Über die Differentiation mehrfacher Integrale nach einem Parameter, von dem auch die Grenzen abhängen

Konrad Zindler in Wien.

Die einzigen Werke über Integralrechnung, in denen ich den genannten Gegenstand behandelt finde, sind: Moigno-Lindelöf. »Leçons de calc. diff. et intégral«, T. IV (oder »Leçons de calc. des variations«), Art. 11 (1861); Kronecker, Vorl. über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale (1894), 15. Vorl. Die dortigen Entwicklungen legen die Vorstellung zu Grunde, dass die Vielfachheit des Integrals mit der Zahl der Veränderlichen übereinstimme, und sind deshalb nicht unmittelbar auf den Fall anwendbar, wo ein zweifaches Integral über eine durch eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen gegebene Oberfläche zu erstrecken ist,[1] besonders wenn man die Art, wie das Oberflächenelement $d\sigma$ durch zwei unabhängige Veränderliche ausgedrückt ist, nicht weiter fixirt, was für gewisse physikalische Anwendungen[2] weder nothwendig, noch zweckmässig wäre. Darauf bezieht sich die folgende

---

[1] Auch die Untersuchungen von Bierens de Haan »Note sur la diff. et intégr. d'une intégr. m.« (Verslagen en Mededeelingen d. kongl. Ak. van Wetensch. to Amsterdam (2), V, 1871) und Chiò «Théorème relatif à la diff. d'une intégr. etc.« (Atti della R. Acc. Torino, VI, 1871) bewegen sich in ganz anderer Richtung.

[2] Das Studium der Abhandlung von Stockes »On the theory of diffraction« (Cambridge transact. Vol. IX, 1851) veranlasste mich vor etwa sieben Jahren, die Gleichungen I) und II) aufzustellen. Stokes verwendet in der genannten Abhandlung Resultate, die durch solche Differentiationen erhalten sind, ohne den Weg näher anzugeben.

Formel I), während II) die Differentiation eines Volumintegrals für Polarcoordinaten so gibt, wie es für manche Zwecke der Physik am bequemsten sein dürfte. Endlich gibt III) die Differentiation eines $k-1$-fachen Integrals, das sich über ein Gebiet erstreckt, das in einer k-fachen, ebenen Mannigfaltigkeit ausgebreitet ist, und dort, sowie der Integrand, von einem Parameter abhängt.

Es sei t ein Parameter, r, ϑ, ψ drei Raumcoordinaten eines Punktes P, unter denen r den Abstand des Punktes von einem festen Punkte C bedeuten, ϑ und ψ die Richtung von C nach P in beliebiger Weise bestimmen sollen. Es werde über die einfache, geschlossene Oberfläche

$$r = F(\vartheta, \psi, t) = F_t \qquad \ldots 1)$$

das Integral

$$I(t) = \iint\limits_{F_t} f(r, \vartheta, \psi, t)\, d\sigma \qquad \ldots 2)$$

erstreckt, wobei wir C im Innern der Fläche F_t annehmen. Um $\frac{dI}{dt}$ zu bilden, denken wir uns die in derselben Richtung von C ausgehenden Oberflächenelemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ der beiden Flächen F_t und $F_{t+\tau}$ einander zugeordnet. Dann tritt im neuen Integral $I(t+\tau)$, wenn wir in üblicher Weise nur diejenigen Glieder anschreiben, die beim späteren Grenzübergang eine Rolle spielen,

$$f + \frac{\partial f}{\partial t}\tau + \frac{\partial f}{\partial r} dr$$

an Stelle des früheren f, wobei

$$dr = \frac{\partial F}{\partial t}\tau.$$

Es hat sich aber auch die Grösse des Oberflächenelementes geändert, und zwar kann dabei die Änderung, die von der Stellungsänderung des Elementes im Raume herrührt, ausser Betracht bleiben, weil die Entwicklung für den Winkel ν, den die Elemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ bilden, als Function von τ im regulären

