Über Dirichlet's Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte ganzzahlige arithmetische Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen enthält

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

Legendre hat zuerst den Satz ausgesprochen und zu beweisen versucht,[1] dass in jeder ganzzahligen unbegrenzten arithmetischen Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen vorkommen. Sein Beweis ist jedoch unbefriedigend.

Den ersten strengen Beweis des Legendre'schen Satzes gab Dirichlet.[2] So geistreich aber auch dieser berühmte Beweis sein möge, so ist dennoch eine Vereinfachung und Vervollständigung desselben wünschenswerth. Denn einerseits stützt sich derselbe auf den quadratischen Reciprocitätssatz und die Bestimmung der Classenanzahl der eigentlich primitiven binären quadratischen Formen einer gegebenen Determinante, mit welchen zwei Fragen der zu beweisende Satz in keinem Zusammenhange steht. Anderseits gewährt derselbe nur die etwas vage Einsicht, dass die Progression unendlich viele Primzahlen enthält, ohne dass man eine obere Grenze für die Anzahl der Glieder erfährt, unter welchen die über ein

---

[1] Legendre, Essai sur la théorie des nombres

[2] Dirichlet, Abhandlungen der Berliner Akademie aus dem Jahre 1837.

gegebenes Glied der Progression hinaus liegende nächste Primzahl vorkommen muss.

In dem Folgenden soll eine Umarbeitung des Dirichlet'schen Beweises versucht werden, welche die genannten zwei Forderungen erfüllt. Theile derselben sind in früher erschienenen Schriften enthalten.[1]

1.

Es sei n eine über 1 liegende ganze Zahl, p irgend eine n nicht übersteigende Primzahl, p^π die höchste Potenz von p, welche n nicht überschreitet, und P das über alle Primzahlen p zu erstreckende Product[2]

$$P = \Pi p^\pi.$$

Setzt man

$$E\left(\frac{n}{2^\alpha}\right) = n_\alpha$$

$$N = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \ldots n_\nu!},$$

wo $E(x)$ nach Legendre die grösste in x enthaltene ganze Zahl und 2^ν die höchste n nicht übersteigende Potenz von 2 bezeichnen, so ist N ein Vielfaches von P.

Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$E\left(\frac{n}{2^k p}\right) + E\left(\frac{n}{2^k p^2}\right) + \ldots + E\left(\frac{n}{2^k p^\pi}\right) = s_k,$$

so wird, über alle Primzahlen p erstreckt,

$$n! = \Pi p^{s_0} \tag{1}$$

$$n_1!\, n_2! \ldots n_\nu! = \Pi p^{s_1} . \Pi p^{s_2} \ldots \Pi p^{s_\nu}$$

$$= \Pi p^{s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu}$$

und es genügt darzuthun, dass

$$s_0 - s_1 - s_2 - \ldots - s_\nu \geqq \pi$$

ist.

---

[1] Mertens, Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. Crelle's Journal, Bd. 78. — Über Dirichlet'sche Reihen. Diese Sitzungsberichte, Bd. CIV. — Über das Nichtverschwinden Dirichlet'scher Reihen mit reellen Gliedern. Diese Sitzungsberichte, Bd. CIV.

[2] Tchebischef, Petersburger Akademie, 1850.

Es sei λ irgend eine der Zahlen $1, 2, \ldots \pi$ und 2^μ die höchste Potenz von 2, welche $\frac{n}{p^\lambda}$ nicht übersteigt. Ist $\mu > 0$, so wird

$$E\left(\frac{n}{2p^\lambda}\right) + E\left(\frac{n}{2^2p^\lambda}\right) + \ldots + E\left(\frac{n}{2^\nu p^\lambda}\right) =$$
$$= E\left(\frac{n}{2p^\lambda}\right) + E\left(\frac{n}{2^2p^\lambda}\right) + \ldots + E\left(\frac{n}{2^\mu p^\lambda}\right)$$
$$\overline{\gtrless} E\left(\frac{n}{2p^\lambda} + \frac{n}{2^2p^\lambda} + \ldots + \frac{n}{2^\mu p^\lambda}\right);$$

es ist aber

$$\frac{n}{2p^\lambda} + \frac{n}{2^2p^\lambda} + \ldots + \frac{n}{2^\mu p^\lambda} + 1 = \frac{n}{p^\lambda} - \left(\frac{n}{2^\mu p^\lambda} - 1\right)$$
$$\overline{\gtrless} \frac{n}{p^\lambda}$$

und daher

$$E\left(\frac{n}{2p^\lambda} + \frac{n}{2^2p^\lambda} + \ldots + \frac{n}{2^\mu p^\lambda}\right) + 1 \overline{\gtrless} E\left(\frac{n}{p^\lambda}\right).$$

Demzufolge wird

$$E\left(\frac{n}{2p^\lambda}\right) + E\left(\frac{n}{2^2p^\lambda}\right) + \ldots + E\left(\frac{n}{2^\nu p^\lambda}\right) + 1 \overline{\gtrless} E\left(\frac{n}{p^\lambda}\right).$$

Diese Ungleichung gilt auch noch für $\mu = 0$, da in diesem Falle ihre linke Seite den Werth 1 hat.

Setzt man $\lambda = 1, 2, \ldots \pi$ und addirt, so ergibt sich

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\nu + \pi \overline{\gtrless} s_0,$$

w. z. b. w.

Aus der Theilbarkeit von N durch P folgt

$$P \leqq N.$$

Ist n gerade, so wird

$$\frac{n!}{n_1!\,n_1!} = 2^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots n};$$

da aber

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{n} < \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n}{n+1},$$

also

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{n}\right)^2 < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{n}{n+1}$$

$$< \frac{1}{n+1}$$

ist, so folgt

$$\frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \tag{2}$$

$$\frac{n!}{n_1!\,n_1!} < \frac{2^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Ist dagegen n ungerade, so wird

$$\frac{n!}{n_1!\,n_1!} = n\,.\,2^{n-1}\,\frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}$$

und nach (2)

$$\frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

also

$$\frac{n!}{n_1!\,n_1!} < 2^{n-1}\sqrt{n}.$$

In beiden Fällen ist demnach

$$\left(\frac{n!}{n_1!\,n_1!}\right)^2 < 2^{2n}.\frac{n}{4} < 2^{2n}\left(1+\frac{1}{4}\right)^n$$

$$< 5^n$$

und man hat

$$\frac{n!}{n_1!\,n_1!} < 5^{\frac{n}{2}}$$

Hieraus folgt

$$N = \frac{n!}{n_1!\,n_1!}\,\frac{n_1!}{n_2!\,n_2!}\cdots\frac{n_{\nu-1}!}{n_\nu!\,n_\nu!}$$

$$< 5^{\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\dots+\frac{n}{2^\nu}}$$

$$< 5^{n-\frac{n}{2^\nu}} \leqq 5^{n-1}$$

und daher auch

$$P < 5^{n-1}. \tag{3}$$

Dies vorausgeschickt, sei, das Product über alle Primzahlen p erstreckt,

$$\Pi p^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\dots+\frac{1}{p^\pi}} = L.$$

Da

$$s_0 \leqq \frac{n}{p}+\frac{n}{p^2}+\dots+\frac{n}{p^\pi}$$

$$> \frac{n}{p}+\frac{n}{p^2}+\dots+\frac{n}{p^\pi}-\pi$$

ist, so folgt aus (1)

$$n! \leqq L^n$$

$$> \frac{L^n}{P}$$

und man hat nach (3)

$$5^{n-1}n! > L^n \geqq n!$$

Nun ist

$$\frac{n^n}{n!} = \left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\dots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$2 \leqq \left(1+\frac{1}{m}\right)^m < e$$

und demzufolge

$$\frac{n^n}{n!} < e^{n-1} < e^n$$

$$\geqq 2^{n-1}$$

oder

$$n! > n^n e^{-n}$$
$$\leqq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n$$

Umsomehr ist also

$$L^n > n^n e^{-n}$$
$$< 2\cdot\left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot 5^{n-1} < \left(\frac{5n}{2}\right)^n < n^n e^n$$

und daher

$$\frac{n}{e} < L < ne.$$

Hienach genügt die Summe

$$\Lambda(n) = \log L = \Sigma\left(\frac{\log p}{p} + \frac{\log p}{p^2} + \cdot\ \ \cdot + \frac{\log p}{p^\pi}\right)$$

der Ungleichung

$$\log n - 1 < \Lambda(n) < \log n + 1. \tag{4}$$

2.

