, wenn man darin h durch $-(h-1)$ ersetzt, erhalten wir, wenn wir die Anzahldifferenz $[k-(h-1)]^{-(h-1)}$ bilden, aus der vorliegenden Darstellung von k genau denselben Beitrag, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen. Dies liefert als erste zum Beweise dienliche Beziehung die folgende für jede beliebige Zahl k und h giltige Gleichung:

$$[k+h]^{h} = -[k-(h-1)]^{-(h-1)}. \tag{1}$$

Zweitens fassen wir eine bestimmte Darstellung der Zahl k durch lauter verschiedene Summanden, deren absolut kleinste Reste (mod. 3) h zur Summe geben, ins Auge, addiren aber jetzt zu jedem Elemente seinen absolut kleinsten Rest (mod. 3); da hiebei ein Element $3m$ ungeändert bleibt, das Element $3m+1$ aber in $3(m+1)-1$, das Element $3m-1$ hingegen in $3(m-1)+1$ übergeht, wird sich die Summe der absolut kleinsten Reste in $-h$ verwandeln, während die Anzahl der Summanden ungeändert bleibt; dies liefert unmittelbar die für alle k und h giltige Beziehung:

$$[k]^{h} = [k+h]^{-h}. \tag{2}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) lässt sich nun der Vahlen'sche Satz leicht, wie folgt, beweisen.

Aus (2) folgt zunächst:

$$[k]^{-h} = [k-h]^h,$$

also

$$[k-(h-1)]^{-(h-1)} = [k-2(h-1)]^{h-1}.$$

Dies in (1) eingesetzt, liefert:

$$[k+h]^h = -[k-2(h-1)]^{h-1}$$

oder

$$[k]^h = -[k-3(h-1)-1]^{h-1}. \qquad (\alpha)$$

Setzt man hierin h für $h-1$ und kehrt die Gleichung um, so folgt:

$$[k-3h-1]^h = -[k]^{h+1}$$

oder

$$[k]^h = -[k+3(h+1)-2]^{h+1}. \qquad (\beta)$$

Bei positivem h erhalten wir aus (α) successive:

$$[k]^h = -[k-3(h-1)-1]^{h-1} = [k-3(h-1)-3(h-2)-2]^{h-2} =$$
$$. = (-1)^h[k-3(h-1)-3(h-2)- \quad . -3(h-h)-h]^0 =$$
$$= (-1)^h\left[k - \frac{3h^2-h}{2}\right]^0$$

Bei negativem h aber liefert (β) ebenso:

$$[k]^h = -[k+3(h+1)-2]^{h+1} = [k+3(h+1)+3(h+2)-4]^{h+2} =$$
$$. = (-1)^h[k+3(h+1)+3(h+2)+ \quad +3(h-h)+2h]^0 =$$
$$= (-1)^h\left[k - \frac{3h^2-h}{2}\right]^0$$

Der Legendre'sche Satz, den wir eingangs bewiesen haben, lässt sich in die Form setzen:

$$\sum_{h \geqq 0} [k]^h = \begin{cases} 0 \\ (-1)^t \end{cases},$$

und zwar $(-1)^t$ in dem Falle, wo $k = \dfrac{3t^2-t}{2}$ ist; oder, indem wir für $[k]^h$ den eben gefundenen Werth einsetzen:

$$\sum_{h \gtreqless 0} (-1)^h \left[k - \frac{3h-h^2}{2}\right]^0 = \begin{cases} 0 \\ (-1)^t \end{cases}.$$

Da nun $[0]^0 = 1$ ist (da sich 0 nur durch gar keinen, also eine gerade Anzahl von Summanden darstellen lässt), folgt aus dieser Beziehung durch successives Einsetzen von $k = 1, 2, \ldots$, dass $[k]^0$ für alle Werthe $k > 0$ verschwindet.

Hieraus folgt aber unmittelbar, dass auch $[k]^h$ im Allgemeinen verschwindet und dass es nur für $k = \frac{3h^2-h}{2}$ den Werth $(-1)^h$ hat. Hiemit ist der Vahlen'sche Satz bewiesen.

3.

Die vorstehenden Überlegungen liefern aber auch unmittelbar die eingangs erwähnte weitere Theilung der von Vahlen definirten Classen von Darstellungen in kleinere Classen.

Wir wollen zu diesem Zwecke mit $y_\rho(k)$ den Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden Darstellungen von k bezeichnen, in denen jeder Summand bis zu dreimal auftreten kann und in welchen sich überdies genau ρ nicht dreimal auftretende Summanden finden.

