Über Flächen mit Liouville'schem Bogenelement

Emil Waelsch,

o. Professor an der k. k. technischen Hochschule in Brünn.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. März 1897.)

Die Tangenten an eine Schaar S geodätischer Linien einer Fläche F bilden ein Normalensystem, das ausser F noch eine Schale F_1 der Brennfläche hat. Durch einen Punkt a von F geht eine geodätische Linie der Schaar S und die Tangente t_a dieses Punktes berührt F_1 in einem Punkte A. Sind nun die geodätischen Linien von F zu ∞^1 Schaaren S gruppirt, so gehört zu jeder dieser Schaaren ein Punkt A in der Tangentialebene T_a von F im Punkte a, und alle diese Punkte erfüllen eine Curve $\mathfrak{A}$.

Hat die Fläche F das Liouville'sche Bogenelement:

$$(U+V)(du^2+dv^2),$$

so sind ihre geodätischen Linien bekanntlich gegeben durch

$$\sqrt{V+\alpha}\,du-\sqrt{U+\alpha}\,dv = 0.$$

Für jeden Werth von α ergibt sich dann ein Schaar S, und allen diesen Schaaren entspricht eine Curve $\mathfrak{A}$, welche (wie ich in einer früheren Arbeit gezeigt habe)[1] eine Strophoide ist.

Ist F speciell auf eine Rotationsfläche abwickelbar, so ist $\mathfrak{A}$ ein Kreis, der durch den Punkt a geht.

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass diese Eigenschaft der Flächen mit Liouville'schem Bogenelement für diese charak-

[1] S. Sur les surfaces à l'élément de Liouville etc. Comptes rend. t. 116, p. 1435. — Über Tangentencongruenzen einer Fläche. Diese Sitzungsberichte, Bd. 102, S. 757.

teristisch ist. Wenn also verlangt wird, dass die Curven $\mathfrak{A}$, welche einer Gruppirung der geodätischen Linien von F entsprechen, sämmtlich Strophoiden seien, so wird F dieses Bogenelement haben.

1. Bei der Bewegung des rechtwinkeligen Triëders, dessen z-Achse mit der Normale N_a der Fläche F in a übereinstimmt, und dessen x-, respective y-Axe Tangenten an die Linien $u =$ const., $v =$ const. sind, geben die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\delta x &= dx + A du + (q du + q_1 dv) z - (r du + r_1 dv) y,\\ \delta y &= dy + C dv + (r du + r_1 dv) x - (p du + p_1 dv) z,\\ \delta z &= dz + (p du + p_1 dv) y - (q du + q_1 dv) x\end{aligned}$$

die Incremente der Coordinaten x, y, z eines Punktes A, dessen relative Incremente bezüglich des Triëders dx, dy, dz sind.[1]

Es werde nun verlangt, dass der Punkt A ein Punkt der Tangentialebene T_a sei und sich relativ zu dem Triëder auf der Curve $\mathfrak{A}$ in T_a bewege.

Sind dann

$$x = x(u, v, \lambda),\ y = y(u, v, \lambda),\ z = 0$$

die Coordinaten eines Punktes dieser Curve, so folgt, (wenn $\frac{\partial x}{\partial u} = x_u$ gesetzt wird)

$$\begin{aligned}\delta x &= x_u du + x_v dv + x_\lambda d\lambda + A du - (r du + r_1 dv) y\\ \delta y &= y_u du + y_v dv + y_\lambda d\lambda + C dv + (r du - r_1 dv) x.\end{aligned}$$

Sollen ferner die Punkte $A + \delta A$ in einer Ebene E_A liegen, die durch N_a geht, so muss

$$y \delta x - x \delta y = 0$$

sein; daher folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

$$\begin{aligned}\{Ay - r(x^2+y^2)\} du - \{Cx + r_1(x^2+y^2)\} dv + (x_\lambda y - y_\lambda x) d\lambda +\\ + (x_u y + y_u x) du + (x_v y - y_v x) dv = 0. \quad 1)\end{aligned}$$

---

[1] S. Darboux, Surfaces, t. II, p. 385.

Dies ist in den Veränderlichen u, v, λ die Gleichung eines Pfaff'schen Problems, welches das Flächenelement (A, E_A) enthält, das aus dem Punkte A und aus dessen Ebene E_A besteht.

Führt man in Gleichung 1) Polarcoordinaten ein, vermöge

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$$

so erhält man:

$$\left(A\frac{\sin\varphi}{\rho} - r\right)du - \left(C\frac{\cos\varphi}{\rho} + r_1\right)dv - d\varphi = 0, \qquad 2)$$

und dies ist die Gleichung des Pfaff'schen Problems in den Veränderlichen u, v, φ. Die Curve $\mathfrak{A}$ ist hierbei in Polarcoordinaten gegeben durch die Gleichung

$$\rho = \rho(u, v, \varphi).$$

2. Soll das Pfaff'sche Problem der Gleichung 2) integrabel sein, so muss die Identität bestehen:

$$[A_v\rho_\varphi + C\rho_u]\cos\varphi - [C_u\rho_\varphi - A\rho_v]\sin\varphi + (r_v - r_{1u})\rho^2 + AC = 0. \qquad 3)$$

Dann ordnen sich die ∞^3 Flächenelemente des Problems zu den ∞^1 Integralflächen an, und diese sind die Schalen F_1 der obigen Brennflächen. Die geodätischen Linien auf F, deren Tangenten eine dieser Flächen F_1 berühren, bilden eine der Schaaren S.[1]

Genügt ρ als Function von u, v, φ der Identität 3), so lassen sich die geodätischen Linien der Fläche F bestimmen. Zunächst muss hiezu das vermöge 3) integrable Pfaff'sche Problem durch Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung integrirt werden. Sind dann die ∞^1 Integralflächen F_1 bestimmt, so gibt jede derselben eine Schaar S geodätischer Linien und durch Integration einer weiteren Differentialgleichung erster Ordnung findet man dann die geodätischen Linien dieser Schaar (S. l. c.)