Es sei k eine gegebene positive, über 2 liegende Zahl. Nach Kronecker[1] gibt es zwei Reihen von ganzen positiven Zahlen

$$g_1, g_2, \cdot\ \ g_\rho$$
$$m_1, m_2, \ldots m_\rho,$$

welche die Eigenschaft besitzen, dass die nicht negativen kleinsten Reste des Ausdruckes

$$g_1^{i_1} g_2^{i_2} \cdot\ \ \cdot g_\rho^{i_\rho}$$

in Bezug auf den Modul k genau alle $\varphi(k)$ positiven, unter k liegenden und zu k theilerfremden Zahlen ergeben, wenn i_1 von 0 bis m_1-1, i_2 von 0 bis m_2-1 u. s. w., i_ρ von 0 bis $m_\rho-1$ laufen.

Ist

$$n \equiv g_1^{i_1} g_2^{i_2} \cdot\ \ \cdot g_\rho^{i_\rho} \qquad (\text{mod. } k)$$

---

[1] Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie, 1870.

so mögen $i_1, i_2, \ldots i_\rho$ die Indices von n in Bezug auf den Modul k genannt werden. Man erhält die Indices des Productes zweier Zahlen n, n', wenn man beziehungsweise die Indices von n und n' addirt und die Resultate mittelst der Moduln $m_1, m_2, \ldots m_\rho$ auf ihre nicht negativen kleinsten Reste reducirt.

Sind

$$\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\rho$$

beziehungsweise Wurzeln der Gleichungen

$$\omega_1^{m_1} = 1 \quad \omega_2^{m_2} = 1 \ldots \quad \omega_\rho^{m_\rho} = 1,$$

so gibt es $m_1 m_2 \ldots m_\rho = \varphi(k)$ Wurzelcombinationen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\rho$, wenn jeder Werth von ω_1 mit jedem Werthe von ω_2, jedem Werthe von ω_3 u. s. f. zusammengestellt wird. Unter diesen Wurzelcombinationen werde eine bestimmte, sonst beliebige Reihenfolge festgesetzt, wobei aber die Combination der Werthe

$$\omega_1 = 1 \quad \omega_2 = 1 \quad \ldots \quad \omega_\rho = 1$$

die erste Stelle einnehmen möge. Sind dann $i_1, i_2, \ldots i_\rho$ die Indices einer zu k theilerfremden Zahl n in Bezug auf den Modul k, so werde das aus den Wurzeln der h^{ten} Combination gebildete Product $\omega_1^{i_1} \omega_2^{i_2}, \ldots \omega_\rho^{i_\rho}$ mit $f_{h-1}(n)$ bezeichnet. Für Zahlen n dagegen, welche nicht zu k theilerfremd sind, werde für jedes h

$$f_{h-1}(n) = 0$$

festgesetzt.

Man hat

$$f_h(n) f_h(n') = f_h(nn') \tag{5}$$

und, wenn $h > 0$ ist,

$$f_h(a) + f_h(a+1) + f_h(a+2) + \ldots + f_h(a+k-1) = 0.$$

Dieser Gleichung zufolge ist für irgend eine nicht negative Zahl μ

$$|f_h(m) + f_h(m+1) + \ldots + f_h(m+\mu)| \leqq \frac{1}{2}\varphi(k). \tag{6}$$

Aus der Abel'schen Umformung

$$f_h(m)a_m + f_h(m+1)a_{m+1} + \ldots f_h(m+\mu)a_{m+\mu} =$$
$$f_h(m)(a_m - a_{m+1}) + (f_h(m) + f_h(m+1))(a_{m+1} - a_{m+2})$$
$$+ (f_h(m) + f_h(m+1) + f_h(m+2))(a_{m+2} - a_{m+3})$$
$$+ \ldots + (f_h(m) + f_h(m+1) + \ldots + f_h(m+\mu-1))(a_{m+\mu-1} - a_{m+\mu})$$
$$+ (f_h(m) + f_h(m+1) + \ldots + f_h(m+\mu))a_{m+\mu}$$

folgt dann, wenn $a_m, a_{m+1}, \ldots a_{m+\mu}$ positiv und

$$a_m \geqq a_{m+1} \geqq a_{m+2} \geqq \ldots \geqq a_{m+\mu}$$

sind,

$$|f_h(m)a_m + f_h(m+1)a_{m+1} + \ldots + f_h(m+\mu)a_{m+\mu}| \tag{7}$$
$$\leqq \frac{1}{2}\varphi(k)(a_m - a_{m+1} + a_{m+1} - a_{m+2} + \ldots + a_{m+\mu})$$
$$\leqq \frac{1}{2}\varphi(k) \,.\, a_m.$$

Wird zur Abkürzung

$$\varphi(k) = 1 + r$$

gesetzt, so hat die Summe

$$f_0(n) + f_1(n) + f_2(n) + \ldots + f_r(n) \tag{8}$$

den Werth $\varphi(k)$ oder Null, je nachdem $n \equiv 1 \pmod{k}$ ist oder nicht.

3.

Aufgabe. Es sei

$$\Sigma f_1(\alpha) f_2(\beta) \ldots f_r(\varepsilon) = G(m),$$

wo die Summe über alle möglichen Zerlegungen der Zahl m in r positive Factoren $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ zu erstrecken ist und zwei Zerlegungen nur dann als identisch gelten, wenn sie in den ersten, zweiten, $\ldots r^{\text{ten}}$ Factoren übereinstimmen; es soll die Summe

$$\Phi(n) = G(1) + G(2) + G(3) + \ldots + G(n)$$

abgeschätzt werden.

$\Phi(n)$ ist die Summe aller Producte

$$f_1(\alpha) f_2(\beta) \cdot\ \ . f_r(\varepsilon),$$

in welchen $\alpha\beta\ldots\varepsilon \leqq n$ ist.

Unter diesen Producten gibt es zunächst solche, in welchen die $r-1$ ersten Stellenzeiger der Reihe $\alpha, \beta, \ldots \delta, \varepsilon$ die Zahl

$$\nu = E(\sqrt[r]{n})$$

nicht übersteigen. Ihre Summe sei Σ_r. Fasst man alle Glieder von Σ_r, welche die $r-1$ ersten Factoren $f_1(\alpha), f_2(\beta), \ldots f_{r-1}(\delta)$ gemein haben, in je eine Theilsumme zusammen, so ist eine solche

$$= f_1(\alpha) f_2(\beta) \cdot\ \ . f_{r-1}(\delta)\left(f_r(1) + f_r(2) + \quad + f_r\left(E\frac{n}{\alpha\beta.\ \ .\delta}\right)\right),$$

also ihr absoluter Betrag nach (6)

$$\leqq \frac{1}{2}\varphi(k).$$

Die Anzahl dieser Theilsummen ist ν^{r-1}, da jede der Zahlen $\alpha, \beta, .\ \ .\delta$ die Werthe $1, 2, .\ \ .\nu$ annehmen kann, und man hat daher

$$|\Sigma_r| \leqq \frac{1}{2}\varphi(k)\,\nu^{r-1} \leqq \frac{1}{2}\varphi(k)\,n^{\frac{r-1}{r}}$$

Alle übrigen Glieder von $\Phi(n)$ zerfallen in $r-1$ getrennte Inbegriffe $\Sigma_1, \Sigma_2, .\ \ .\Sigma_{r-1}$, wenn Σ_i diejenigen Glieder umfasst, in welchen der erste über ν liegende Stellenzeiger der Reihe $\alpha, \beta, \ldots \delta$ der i^{te} ist.

