

Über eine zahlentheoretische Aufgabe

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

Eine Reihe von ganzen Zahlen, deren grösster gemeinschaftlicher Theiler 1 ist, möge kurz primitiv genannt werden. Ist

$$a_1, a_2, \dots, a_k, m$$

eine gegebene primitive Zahlenreihe und m nicht $= 0$, $k > 1$, so soll in den folgenden Zeilen die Aufgabe behandelt werden, k ganze Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n von der Art zu bestimmen, dass die Zahlenreihe

$$a_1 + mx_1, a_2 + mx_2, \dots, a_k + mx_k$$

primitiv ausfällt.

1.

Es sei d der grösste gemeinschaftliche Theiler der Zahlen a_1, a_2, \dots, a_k . Derselbe ist zu m theilerfremd, und man kann daher ganze Zahlen δ, μ ermitteln, welche der Gleichung

$$d\delta + m\mu = 1$$

genügen. Man bestimme irgend eine ganzzahlige Lösung $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ der Gleichung

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_k\alpha_k = d$$

und eine nicht ausschliesslich aus Nullen bestehende Lösung $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ der Gleichung

$$a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_k\beta_k = 0.$$

Man darf die Lösung $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ primitiv annehmen, da dieselbe eintretendenfalls durch die primitive Lösung $\frac{\beta_1}{\varepsilon}, \frac{\beta_2}{\varepsilon}, \dots, \frac{\beta_k}{\varepsilon}$ ersetzt werden könnte, wo ε den grössten gemeinschaftlichen Theiler von $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ bezeichnet. Setzt man dann

$$\beta_1 + \delta \alpha_1 = \gamma_1, \beta_2 + \delta \alpha_2 = \gamma_2, \dots, \beta_k + \delta \alpha_k = \gamma_k, \quad (1)$$

so wird

$$a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + \dots + a_k \gamma_k = d \delta \quad (2)$$

und die Zahlenreihe $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ ist eine primitive. Denn der grösste gemeinschaftliche Theiler von $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ geht der Gleichung

$$\frac{a_1}{d} \cdot \gamma_1 + \frac{a_2}{d} \cdot \gamma_2 + \dots + \frac{a_k}{d} \cdot \gamma_k = \delta$$

zufolge in δ , also nach (1) auch in $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ auf und muss demnach $= 1$ sein, weil $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ primitiv sind.

Dies vorausgeschickt, bestimme man irgend eine ganzzahlige Lösung $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ der Gleichung

$$\gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \dots + \gamma_k \xi_k = 1 \quad (3)$$

und setze

$$\mu \xi_1 = x_1, \quad \mu \xi_2 = x_2, \quad \dots, \quad \mu \xi_k = x_k.$$

Dann ist die Zahlenreihe

$$a_1 + m x_1, a_2 + m x_2, \dots, a_k + m x_k$$

primitiv. Denn man hat nach (2), (3)

$$\begin{aligned} & \gamma_1(a_1 + m x_1) + \gamma_2(a_2 + m x_2) + \dots + \gamma_k(a_k + m x_k) \\ &= a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_2 + \dots + a_k \gamma_k + m \mu (\gamma_1 \xi_1 + \gamma_2 \xi_2 + \dots + \gamma_k \xi_k) \\ &= d \delta + m \mu = 1. \end{aligned}$$

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: [106_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Anonym

Artikel/Article: [Über eine zahlentheoretische Aufgabe. 132-133](#)