Da in der Gleichung 2) des Pfaff'schen Problems r und r_1 nur von dem Bogenelement der Fläche F abhängen, folgt

[1] Vergl. meine Arbeit: Über Flächen constanter Krümmung. Diese Sitzungsberichte, Bd. 102, S. 1317.

nebenbei: Ist das Pfaff'sche Problem, das zu den angenommenen Curven $\mathfrak{A}$ gehört, integrabel, so bleibt es integrabel, wenn man die Curven $\mathfrak{A}$ bei einer Deformation der Fläche unverändert mitnimmt.

Es werde nun vorausgesetzt, dass die Curve $\mathfrak{A}$ eine Strophoide sei, dass also sei

$$\rho = \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{a\cos\varphi + c\sin\varphi}, \tag{4}$$

wo a und c Functionen von u, v sind.

Bestimmt man hieraus ρ_u, ρ_v, ρ_φ und setzt diese in die Identität 3), so ergibt sich eine in $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ homogene Form 4ten Grades, deren 5 Coëfficienten für sich verschwinden müssen. So erhält man die 5 Identitäten:

$$\left.\begin{aligned} A_v a + ACa^2 &= 0 \\ C_u c + ACc^2 &= 0 \\ Ac_v + A_v c - 2\,ACac &= 0 \\ Ca_v + Ca_u - 2\,ACac &= 0 \\ Aa_v + Cc_u - AC(a^2+c^2) - (r_v - r_{1u}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Aus den ersten der beiden Identitäten folgt:

$$a = -\frac{A_v}{AC}, \quad c = -\frac{C_u}{AC} \tag{6}$$

und hiernach ist die letzte der Identitäten 5) von selbst erfüllt, da sie nichts anderes ist, als der Ausdruck des Krümmungsmasses

$$K = \frac{r_v - r_{1u}}{AC}$$

(Die Formel 6) zeigen nebenbei, dass die Krümmungskreise der Strophoide im Punkte a respective durch die geodätischen Krümmungsmittelpunkte des Punktes a der Coordinatenlinien $u =$ const., $v =$ const. gehen.)

Die 3. und 4. der Identiäten 5) geben ferner:

$$(Ca)_u - 2\,ACac = 0, \quad (Ac)_v - 2\,ACac = 0,$$

woraus sich vermöge 6) ergibt, wenn

$$lA = \alpha, \quad lC = \gamma \tag{7}$$

gesetzt wird:

$$\alpha_{uv} + 2\,\alpha_v \gamma_u = 0, \quad \gamma_{uv} + 2\,\alpha_v \gamma_u = 0. \tag{8}$$

Da also

$$\alpha_{uv} = \gamma_{uv}$$

ist, so folgt:

$$\gamma = \alpha + lU + lV \text{ oder } C = AUV \tag{9}$$

Daher ergibt sich aus der ersten Gleichung 8):

$$(l\alpha_v)_u = -2\,(\alpha_u + [lU]_u)$$

und hieraus hintereinander:

$$\begin{aligned} l\alpha_v &= -2\,(\alpha + lU) + lV_1, \\ \alpha_v &= A^{-2}\,U^{-2}\,V_1, \\ (A^2)_v &= 2\,U^{-2}\,V_1, \\ A^2 &= U^{-2}\,V_1 + U_2. \end{aligned}$$

Nach 9) ist nun:

$$C^2 = (U^{-2}\,V_1 + U_2)\,U^2 V^2. \tag{10}$$

Daher hat das Bogenelement von F die Gestalt:

$$(V_1 + U_2 U^2)\,\{U^{-2} du^2 + V^2 dv^2\}. \tag{11}$$

Werden jetzt die neuen Veränderlichen u_1, v_1 durch die Gleichungen

$$U^{-1} du = du_1, \quad U dv = dv_1$$

eingeführt, so erhält dieses Bogenelement die Liouville'sche Form.

Hiermit ist der Eingangs erwähnte Satz über Flächen mit Liouville'schem Bogenelement bewiesen.[1]

---

[1] Für eine Fläche 2ter Ordnung, deren Bogenelement bekanntlich die Liouville'sche Form hat und deren confocale Flächen die obigen Flächen F_1 sind, folgt demnach: Der Ort des Punktes A, in welchem eine zu F confocale

4. Wird in Gleichung 4) $c = 0$ gesetzt, zerfällt also die Strophoide in den Kreis mit der Gleichung

$$a\rho = \sin \varphi,$$

so folgt aus der 2. Gleichung 6) $C_u = 0$, demnach muss im Element 11)

$$C^2 = (V_1 + U_2 U^2)\, V^2$$

von u unabhängig, also $U_2 U$ eine Constante sein. Das Bogenelement wird dann das einer auf eine Rotationsfläche abwickelbaren Fläche.

Fläche F_1 von einer Tangente des Punktes a der Fläche F berührt wird, ist eine Strophoide; diese Curve schneidet die Focalcurven und hat in a die Hauptkrümmungstangenten zu Doppelpunkttangenten etc.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: 106_2a

Autor(en)/Author(s): Waelsch Emil

Artikel/Article: Über Flächen mit Liouvilleschem Bogenelement. 323-328