Alle Glieder von Σ_i, welche sich nur in ihrem i^{ten} Factor unterscheiden, also die übrigen $r-1$ Factoren gemein haben, sind von der Form

$$f_i(l) f_{\mathfrak{a}}(a) f_{\mathfrak{b}}(b) \ldots f_{\mathfrak{e}}(e),$$

wo $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{e}$ die Zahlen $1, 2, .\ \ .n$ nach Ausschluss von i bezeichnen und

$$lab.\ \ .e \leqq n \qquad l > \nu$$

ist. In diesen Gliedern hat l demnach die Werthe

$$\nu+1, \nu+2, \ldots E\frac{n}{ab\ldots e}$$

und ihre Summe ist

$$=f_{\mathfrak{a}}(a)f_{\mathfrak{b}}(b)\ldots f_{\mathfrak{e}}(e)(f_i(\nu+1)+f_i(\nu+2)+\ldots),$$

der absolute Betrag der letzteren also nach (6) $\leqq \frac{1}{2}\varphi(k)$. Solcher Summen enthält Σ_i so viele, als es Producte $f_{\mathfrak{a}}(a)f_{\mathfrak{b}}(b)\ldots$ $\ldots f_{\mathfrak{e}}(e)$ gibt. Die Anzahl dieser Producte übersteigt, da

$$ab\ldots e \leqq \frac{n}{\nu+1} < n^{\frac{r-1}{r}}$$

ist, nicht die Anzahl $\mathfrak{A}$ aller Systeme von $r-1$ positiven Zahlen $a, b, \ldots e$, welche der Bedingung

$$ab\ldots e \leqq n^{\frac{r-1}{r}}$$

genügen, und es ist daher

$$|\Sigma_i| \leqq \mathfrak{A}\cdot\frac{1}{2}\varphi(k).$$

Bezeichnet aber $\mathfrak{A}(m)$ die Anzahl aller Zerlegungen der Zahl m in $r-1$ Factoren und n_0 die Zahl $E\left(n^{\frac{r-1}{r}}\right)$, so ist

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} &\leqq \mathfrak{A}(1)+\mathfrak{A}(2)+\ldots+\mathfrak{A}(n_0)\\ &\leqq n_0\left(\frac{\mathfrak{A}(1)}{1}+\frac{\mathfrak{A}(2)}{2}+\ldots+\frac{\mathfrak{A}(n_0)}{n_0}\right)\end{aligned}$$

und anderseits

$$\frac{\mathfrak{A}(1)}{1}+\frac{\mathfrak{A}(2)}{2}+\ldots+\frac{\mathfrak{A}(n_0)}{n_0} \leqq \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n_0}\right)^{r-1}$$

Da

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n_0} \leqq 1+\log n_0$$

ist, so ergibt sich

$$\mathfrak{A} \leqq n_0 (1 + \log n_0)^{r-1} \leqq n^{\frac{r-1}{r}} \left(1 + \frac{r-1}{r} \log n\right)^{r-1}$$

und man hat demnach

$$|\Sigma_i| \leqq \frac{1}{2} \varphi(k)\, n^{\frac{r-1}{r}} \left(1 + \frac{r-1}{r} \log n\right)^{r-1}$$

Hienach wird

$$\begin{aligned} |\Phi(n)| &= |\Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_r| \\ &\leqq |\Sigma_1| + |\Sigma_2| + \ldots + |\Sigma_r| \\ &\leqq \frac{r\varphi(k)}{2}\, n^{\frac{r-1}{r}} \left(1 + \frac{r-1}{r} \log n\right)^{r-1} \end{aligned} \tag{9}$$

Diese Ungleichung ist in der stillschweigenden Voraussetzung abgeleitet worden, dass $r > 1$, $n > 1$ ist. Sie bleibt aber auch noch in den Fällen $r = 1$ $(k = 4)$, $n = 1$ bestehen. Ist nämlich $r = 1$, so folgt sie unmittelbar aus (6). Ist aber $n = 1$, so ist

$$\Phi(1) = G(1) = 1.$$

Da

$$G(p+1) + G(p+2) + \ldots + G(q) = \Phi(q) - \Phi(p)$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} |G(p+1) + G(p+2) + \ldots + G(q)| &\leqq |\Phi(q)| + |\Phi(p)| \\ &\leqq r\varphi(k)\, q^{\frac{r-1}{2}} \left(1 + \frac{r-1}{r} \log q\right)^{r-1} \end{aligned} \tag{10}$$

Insbesondere ist

$$|G(m)| \leqq r\varphi(k)\, m^{\frac{r-1}{r}} \left(1 + \frac{r-1}{r} \log m\right)^{r-1} \tag{11}$$

Aus den vorstehenden Umgleichungen ergibt sich die Convergenz der Reihen

$$G = G(1) + \frac{1}{2} G(2) + \frac{1}{3} G(3) + \ldots$$

$$H = \frac{1}{2} G(2) \log 2 + \frac{1}{3} G(3) \log 3 + \ldots$$

Setzt man nämlich

$$R_n = \frac{1}{n+1} G(n+1) + \frac{1}{n+2} G(n+2) + \quad + \frac{1}{m} G(m)$$

$$R'_n = \frac{1}{n+1} G(n+1) \log(n+1) + \frac{1}{n+2} G(n+2) \log(n+2) + \\ + \frac{1}{m} G(m) \log m,$$

so wird nach der Abel'schen Umformung

$$R_n = G(n+1)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \\ + (G(n+1)+G(n+2))\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \\ + \ldots + (G(n+1)+G(n+2)+\ldots+G(m-1))\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\ + (G(n+1)+G(n+2)+ \quad . + G(m))\frac{1}{m}$$

$$R'_n = G(n+1)\left(\frac{\log(n+1)}{n+1} - \frac{\log(n+2)}{n+2}\right) + \\ + (G(n+1)+G(n+2))\left(\frac{\log(n+2)}{n+2} - \frac{\log(n+3)}{n+3}\right) + \\ + (G(n+1)+G(n+2)+ . \quad + G(m))\frac{\log m}{m}$$

und daher nach (10)

$$\frac{1}{r\varphi(k)}|R_n| \leqq \frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(n+1)\right)^{r-1}}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}} + \\ + \frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(n+2)\right)^{r-1}}{(n+2)^{1+\frac{1}{r}}} +$$

$$+\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(m-1)\right)^{r-1}}{(m-1)^{1+\frac{1}{r}}}+\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}}{m^{\frac{1}{r}}}$$

$$\frac{1}{r\varphi(k)}|R'_n|\leqq\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(n+1)\right)^{r-1}}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}\log(n+1)+.$$

$$+\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(m-1)\right)^{r-1}}{(m-1)^{1+\frac{1}{r}}}\log(m-1)+$$

$$+\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log m\right)^{r-1}}{m^{\frac{1}{r}}}\log m.$$

Es genügt also eine Summe von der Form

$$S_h=\frac{(\log(n+1))^h}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}+\frac{(\log(n+2))^h}{(n+2)^{1+\frac{1}{r}}}+$$

$$.+\frac{(\log(m-1))^h}{(m-1)^{1+\frac{1}{r}}}+\frac{(\log m)^h}{m^{\frac{1}{r}}}$$

abzuschätzen.