Falle, der solchen allgemeinen Betrachtungen allein zugänglich ist, mit der ersten Potenz von τ beginnen wird, und daher $\cos\nu$ mit $1-c\tau^2$. Man erhält also den vollständigen Coëfficienten von τ^1 in der Entwicklung von $\frac{d\sigma'}{d\sigma}$, wenn man $d\sigma'$ als durch Parallelverschiebung hervorgegangen ansieht und bekommt in diesem Falle

$$d\sigma' = \left(1+\frac{2}{r}\,dr\right)d\sigma = \left(1+\frac{2}{F}\cdot\frac{\partial F}{\partial t}\,\tau\right)d\sigma$$

und schliesslich

$$\frac{dI}{dt} = \iint\limits_{F_t}\left[\frac{\partial f}{\partial t}+\left(\frac{\partial f}{\partial r}+2\,\frac{f}{F}\right)\frac{\partial F}{\partial t}\right]d\sigma. \qquad .\mathrm{I})$$

Ist jetzt $I(t)$ ein dreifaches Integral über einen von derselben Fläche 1) begrenzten Raum und dv das Volumelement, n die Richtung der äusseren Normalen von F_t, so ist

$$\frac{dI}{dt} = \iiint\limits_{F_t}\frac{\partial f}{\partial t}\,dv + \iint\limits_{F_t} f\;\frac{\partial F}{\partial t}\cos(n,r)\,d\sigma, \qquad .\mathrm{II})$$

wie man sogleich einsieht, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial F}{\partial t}\,.\cos(n,r)\,.\,\tau$$

das Differential der Dicke der zwischen den Flächen $F_{t+\tau}$ und F_t gelegenen Schicht ist, gemessen in der Richtung der Normalen.

An Stelle der Gleichung I) tritt die folgende I'), wenn man die Oberflächenelemente $d\sigma$ und $d\sigma'$ in der Richtung der Normalen von F einander zuordnet. Wird nämlich ein Hauptkrümmungshalbmesser von F positiv gezählt, wenn er auf der inneren Normalen, negativ, wenn er auf der äusseren liegt, und ist μ die mittlere Krümmung der Fläche F an der Stelle $d\sigma$, so ist bei obiger Zuordnung (s. z. B. Steiner, Ges. Werke, Bd. II, S. 176, »Über Parallelflächen«):

$$d\sigma' = (1+\mu)\,d\sigma.$$

Die Stellungsänderung der Elemente kann aus demselben Grunde wie früher unberücksichtigt bleiben. Also bekommt man:

$$\frac{dI}{dt} = \iint\limits_{F_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial n} \quad \frac{dn}{dt} + \mu f\right) d\sigma, \qquad \text{..I}')$$

wobei $\frac{\partial f}{\partial n}$ die Ableitung von f nach der äusseren Normalen der Fläche F an der Stelle $d\sigma$ ist, $\frac{\partial n}{\partial t}$ die Geschwindigkeit, mit der sich das Element $d\sigma$ der beweglichen Fläche F in der Richtung der äusseren Normalen bewegt, wenn man den Parameter t als Zeitmaass betrachtet. Ist ein specielles Coordinatensystem gegeben, so sind μ und das mittlere Glied des Integranden in diesem System auszudrücken. An und für sich enthält jedoch die Gleichung I') nichts mehr, was sich auf irgend ein Coordinatensystem bezieht; sie kann auf eine beliebige Zahl von Veränderlichen verallgemeinert werden:

Wenn durch eine Gleichung

$$F(x_1, x_2, \ldots x_k, t) < 0 \qquad .3)$$

aus der k-fachen Mannigfaltigkeit $x_1, \ldots x_k$ ein Gebiet G abgegrenzt ist, so lassen sich auf die Begrenzung $\mathfrak{G}$ dieses Gebietes die wesentlichen Begriffe der Flächentheorie übertragen. Namentlich gibt es an jeder regulären Stelle P von $\mathfrak{G}$ $k-1$ auf einander und auf der Normalen n von $\mathfrak{G}$ in P senkrecht stehende Richtungen PP_i, deren benachbarte Normalen die Normale n in den Punkten M_i schneiden (s. z. B. Kronecker, »Über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln«, Monatsber. der Berliner Akad., 1869, S. 688). Die Abstände PM_i heissen die Hauptkrümmungshalbmesser ρ_i. Die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ kann also für Grenzbetrachtungen als aus lauter rechtwinkligen Parallelotopen zusammengesetzt betrachtet werden. Ein solches ist durch die k Punkte

$$P, P_i (i = 1, 2, \ldots k-1)$$

bestimmt. Beim Übergang zu einer Nachbarmannigfaltigkeit $F(t+\tau) = 0$ verschiebt sich jeder dieser Punkte auf seiner

Normalen um dn (abgesehen von Grössen, die beim Grenzübergang wegfallen), wobei die Kanten des Parallelotops in den Verhältnissen

$$1 \quad \left(1+\frac{dn}{\rho_i}\right)$$

wachsen. Die Volumina dv und dv' der Parallelotope stehen also (bis auf Grössen erster Ordnung) im Verhältnisse

$$1 \quad (1+\mu . dn),$$

wobei

$$\mu = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\rho_i}$$

die mittlere Krümmung der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ ist. Dabei sind die ρ_i positiv zu zählen, wenn sie im Inneren des Gebietes G liegen, dn dagegen dann positiv, wenn es aus dem Gebiet G herausführt. Die Grössen $\frac{1}{\rho_i}$ berechnet man auf folgende Weise: Wenn λ_i eine Wurzel der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0\ , & \frac{\partial F}{\partial x_1}, & \frac{\partial F}{\partial x_k} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} - \lambda, & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_k} \\ & & \\ \frac{\partial F}{\partial x_k}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_1}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ist, so ist[1]

$$\frac{1}{\rho_i} = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2}}.$$

---

[1] A. a. O. S. 693. Kronecker schreibt diese Determinante

$$|F_{gh} - \lambda . \delta_{gh}| \quad (g, h = 0, 1, 2, \ldots k),$$

wobei insoferne ein Versehen in der Bezeichnung unterlaufen ist, als er Anfangs ausdrücklich erklärt, er wolle unter F_{00} die ursprüngliche Function

Ist also I ein $k-1$-faches Integral über $\mathfrak{G}$:

$$I = \int_{\mathfrak{G}} f(x_1 x_2 \ldots x_k, t)\, dv,$$

so erhält man auch hier:

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\mathfrak{G}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \frac{dn}{dt} + \mu f \right) dv, \qquad .\mathrm{III})$$

wobei $\frac{dn}{dt}$ die Geschwindigkeit ist, mit der sich das Parallelotop längs n bewegt.

Ist endlich I ein k-faches Integral über das Gebiet G mit dem Volumelement dw (der Fall, den Kronecker behandelt hat):

$$I = \int_G f\, dw,$$

so lehrt eine analoge Überlegung, wie bei II), dass ganz allgemein:

$$\frac{dI}{dt} = \int_G \frac{\partial f}{\partial t}\, dw + \int_{\mathfrak{G}} f \frac{dn}{dt}\, dv, \qquad .\mathrm{IV})$$

wobei das erste Integral rechts ein k-faches, das zweite ein $k-1$-faches ist. Ist insbesondere das Gebiet G in der Form 3) gegeben, so ist

$$\frac{dn}{dt} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial t}}{\left| \sqrt{\Sigma \left(\dfrac{\partial F}{\partial x} \right)^2} \right|}$$

zu setzen, und man erhält Kronecker's Gleichung (a. a. O. S. 260, Gleichung [2*]).

(hier F) verstehen; ferner ist nach seiner Schreibweise $\delta_{00} = 1$. In der linken oberen Ecke muss aber statt $F-\lambda$ die Nulle stehen (s. für den Fall $k = 3$ Baltzer, Determinanten, §. 13, 6).