Über eine zahlentheoretische Aufgabe

F. Mertens,
w. M. k. Akad.

Eine Reihe von ganzen Zahlen, deren grösster gemeinschaftlicher Theiler 1 ist, möge kurz primitiv genannt werden.

Ist

$$a_1, a_2, \ldots a_k, m$$

eine gegebene primitive Zahlenreihe und m nicht $= 0$, $k > 1$, so soll in den folgenden Zeilen die Aufgabe behandelt werden, k ganze Zahlen $x_1, x_2, \ldots x_n$ von der Art zu bestimmen, dass die Zahlenreihe

$$a_1 + mx_1, a_2 + mx_2, \ldots a_k + mx_k$$

primitiv ausfällt.

1.

Es sei d der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen $a_1, a_2, \ldots a_k$. Derselbe ist zu m theilerfremd, und man kann daher ganze Zahlen δ, μ ermitteln, welche der Gleichung

$$d\delta + m\mu = 1$$

genügen. Man bestimme irgend eine ganzzahlige Lösung $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ der Gleichung

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_k\alpha_k = d$$

und eine nicht ausschliesslich aus Nullen bestehende Lösung $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ der Gleichung

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \ldots + a_k\beta_k = 0.$$

Man darf die Lösung $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ primitiv annehmen, da dieselbe eintretendenfalls durch die primitive Lösung $\frac{\beta_1}{\varepsilon}, \frac{\beta_2}{\varepsilon}, \ldots \frac{\beta_k}{\varepsilon}$ ersetzt werden könnte, wo ε den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ bezeichnet. Setzt man dann

$$\beta_1 + \delta\alpha_1 = \gamma_1, \; \beta_2 + \delta\alpha_2 = \gamma_2 \ldots \beta_k + \delta\alpha_k = \gamma_k, \tag{1}$$

so wird

$$a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots + a_k\gamma_k = d\delta \tag{2}$$

und die Zahlenreihe $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ ist eine primitive. Denn der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ geht der Gleichung

$$\frac{a_1}{d} \cdot \gamma_1 + \frac{a_2}{d} \cdot \gamma_2 + \quad + \frac{a_k}{d} \cdot \gamma_k = \delta$$

zufolge in δ, also nach (1) auch in $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ auf und muss demnach $= 1$ sein, weil $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_k$ primitiv sind.

Dies vorausgeschickt, bestimme man irgend eine ganzzahlige Lösung $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_k$ der Gleichung

$$\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \quad . + \gamma_k\xi_k = 1 \tag{3}$$

und setze

$$\mu\xi_1 = x_1 \qquad \mu\xi_2 = x_2 \qquad \mu\xi_n = x_n.$$

Dann ist die Zahlenreihe

$$a_1 + mx_1, \; a_2 + mx_2, \ldots a_k + mx_k$$

primitiv. Denn man hat nach (2), (3)

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(a_1 + mx_1) + \gamma_2(a_2 + mx_2) + \ldots + \gamma_k(a_k + mx_k) \\
&= a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \quad . + a_k\gamma_k + m\mu(\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + . \quad + \gamma_k\xi_k) \\
&= d\delta + m\mu = 1.
\end{aligned}$$