Man hat zu diesem Ende

$$\frac{1}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}<\frac{r}{n^{\frac{1}{r}}}-\frac{r}{(n+1)^{\frac{1}{r}}}$$

und daher, wenn $\lambda\geqq 1$ ist,

$$\frac{(\log(n+\lambda))^h}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}<\frac{r(\log(n+\lambda))^h}{n^{\frac{1}{r}}}-\frac{r(\log(n+\lambda+1))^h}{(n+1)^{\frac{1}{r}}}$$

$$+\frac{r(\log(n+\lambda+1))^h-r(\log(n+\lambda))^h}{(n+1)^{\frac{1}{r}}};$$

wird aber beachtet, dass

$$(\log(n+1+\lambda))^h - (\log(n+\lambda))^h < h(\log(n+\lambda+1) - \log(n+\lambda)) \,.$$
$$. (\log(n+1+\lambda))^{h-1}$$
$$< \frac{h}{n+1}(\log(n+1+\lambda))^{h-1}$$

ist, so folgt

$$\frac{(\log(n+\lambda))^r}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}} < \frac{r(\log n+\lambda))^h}{n^{\frac{1}{r}}} - \frac{r(\log(n+\lambda+1))^h}{(n+1)^{\frac{1}{r}}} +$$
$$+ \frac{hr(\log(n+\lambda+1))^{h-1}}{(n+1)^{\frac{1}{r}}}.$$

Diese Ungleichung ergibt nach und nach

$$\frac{(\log(n+1))^h}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}} < \frac{r(\log(n+1))^h}{n^{\frac{1}{r}}} - \frac{r(\log(n+2))^h}{(n+1)^{\frac{1}{r}}} +$$
$$+ \frac{hr(\log(n+2))^{h-1}}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}$$

$$\frac{(\log(n+2))^{h-1}}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}} < \frac{r(\log(n+2))^{h-1}}{n^{\frac{1}{r}}} - \frac{r(\log(n+3))^{h-1}}{(n+1)^{\frac{1}{r}}} +$$
$$+ \frac{(h-1)r(\log(n+3))^{h-2}}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}}$$

und man hat demnach

$$\frac{(\log(n+1))^h}{(n+1)^{1+\frac{1}{r}}} < \frac{r(\log(n+1))^h + hr^2(\log(n+2))^{h-1} + \ldots + h!\,r^{h+1}}{n^{\frac{1}{r}}}$$
$$- \frac{r\log(n+2)^h + hr^2(\log(n+3))^{h-1} + \ldots + h!\,r^{h+1}}{(n+1)^{\frac{1}{r}}}.$$

Wird hierin $n = n, n+1, \ldots m-1$ gesetzt und addirt, so folgt

$$S_h < \frac{r(\log(n+1))^h + hr^2(\log(n+2))^{h-1} + \ldots + h!\, r^{h+1}}{n^{\frac{1}{r}}} \tag{12}$$

$$-\frac{r(\log(m+1))^h + hr^2(\log(m+2))^{h-1} + \ldots + h!\, r^{h+1}}{m^{\frac{1}{r}}} +$$

$$+ \frac{(\log m)^h}{m^{\frac{1}{r}}}$$

$$< \frac{r(\log(n+1))^h + hr^2(\log(n+2))^{h-1} + \ldots + h!\, r^{h+1}}{n^{\frac{1}{r}}}.$$

Die Grössen R_n, R'_n sind demnach von nicht höherer Ordnung als

$$\frac{(\log n)^{r-1}}{n^{\frac{1}{r}}}, \quad \frac{(\log n)^r}{n^{\frac{1}{r}}}. \tag{13}$$

4.

Aufgabe. Es sei, die Summe über alle Theiler δ von m erstreckt,

$$\Sigma G(\delta) = F(m)$$

und

$$\Theta(n) = F(1) + \frac{1}{2}F(2) + \frac{1}{3}F(3) + \ldots + \frac{1}{n}F(n);$$

es soll der asymptotische Ausdruck von $\Theta(n)$ für grosse Werthe von n gefunden werden.

Es sei

$$E\left(\frac{n}{h}\right) = n_h$$

$$E(\sqrt{n}) = \mu$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} = \psi(m)$$

$$A = G(1)\psi(n_1) + \frac{1}{2} G(2)\psi(n_2) + \ldots + \frac{1}{\mu} G(\mu)\psi(n_\mu)$$

$$B = \frac{1}{\mu+1} G(\mu+1)\psi(n_{\mu+1}) + \frac{1}{\mu+2} G(\mu+2)\psi(n_{\mu+2}) + \ldots + \frac{1}{n} G(n)\psi(n_n).$$

Es wird dann

$$\Theta(n) = G(1)\psi(n_1) + \frac{1}{2} G(2)\psi(n_2) + \ldots + \frac{1}{n} G(n)\psi(n_n)$$
$$= A+B.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{1}{m} - \log(m+1) + \log m = \frac{1}{m} - \log\left(1+\frac{1}{m}\right) = b_m$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_m = \chi(m),$$

so wird

$$\psi(n_h) = \log(1+n_h) + \chi(n_h)$$
$$= \log\frac{n}{h} + \chi(n) + \log(1+n_h) - \log\frac{n}{h} - (\chi(n) - \chi(n_h)).$$

Da aber

$$\log(1+n_h) - \log\frac{n}{h} > 0$$
$$\leqq \log\left(1+\frac{n}{h}\right) - \log\frac{n}{h} = \log\left(1+\frac{h}{n}\right)$$
$$< \frac{h}{n},$$

ferner

$$b_m = \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{4m^4} - \ldots$$
$$> 0$$
$$< \frac{1}{2(m-1)} - \frac{1}{2m},$$

also

$$\chi(n) - \chi(n_h) > 0$$
$$< \frac{1}{2n_h}$$
$$< \frac{h}{n}$$

ist, so wird, vom Vorzeichen abgesehen,

$$\psi(n_h) - \log n - \chi(n) + \log h < \frac{h}{n}\cdot$$

Multiplicirt man mit $\frac{1}{h}G(h)$ und summirt von $h=1$ bis $h=\mu$, so folgt

$$A - (\log n + \chi n)\left(G(1) + \frac{1}{2}G(2) + \quad . + \frac{1}{\mu}G(\mu)\right)$$
$$+ \frac{1}{2}G(2)\log 2 + \frac{1}{3}G(3)\log 3 + \quad . + \frac{1}{\mu}G(\mu)\log n$$
$$< \frac{1}{n}|G(1)| + \frac{1}{n}|G(2)| + \quad + \frac{1}{n}|G(\mu)|.$$

Nun ist nach (11), wenn $m \leqq \mu$,

$$|G(m)| \leqq r\varphi(k)n^{\frac{r-1}{2r}}\left(1 + \frac{r-1}{2r}\log n\right)^{r-1}$$

also

$$|G(1)| + |G(2)| + \quad . + |G(\mu)| \leqq n\cdot\frac{r\varphi(k)}{n^{\frac{1}{2r}}}\left(1 + \frac{r-1}{2r}\log n\right)^{r-1}$$

ferner bis auf eine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{n}$

$$\chi(n) = \mathfrak{C},$$

wo $\mathfrak{C}$ die Euler'sche Constante bezeichnet, und nach (13) bis auf Grössen von den Ordnungen $\frac{(\log n)^{r-1}}{n^{\frac{1}{2r}}}$ $\frac{(\log n)^{r}}{n^{\frac{1}{2r}}}$

$$G(1)+\frac{1}{2}G(2)+\ldots+\frac{1}{\mu}G(\mu)=G$$

$$\frac{1}{2}G(2)\log 2+\frac{1}{3}G(3)\log(3)+\ldots+\frac{1}{\mu}G(\mu)\log\mu=H.$$