Bezeichnen wir ferner mit η_h^ρ die Differenz

$$\eta_h^\rho = \xi_{|h|}^\rho - \xi_{|h-1|}^\rho,$$

so erhalten wir auf Grund der früheren Betrachtung für die Anzahldifferenz $[3k+h]^h$ den Ausdruck:

$$[3k+h]^h = \sum_\rho y_\rho(k)\,\eta_h^\rho.$$

Diese Gleichung denken wir uns nun für alle möglichen Werthe h aufgestellt; da aber, wie wir wissen, $\eta_h^\rho = -\eta_{-(h-1)}^\rho$ ist, so genügt es, für h etwa die Werthe $0, -1, -2, .$ zu setzen, da die übrigen doch keine neuen Beziehungen liefern würden. Ferner kann, wie man aus der Definition von $y_\rho(k)$ einsieht, diese Grösse gewiss nur für jene Werthe ρ einen von 0 verschiedenen Werth haben, welche die Bedingung $\frac{\rho^2+\rho}{2} \leqq k$ erfüllen. Die Grösse $[3k+h]^h$ ist nach dem Satze von Vahlen im Allgemeinen gleich Null; nur wenn $3k+h = \frac{3h^2-h}{2}$, also k der Trigonalzahl $\frac{h^2-h}{2}$ gleich ist, ist $[3k+h]^h = (-1)^h$.

Es sei also **erstens** k keine Trigonalzahl, sondern liege zwischen den beiden Trigonalzahlen

$$\frac{t^2+t}{2} < k < \frac{(t+1)^2+(t+1)}{2}; \qquad t > 0.$$

Dann können wir folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=t} y_\rho(k)\eta_h^\rho = 0 \qquad (h = 0, -1, -2, \ldots -t).$$

Dasselbe ist homogen in Bezug auf die Grössen $y_0(k)$, $y_1(k) \ldots y_t(k)$; die Determinante der Grössen η ist gleich 1, weil, wie man aus dem Ausdrucke für die Grössen ξ leicht erkennt, $\eta_{-i}^i = 1$, aber η_{-i}^ρ für $\rho < i$, $= 0$ ist. Die Grössen $y_\rho(k)$ müssen also sämmtlich verschwinden. Wir haben also den Satz:

Ist k keine Trigonalzahl und stellt man k derart als Summe von ganzen Zahlen dar, dass eine und dieselbe Zahl bis zu dreimal, jedoch nicht öfter, in einer und derselben Darstellung verwendet werden darf, so gibt es unter den Darstellungen, welche ρ verschiedene Elemente weniger oft als dreimal enthalten, gleich viele gerade wie ungerade für jeden gegebenen Werth des ρ.

Ist k der Trigonalzahl $\frac{t^2+t}{2}$, $t \geqq 0$ gleich, so ändert sich an dem vorstehenden Gleichungssystem bloss die rechte Seite der letzten Gleichung, welche $(-1)^t$ wird; **der Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden Darstellungen, welche ρ nicht dreimal vorkommende Summanden aufweisen, wird in diesem Falle**

$$y_\rho(k) = \begin{vmatrix} \eta_0^0 & \eta_0^1 & \ldots & \eta_0^{\rho-1} & 0 & \eta_0^{\rho+1} & \ldots & \eta_0^t \\ \eta_{-1}^0 & \eta_{-1}^1 & \ldots & \eta_{-1}^{\rho-1} & 0 & \eta_{-1}^{\rho+1} & \ldots & \eta_{-1}^t \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \eta_{-(t-1)}^0 & \eta_{-(t-1)}^1 & \ldots & \eta_{-(t-1)}^{\rho-1} & 0 & \eta_{-(t-1)}^{\rho+1} & \ldots & \eta_{-(t-1)}^t \\ \eta_{-t}^0 & \eta_{-t}^1 & \ldots & \eta_{-t}^{\rho-1} & (-1)^t & \eta_{-t}^{\rho+1} & \ldots & \eta_{-t}^t \end{vmatrix}$$

Die eben besprochenen Darstellungen von k können wir aber aus den Darstellungen von $3k+h$ durch lauter verschiedene Summanden, deren absolut kleinste Reste mod. 3 die Summe h ergeben, entstanden denken. Bezeichnen wir zum Zwecke einfacherer Ausdrucksweise die drei Elemente $3m-1$, $3m$, $3m+1$ (für einen und denselben von 0 verschiedenen Werth des m) als eine vollständige Gruppe associirter Elemente, hingegen jedes Paar oder einzelnes Element derselben als unvollständige Gruppe associirter Elemente, so können wir in einer Darstellung von $3k+h$ sämmtliche Elemente auf eine einzige Weise in (vollständige oder unvollständige) Gruppen associirter Elemente vereinigen, wobei das Element 1 vollständig unbeachtet gelassen wird. Es liefert dann $y_\rho(k)\eta_h^\rho$ den Überschuss der geraden über die ungeraden Darstellungen von $3k+h$, mit der Restsumme h und mit genau ρ unvollständigen Gruppen associirter Elemente.

Somit erhalten wir den folgenden Satz:

Ist $\frac{n-h}{3}$ keiner Trigonalzahl gleich, so gibt es unter den Darstellungen der Zahl n durch lauter verschiedene Summanden, bei welchen erstens die Summe der absolut kleinsten Reste der Summanden (mod. 3) h beträgt und bei welchen zweitens genau ρ unvollständige Gruppen associirter Elemente auftreten, für jeden beliebigen Werth von ρ gleich viele gerade wie ungerade.

Ist aber $\frac{n-h}{3}$ der Trigonalzahl $\frac{t^2+t}{2}$ gleich, so beträgt der Überschuss der Anzahl der geraden über die der ungeraden derartigen Darstellungen $y_\rho\left(\frac{n-h}{3}\right)\eta_h^\rho$.