Bezeichnet daher Δ eine Grösse von der Ordnung $\frac{(\log n)^r}{n^{\frac{1}{2r}}}$, so wird

$$A=G(\log n+\mathfrak{C})-H+\Delta.$$

B geht durch die Abel'sche Umformung in

$$B=G(\mu+1)\left(\frac{\psi(n_{\mu+1})}{\mu+1}-\frac{\psi(n_{\mu+2})}{\mu+2}\right)+$$
$$+(G(\mu+1)+G(\mu+2))\left(\frac{\psi(n_{\mu+2})}{\mu+2}-\frac{\psi(n_{\mu+3})}{\mu+3}\right)$$
$$+\ldots+(G(\mu+1)+G(\mu+2)+\ldots+G(n))\frac{\psi(n_n)}{n}$$

über; da aber

$$\frac{\psi(n_{\mu+\lambda})}{\mu+\lambda}-\frac{\psi(n_{\mu+\lambda+1})}{\mu+\lambda+1}<\frac{\psi(n_{\mu+\lambda})}{(\mu+\lambda)^2}$$
$$<\frac{1+\log n}{(\mu+\lambda)^2}$$

ist, so ergibt sich nach (10)

$$\frac{1}{r\varphi(k)}|B|<(1+\log n)\left(\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(\mu+1)\right)^{r-1}}{(\mu+1)^{1+\frac{1}{r}}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log(\mu+2)\right)^{r-1}}{(\mu+2)^{1+\frac{1}{r}}}+\ldots+\frac{\left(1+\frac{r-1}{r}\log n\right)^{r-1}}{n^{\frac{1}{r}}}\right)$$

und B ist demnach nach (12) eine Grösse von der Ordnung $\frac{(\log n)^r}{n^{\frac{1}{2r}}}$.

Man hat hienach den gewünschten asymptotischen Ausdruck

$$\Theta(n) = G(\log n + \mathfrak{E}) - H + \Delta',$$

wo Δ' von der Ordnung $\dfrac{(\log n)^r}{n^{\frac{1}{2r}}}$ ist.

Die Reihen G, H lassen sich in einfacher Weise durch die Reihen

$$L_i = f_i(1) + \frac{1}{2} f_i(2) + \frac{1}{3} f_i(3) +$$

$$M_i = \frac{1}{2} f_i(2) \log 2 + \frac{1}{3} f_i(3) \log 3 + .$$

ausdrücken.

Es sei $f_i'(m)$ je nach Bedarf die Zahl $f_i(m)$ oder $f_i(m) \log m$ und entsprechend $f_i^0(m) = 1$ oder $= \log m$. Man setze

$$E(\sqrt[r]{n}) = \nu$$

$$R_i(\nu) = f_i'(1) + \frac{1}{2} f_i'(2) + \frac{1}{3} f_i'(3) + \ldots + \frac{1}{\nu} f_i'(\nu)$$

$$\Sigma f_1'(\alpha) f_2'(\beta) \ldots f_r'(\varepsilon) = G'(m),$$

wo die Summe über alle Zerlegungen der Zahl m in r Factoren $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ zu erstrecken ist.

Die Summe

$$H(n) = G'(1) + \frac{1}{2} G'(2) + \qquad + \frac{1}{n} G'(n)$$

besteht aus allen Producten

$$\frac{f_1'(\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{f_2'(\beta)}{\beta} \qquad \frac{f_r'(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

in welchen $\alpha\beta \ldots \varepsilon \leqq n$ ist.

Unter diesen Producten bilden alle diejenigen, in welchen keiner der Stellenzeiger $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ die Zahl ν übersteigt, die Entwicklung des Productes

$$R_1(\nu) R_2(\nu) \ldots R_r(\nu).$$

In den übrigen Gliedern von $H(n)$ muss wenigstens einer der Stellenzeiger $\alpha, \beta, . \; . \varepsilon$ die Zahl ν übersteigen, und es sei Σ_i die Summe derjenigen Glieder, in welchen der erste über ν liegende Stellenzeiger in der Zahlenreihe $\alpha, \beta, . \; . \varepsilon$ der i^{te} ist, so dass $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_r$ zusammen genau die in Rede stehenden Glieder erschöpfen.

Bezeichnen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots \mathfrak{e}$ die Zahlen $1, 2, . \; . r$ nach Ausschluss von i, so haben alle Glieder von Σ_i die Gestalt

$$\frac{f_i'(l)}{l} \cdot \frac{f_\mathfrak{a}'(a)}{a} \frac{f_\mathfrak{b}'(b)}{b} \quad \frac{f_\mathfrak{e}'(e)}{e},$$

wo

$$l > \nu$$

$$lab. \; . e \leqq n$$

ist. Fasst man unter denselben alle diejenigen zusammen, welche die Factoren

$$\frac{f_\mathfrak{a}'(a)}{a}, \frac{f_\mathfrak{b}'(b)}{b}, . \quad \frac{f_\mathfrak{e}'(e)}{e}$$

gemein haben und in welchen l die Werthe $\nu+1, \nu+2, .$ $. E\left(\frac{n}{ab\ldots e}\right)$ annimmt, so ist ihre Summe

$$= \frac{f_\mathfrak{a}'(a) f_\mathfrak{b}'(b) \ldots f_\mathfrak{e}'(e)}{ab\ldots e}\left(\frac{f_i'(\nu+1)}{\nu+1} + \frac{f_i'(\nu+2)}{\nu+2} + \qquad \right)$$

und daher der absolute Betrag der letzteren nach (7)

$$\leqq \frac{f_\mathfrak{a}^0(a) f_\mathfrak{b}^0(b) \ldots f_\mathfrak{e}^0(e)}{ab. \; .e} \cdot \frac{1}{2} \varphi(k) \frac{f_i^0(\nu+1)}{\nu+1},$$

wenn angenommen wird, dass die Grössen

$$\frac{\log(\nu+1)}{\nu+1}, \frac{\log(\nu+2)}{\nu+2}, .$$

eine abnehmende Reihe bilden, also $\nu \geqq 2$, $n \geqq 2^n$ ist. Solcher Summen gibt es so viele, als es Systeme von $r-1$ positiven Zahlen $a, b, \ldots e$ gibt, welche der Bedingung

$$ab. \; . e \leqq \frac{n}{\nu+1}$$

genügen und von welchen in dem Falle $i > 1$ die ersten $i-1$ nicht über ν liegen. Daher ist, die Summation über diese Zahlensysteme erstreckt,

$$|\Sigma_i| < \frac{\varphi(k)}{2n^{\frac{1}{r}}} f_i^0(\nu+1) \Sigma \frac{f_{\mathfrak{a}}^0(a) f_{\mathfrak{b}}^0(b) \ldots f_{\mathfrak{e}}^0(e)}{ab \ldots e}.$$

Es ist aber, wenn λ die Anzahl der logarithmischen Factoren in dem Producte $f_i^0(l) f_{\mathfrak{a}}^0(a) \ldots f_{\mathfrak{e}}^0(e)$ bezeichnet,

$$\begin{aligned} f_i^0(\nu+1) \Sigma \frac{f_{\mathfrak{a}}^0(a) f_{\mathfrak{b}}^0(b) \ldots f_{\mathfrak{e}}^0(e)}{ab \ldots e} &\leqq (\log n)^\lambda \Sigma \frac{1}{ab \ldots e} \\ &< (\log n)^\lambda \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)^{r-1} \\ &< (\log n)^\lambda (1 + \log n)^{r-1}. \end{aligned}$$

Da demnach

$$|\Sigma_i| < \frac{\varphi(k)(\log n)^\lambda (1+\log n)^{r-1}}{2n^{\frac{1}{r}}}$$

ist und mit wachsendem n unbegrenzt abnimmt, so wird der Gleichung

$$H(n) = R_1(\nu) R_2(\nu) \ldots R_r(\nu) + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_r$$

zufolge

$$G'(1) + \frac{1}{2} G'(2) + \frac{1}{3} G'(3) + \ldots \text{in inf.} = R_1(\infty) R_2(\infty) \ldots R_r(\infty).$$

Insbesondere ist

$$G = L_1 L_2 \ldots L_r.$$

Setzt man ferner

$$\Sigma f_1(\alpha) f_2(\beta) \ldots f_r(\varepsilon) \log \tau = G_i(m),$$

wo die Summe über alle Zerlegungen der Zahl m in r Factoren $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ zu erstrecken und τ der i^{te} dieser Factoren ist, so wird

$$G_1(1)+\frac{1}{2}G_1(2)+\frac{1}{3}G_1(3)+\ldots = M_1L_2L_3\ldots L_r$$

$$G_2(1)+\frac{1}{2}G_2(2)+\frac{1}{3}G_2(3)+\ldots = M_2L_1L_3\ldots L_r$$

$$G_r(1)+\frac{1}{2}G_r(2)+\frac{1}{3}G_r(3)+\ldots = M_rL_1L_2\ldots L_{r-1}.$$

Da

$$\begin{aligned} G_1(m)+G_2(m)+\ldots+G_r(m) &= \Sigma f_1(\alpha)f_2(\beta)\ldots f_r(\varepsilon)\log(\alpha\beta\ldots\varepsilon) \\ &= G(m)\log m \end{aligned}$$

ist, so folgt durch Addition

$$H = M_1L_2L_3\ldots L_r+M_2L_1L_3\ldots L_r+\ldots+M_rL_1L_2\ldots L_{r-1}.$$

Es ist daher auch

$$\begin{aligned} \Theta(n) = {} & L_1L_2\ldots L_r(\log n+\mathfrak{E}) \\ & -M_1L_2L_3\ldots L_r-M_2L_2L_3\ldots L_r-\ldots-M_rL_1L_2\ldots L_{r-1} \\ & +\Delta'. \end{aligned}$$

Der asymptotische Ausdruck für $\Theta(n)$ lehrt, dass L_h nicht Null sein kann, wenn in der $h+1^{\text{ten}}$ Wurzelcombination $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\rho$ wenigstens eine imaginäre Wurzel vorkommt. Ist nämlich in diesem Falle die aus den conjugirten Werthen von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\rho$ bestehende Combination die $h'+1^{\text{te}}$, so ist h' von h verschieden und $L_{h'}$ zu L_h conjugirt. Wäre daher $L_h = 0$, so wäre auch $L_{h'} = 0$ und $\Theta(n)$ wäre von der Ordnung $\dfrac{(\log n)^r}{n^{\frac{1}{2r}}}$.

Man kann aber zeigen, dass $\Theta(n) \geqq 1$ ist.

Man hat nämlich

$$F(1) = G(1) = 1$$

und für irgend zwei theilerfremde Zahlen n, n' nach (5)

$$F(n)F(n') = F(nn').$$

Ist ferner q^λ eine Primzahlpotenz, so ist der Ausdruck

$$F(q^\lambda) = G(1)+G(q)+G(q^2)+\ldots+G(q^\lambda)$$

der Coëfficient von x^λ in der Entwicklung des Bruches

$$\frac{1}{(1-x)(1-xf_1(q))(1-xf_2(q))\ldots(1-xf_r(q))}$$

nach steigenden Potenzen von x. Dieser Bruch hat den Werth $\frac{1}{1-x}$, wenn q in k aufgeht. Geht dagegen die Primzahl q nicht in k auf und gehört sie zum Exponenten t nach dem Modul k, so hat die Summe

$$1+f_1(q)^m+f_2(q)^m+\ldots+f_r(q)^m$$
$$=f_0(q^m)+f_1(q^m)+f_2(q^m)+\ldots+f_r(q^m)$$

den Werth $\varphi(k)$ oder Null, je nachdem $q^m \equiv 1 \pmod{k}$ ist oder nicht, je nachdem also m ein Vielfaches von t ist oder nicht. Es ist daher

$$\log(1-x)(1-xf_1(q))\ldots(1-xf_r(q)) =$$
$$= -\frac{\varphi(k)}{t}\left(x^t+\frac{1}{2}x^{2t}+\frac{1}{3}x^{3t}+\ldots\right)$$
$$= \frac{\varphi(k)}{t}\log(1-x^t)$$

und somit

$$\frac{1}{(1-x)(1-xf_1(q))\ldots(1-xf_r(q))} = (1-x^t)^{-\frac{\varphi(k)}{t}}$$

$F(q^\lambda)$ kann demnach in keinem Falle negativ sein.

Da hienach $F(m)$ für keinen Werth von m negativ sein kann, so ist

$$\Theta(n) \geqq F(1) = 1.$$

5.

Aufgabe. Die $i+1^{\text{te}}$ Wurzelcombination $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\rho$ enthalte nur reelle Wurzeln, welche nicht alle $=1$ sind, und es sei, die Summation über alle Theiler δ von m erstreckt,

$$\Sigma f_i(\delta) = F(m);$$

es soll der asymptotische Ausdruck der Summe

$$\Theta(n) = \frac{F(1)}{\sqrt{1}} + \frac{F(2)}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{F(n)}{\sqrt{n}}$$

für grosse Werthe von n gefunden werden.

Setzt man

$$E\left(\frac{n}{h}\right) = n_h$$

$$E\sqrt{n} = \mu$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{m}} = \psi(m)$$

$$A = \frac{f_i(1)\psi(n_1)}{\sqrt{1}} + \frac{f_i(2)\psi(n_2)}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{f_i(\mu)\psi(n_\mu)}{\sqrt{\mu}}$$

$$B = \frac{f_i(\mu+1)\psi(n_{\mu+1})}{\sqrt{\mu+1}} + \frac{f_i(\mu+2)\psi(n_{\mu+2})}{\sqrt{\mu+2}} + \ldots + \frac{f_i(n)\psi(n_n)}{\sqrt{n}},$$

so erscheint $\Theta(n)$ in der Gestalt

$$\Theta(n) = \frac{f_i(1)\psi(n_1)}{\sqrt{1}} + \frac{f_i(2)\psi(n_2)}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{f_i(n)\psi(n_n)}{\sqrt{n}}$$

$$= A+B.$$

Es sei zur Abkürzung

$$2\sqrt{m} - 2\sqrt{m-1} - \frac{1}{\sqrt{m}} = b_m.$$

Da nach dem binomischen Satze

$$\sqrt{m-1} = \sqrt{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{m}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{m} - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\frac{1}{m^2} - \ldots\right)$$

also

$$b_m = 2\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)}{2!}\frac{1}{m\sqrt{m}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)}{3!}\frac{1}{m^2\sqrt{m}} + \quad \right)$$

ist, so ergibt sich

$$b_m > 0$$

und anderseits

$$\frac{b_1}{m\sqrt{m}} - b_m = \frac{1}{m\sqrt{m}} - b_m =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)}{3!}\frac{1}{m\sqrt{m}}\left(1-\frac{1}{m}\right) +$$

$$\geqq 0$$

oder

$$b_m \leqq \frac{1}{m\sqrt{m}} < \frac{2}{\sqrt{m-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{m+\frac{1}{2}}}.$$

Man hat also

$$0 < b_m < \frac{2}{\sqrt{m-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\sqrt{m+\frac{1}{2}}}. \tag{14}$$

Summirt man von $m = n_h + 1$ bis $m = n$, so folgt

$$0 < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n_h} - \psi(n) + \psi(n_h) < \frac{2}{\sqrt{n_h+\frac{1}{2}}}$$

und nach Subtraction von $2\sqrt{\frac{n}{h}} - 2\sqrt{n_h}$

$$-2\left(\sqrt{\frac{n}{h}} - \sqrt{n_h}\right) < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{\frac{n}{h}} -$$

$$- \psi(n) + \psi(n_h) < \frac{2}{\sqrt{n_h+\frac{1}{2}}};$$

da aber

$$2\left(\sqrt{\frac{n}{h}}-\sqrt{n_h}\right)=2\,\frac{\frac{n}{h}-n_h}{\sqrt{n_h}+\sqrt{\frac{n}{h}}}<\frac{2}{\sqrt{n_h}}$$

und, wenn $h \leqq \mu$ angenommen wird,

$$\frac{2}{\sqrt{n_h+\frac{1}{2}}}<\frac{2}{\sqrt{n_h}}\leqq 2\sqrt{\frac{h}{n-h+1}}<2\sqrt{\frac{2h}{n}}$$

ist, so wird ohne Rücksicht auf das Vorzeichen

$$\psi(n_h)-2\sqrt{\frac{n}{h}}+2\sqrt{n}-\psi(n)<2\sqrt{\frac{2h}{n}}$$

Multiplicirt man mit $\frac{f_i(h)}{\sqrt{h}}$ und summirt man $h=1$ bis $h=\mu$, so ergibt sich

$$A-2\sqrt{n}\left(f_i(1)+\frac{1}{2}f_i(2)+\ldots+\frac{1}{\mu}f_i(\mu)\right)$$

$$+(2\sqrt{n}-\psi(n))\left(\frac{f_i(1)}{\sqrt{1}}+\frac{f_i(2)}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{f_i(\mu)}{\sqrt{\mu}}\right)<2\sqrt{\frac{2}{n}}\,.\,\mu$$
$$<2\sqrt{2}$$

Nach (7) ist aber

$$\left|\frac{f_i(\mu+1)}{\mu+1}+\frac{f_i(\mu+2)}{\mu+2}+\ldots\right|\leqq\frac{1}{2}\,\frac{\varphi(k)}{\nu+1}<\frac{\varphi(k)}{2\sqrt{n}}$$

oder

$$\left|L_i-\frac{f_i(1)}{1}-\frac{f_i(2)}{2}-\ldots-\frac{f_i(\mu)}{\mu}\right|<\frac{\varphi(k)}{2\sqrt{n}}$$

und

$$\left|\frac{f_i(1)}{\sqrt{1}}+\frac{f_i(2)}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{f_i(\mu)}{\sqrt{\mu}}\right|\leqq\frac{1}{2}\,\varphi(k);$$

ferner folgt aus (14), wenn man von $m=1$ bis $m=n$ summirt,

$$0<2\sqrt{n}-\psi(n)<2\sqrt{2} \tag{15}$$

Daher wird

$$| A - 2\sqrt{n}\, L_i | < \varphi(k) + (2 + \varphi(k))\sqrt{2}.$$

Da $\dfrac{\psi(n_h)}{\sqrt{n}}$ mit wachsendem h abnimmt, so wird nach (7)

$$| B | \leqq \frac{1}{2}\varphi(k)\,\frac{\psi(n_{\mu+1})}{\sqrt{\mu+1}}$$

und demzufolge nach (15)

$$| B | < \frac{1}{2}\varphi(k)\,\frac{2\sqrt{n_{\mu+1}}}{\sqrt{\mu+1}} < \varphi(k).$$

Es wird also

$$| A + B - 2L_i\sqrt{n} | < 2\varphi(k) + (1 + \varphi(k))\sqrt{2}$$

und man hat den gewünschten asymptotischen Ausdruck

$$\Theta(n) = 2L_i\sqrt{n} + \Delta,$$

wo

$$|\Delta| < 2\varphi(k) + (2 + \varphi(k))\sqrt{2}.$$

Aus diesem Ausdrucke erhellt, dass L_i nicht Null sein kann.

Da nämlich, wenn q eine Primzahl bezeichnet,

$$\begin{aligned} F(q^\lambda) &= f_i(1) + f_i(q) + f_i(q^2) + \ldots + f_i(q^\lambda) \\ &= 1 + f_i(q) + f_i(q)^2 + \ldots + f_i(q)^\lambda \end{aligned}$$

ist und nur einen der drei Werthe $\lambda + 1$, $\dfrac{1-(-1)^{\lambda+1}}{2}$, 1 haben kann, je nachdem $f_i(q) = 1$, -1 oder $= 0$ ist, so ist immer

$$F(q^\lambda) \geqq 0$$

und insbesondere bei geradem λ

$$F(q^\lambda) \geqq 1.$$

Da ferner, wenn n, n' theilerfremd sind, nach (5)

$$F(nn') = F(n)\,F(n')$$

und

$$F(1) = 1$$

ist, so ist allgemein

$$F(m) \geqq 0$$

und für jede Quadratzahl

$$F(m^2) \geqq 1.$$

Hieraus folgt aber

$$\Theta(n) \geqq \frac{F(1)}{1} + \frac{F(2^2)}{2} + \frac{F(3^2)}{3} + \quad + \frac{F(\mu^2)}{\mu}$$

$$\geqq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \quad + \frac{1}{\mu} > \log \mu$$

$$> \frac{1}{2} \log n .$$

6.

Zerlegt man in jedem Gliede $\frac{f_h(m) \log m}{m}$ des Ausdruckes

$$M_h(n) = \frac{f_h(2) \log 2}{2} + \frac{f_h(3) \log 3}{3} + \quad . + \frac{f_h(n) \log n}{n}$$

den Logarithmus $\log m$ in die Summe der Logarithmen der Primfactoren von m, so zerfällt $M_h(n)$ in lauter Glieder, welche den Logarithmus je einer der n nicht übersteigenden Primzahlen als Factor enthalten, und es möge aus der Zusammenfassung aller solcher Glieder, welche den Logarithmus einer bestimmten Primzahl p enthalten, das Resultat $\psi(n) \log p$ hervorgehen. Da die fraglichen Glieder nur aus der Zerlegung der Glieder

$$\frac{1}{p} f_h(p) \log p = \frac{f_h(p) \log p}{p} \cdot \frac{f_h(1)}{1} + \frac{f_h(p)}{p} \quad \frac{\log 1}{1}$$

$$\frac{1}{2p} f_h(2p) \log 2p = \frac{f_h(p) \log p}{p} \quad \frac{f_h(2)}{2}$$

$$+ \frac{f_h(p)}{p} \cdot \frac{f_h(2) \log 2}{2}$$

$$\frac{1}{n_1 p} f_h(n_1 p) \log n_1 p = \frac{f_h(p) \log p}{p} \cdot \frac{f_h(n_1)}{n_1} +$$

$$+ \frac{f_h(p)}{p} \quad \frac{f_h(n_1) \log n_1}{n_1}$$

von $M_h(n)$ hervorgehen können, wo $n_1 = E\left(\frac{n}{p}\right)$ ist, so ergibt sich

$$\psi(n) = \frac{f_h(p)\log p}{p} L_h\left(\frac{n}{p}\right) + \psi(n_1)\frac{f_h(p)}{p}$$

wo

$$L_h(z) = \frac{f_h(1)}{1} + \frac{f_h(2)}{2} + \ldots + \frac{f_h(Ez)}{E(z)}$$

Hieraus folgt

$$\psi(n) = \frac{f_h(p)}{p} L_h\left(\frac{n}{p}\right) + \frac{f_h(p^2)}{p^2} L_h\left(\frac{n}{p^2}\right) +$$

Man hat demnach

$$M_h(n) = \Sigma L_h\left(\frac{n}{p}\right)\frac{f_h(p)\log p}{p} + \Sigma L_h\left(\frac{n}{p^2}\right)\frac{f_h(p^2)\log p}{p^2} +$$

wo das erste Summenzeichen alle Primzahlen p umfasst, welche n nicht übersteigen, das zweite alle Primzahlen, deren Quadrat die Zahl n nicht übersteigt u. s. f.

Setzt man nun

$$\Lambda_h(n) = \Sigma\left(\frac{f_h(p)}{p} + \frac{f_h(p^2)}{p^2} + \qquad + \frac{f_h(p^\pi)}{p^\pi}\right)\log p,$$

$$\Delta(m) = \frac{f_h(m)}{m}\left(L_h - L_h\left(\frac{n}{m}\right)\right),$$

wo die Summe über alle n nicht übersteigenden Primzahlen p zu erstrecken ist und p^π die höchste Potenz von p bezeichnet, welche n nicht überschreitet, so wird, die Summation über alle n nicht übersteigenden Primzahlen p erstreckt,

$$L_h\Lambda_h(n) - M_h(n) = \Sigma(\Delta(p) + \Delta(p^2) + \qquad + \Delta(p^\pi))\log p;$$

hieraus folgt

$$L_h\Lambda_h(n) - M_h(n)\,| \leqq \Sigma(|\Delta(p)| + |\Delta(p^2)| + \ldots + |\Delta(p^\pi)|)\log p.$$

da aber nach (7)

$$\left| L_h - L_h\left(\frac{n}{m}\right) \right| \leqq \frac{1}{2}\,\varphi(k)\,\frac{1}{1+E\left(\frac{n}{m}\right)}$$

$$< \frac{1}{2}\,\varphi(k)\,\frac{m}{n}$$

also

$$|\Delta(m)| < \frac{\varphi(k)}{2n}$$

und nach (3)

$$\Sigma\pi \log p = \log P < n \log 5$$

ist, so ergibt sich

$$|L_h \Lambda_h(n) - M_h(n)| < \Sigma\pi . \frac{\varphi(k)}{2n} \log p$$

$$< \frac{1}{2}\,\varphi(k) \log 5 .$$

Dividirt man mit der für jedes h von Null verschiedenen Grösse $|L_h|$, so folgt

$$\left| \Lambda_h(n) - \frac{M_h(n)}{L_h(n)} \right| < \frac{1}{2}\;\frac{\varphi(k) \log 5}{|L_h|}$$

und man hat

$$|\Lambda_h(n)| < \frac{M_h(n)\,| + \frac{1}{2}\,\varphi(k) \log 5}{|L_h|}$$

Da nach (7)

$$\frac{f_h(3)}{3} \log 3 + \frac{f_h(4)}{4} \log 4 + \qquad \frac{f_h(n)}{n} \log n \leqq \frac{\varphi(k)}{2}\;\frac{\log 3}{3}$$

also

$$|M_h(n)| \leqq \frac{\log 2}{2} + \frac{\varphi(k) \log 3}{6}$$

ist, so ergibt sich für jedes n

$$|\Lambda_h(n)| < A_h , \tag{17}$$

wo

$$A_h = \frac{\frac{1}{2}\log 2 + \varphi(k)\left(\frac{\log 3}{6} + \frac{\log 5}{2}\right)}{|L_h|}$$

7.

Es sei nun die arithmetische Reihe $kx+l$ gegeben, wo l zu k theilerfremd ist, und man bestimme l' aus der Congruenz

$$ll' \equiv 1 \pmod{k}.$$

Da

$$\Lambda(n) = \Sigma\left(\frac{f_0(p)}{p} + \frac{f_0(p^2)}{p^2} + \ldots + \frac{f_0(p^\pi)}{q^\pi}\right)\log p$$
$$+ \Sigma\left(\frac{\log p}{p} + \frac{\log p}{p^2} + \ldots + \frac{\log p}{p^\pi}\right)$$

ist, wo das erste Summenzeichen sich auf alle n nicht übersteigenden Primzahlen bezieht, das zweite hingegen nur auf diejenigen unter denselben, welche in k aufgehen, und p^π die höchste, n nicht überschreitende Potenz von p bezeichnet, so wird nach (8)

$$f_0(l')\Lambda(n) + f_1(l')\Lambda_1(n) + f_2(l')\Lambda_2(n) + \ldots + f_r(l')\Lambda_r(n)$$
$$= \Sigma\left(\frac{\log p}{p} + \frac{\log p}{p^2} + \ldots + \frac{\log p}{p^\pi}\right)$$
$$+ \varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q} + \varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q^2} + \ldots$$

wo das erste Summenzeichen sich auf die n nicht übersteigenden und in k aufgehenden Primzahlen p, das zweite auf die n nicht übersteigenden Primzahlen q von der Form $kx+l$, das dritte auf die Primzahlen q bezieht, deren Quadrate in der Reihe $kx+l$ vorkommen und n nicht übersteigen u. s. f. Hieraus folgt

$$\varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q} - \log n = \Lambda(n) - \log n + f_1(l')\Lambda_1(n) + \ldots + f_r(l')\Lambda_r(n)$$
$$- \Sigma\left(\frac{\log p}{p} + \frac{\log p}{p^2} + \ldots + \frac{\log p}{p^\pi}\right)$$
$$- \varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q^2} - \varphi(k)\Sigma\frac{\log q}{q^3}$$

und nach (4), (17)

$$\left|\varphi(k)\,\Sigma\frac{\log q}{q}-\log n\right| \leqq 1+A_1+A_2+\ldots A_r$$
$$+\Sigma\left(\frac{\log p}{p}+\frac{\log p}{p^2}+\ldots+\frac{\log p}{p^\pi}\right)$$
$$+\varphi(k)\,\Sigma\frac{\log q}{q^2}+\varphi(k)\,\Sigma\frac{\log q}{q^3}+\ldots$$

Setzt man daher

$$A=\frac{1+A_1+A_2+\ldots+A_r+\Sigma_p\dfrac{\log p}{p}}{\varphi(k)}+\Sigma_q\frac{\log q}{q(q-1)},$$

wo Σ_p sich auf alle in k aufgehenden Primzahlen, Σ_q dagegen auf alle möglichen Primzahlen bezieht, so ist

$$\left|\Sigma\frac{\log q}{q}-\frac{\log n}{\varphi(k)}\right|<A$$

oder

$$\Sigma\frac{\log q}{q}=\frac{1}{\varphi(k)}\log n+\vartheta(n)$$
$$\vartheta(n)<A,$$

wo die Summe sich auf alle n nicht übersteigenden in der arithmetischen Reihe $kx+l$ vorkommenden Primzahlen q erstreckt.

Ist N eine beliebige ganze positive Zahl und wird

$$1+E(e^{2A\varphi(k)})=K$$

gesetzt, so kommt in der Zahlenreihe

$$N+1,\ N+2,\ N+3,\ldots KN-1,\ KN$$

sicher eine Primzahl von der Form $kx+l$ vor.

Bezieht sich nämlich das Summenzeichen $\sum\limits_a^b$ auf alle in der Zahlenreihe $a, a+1,\ldots b$ vorkommenden Primzahlen q von der Form $kx+l$, so wird

$$\sum_{N+1}^{KN} \frac{\log q}{q} = \sum_{2}^{KN} \frac{\log q}{q} - \sum_{2}^{N} \frac{\log q}{q}$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} \log KN + \vartheta(KN) - \frac{1}{\varphi(k)} \log N - \vartheta(N)$$

$$= \frac{1}{\varphi(k)} \log K + \vartheta(KN) - \vartheta(N);$$

da aber

$$\frac{1}{\varphi(k)} \log K > 2A$$

$$A + \vartheta(NK) > 0$$

$$A - \vartheta(N) > 0$$

ist, so folgt

$$\sum_{N+1}^{KN} \frac{\log q}{q} > 0$$

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: 106_2a

Autor(en)/Author(s): Mertens F.

Artikel/Article: Über Dirichlet's Beweis des Satzes, dass jede unbegrenzte ganzzahlige arithmetische Progression, deren Differenz zu ihren Gliedern theilerfremd ist, unendlich viele Primzahlen enthält. 254-286