

Über einen algebraischen Satz

von

F. Mertens,

w. M. k. Akad.

Es sei

$$f(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \ldots \pm c_n = 0$$

eine gegebene algebraische Gleichung mit von Null verschiedener Discriminante D und den Wurzeln

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$$

und

$$G = [1, g, h, \ldots k]$$

eine gegebene Gruppe von Permutationen der Stellenzeiger $1, 2, \ldots n$ von geringerer als der Ordnung $n!$. Vertheilt man in bekannter Weise alle möglichen $n!$ Permutationen der Elemente $1, 2, \ldots n$ mit Hilfe von passend gewählten Permutationen $q_0, q_1, \ldots q_{\rho-1}$ in die ρ Inbegriffe

$$Gq_0, Gq_1, \ldots Gq_{\rho-1},$$

wo $q_0 = 1$, so gibt es[1] ganze Functionen der Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, welche bei allen — an den Stellenzeigern von $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ zu vollziehenden — Permutationen von G gleiche, bei den Permutationen $q_0, q_1, \ldots q_{\rho-1}$ hingegen unter einander numerisch verschiedene Werthe annehmen.

In den folgenden Zeilen soll ein Beweis für die Existenz solcher Functionen mitgetheilt werden.

---

[1] Serret, Cours d'algèbre supérieure. — Kronecker's Festschrift, §. 12.

1.

Es seien

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

Unbestimmte,

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$$

ihre elementaren symmetrischen Functionen und

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^{(1)}, \mathfrak{P}^{(2)}, \ldots \mathfrak{P}^{(\nu-1)}$$

alle Potenzproducte $x_1^\alpha x_2^\beta \ldots x_n^\varepsilon$, in welchen die Exponenten den Bedingungen

$$\alpha \leqq n-1$$
$$\beta \leqq n-2$$
$$\gamma \leqq n-3$$

$$\varepsilon = 0$$

genügen und deren Anzahl

$$\nu = n!$$

ist. Man bezeichne den Werth, welchen eine Function ω der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die an den Stellenzeigern der letzteren zu vollziehende Permutation s annimmt, allgemein mit ω_s und setze

$$\varphi^{(i)} = \mathfrak{P}_1^{(i)} + \mathfrak{P}_g^{(i)} + \mathfrak{P}_h^{(i)} + \ldots + \mathfrak{P}_k^{(i)}$$
$$\psi = u_0 \varphi^{(0)} + u_1 \varphi^{(1)} + \ldots + u_{\nu-1} \varphi^{(\nu-1)},$$

wo

$$u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}$$

Unbestimmte bezeichnen. Sind dann

$$\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_{\rho-1}$$

die Werthe, welche ψ bei den Permutationen $q_0, q_1, \ldots q_{\rho-1}$ annimmt, und setzt man

$$F(t) = (t-\psi_0)(t-\psi_1) \ldots (t-\psi_{\rho-1}),$$

so hat $F(t)$ ganze ganzzahlige Functionen von $u_0, u_1, \ldots x_1, x_2, \ldots x_n$ zu Coëfficienten, welche in $x_1, x_2, \ldots x_n$ symmetrisch und daher als ganze ganzzahlige Functionen von $u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ darstellbar sind.

Ist nun $\Delta(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ die Discriminante von $F(t)$, so handelt es sich um den Nachweis, dass der Ausdruck $\Delta(c_1, c_2, \ldots c_n)$ nicht identisch in den Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}$ verschwindet.

Ist dieser Nachweis geführt, so kann man in $\Delta(c_1, c_2, \ldots c_n)$ für die Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}$ passend gewählte ganze Zahlen

$$a_0, a_1, \ldots a_{\nu-1}$$

von der Art setzen, dass das Resultat nicht Null ist. Gehen dann

$$F(t), \varphi, \varphi^{(1)} \ldots \varphi^{(\nu-1)}$$

nach Ersetzung von

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \ u_0, u_1, \ldots u_{\nu-1}$$

durch

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n, \ a_0, a_1, \ldots a_{\nu-1}$$

in

$$F_0(t), \varphi_0, \varphi_0^{(1)}, \ldots \varphi_0^{(\nu-1)}$$

über, so ist der Ausdruck

$$\omega = a_0\varphi_0 + a_1\varphi_0^{(1)} + a_2\varphi_0^{(2)} + \ldots + a_{\nu-1}\varphi_0^{(\nu-1)}$$

eine ganze ganzzahlige Function der Wurzeln $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ von der gewünschten Art. Denn ω wird durch keine Permutation von G geändert und nimmt bei den Permutationen $q_0, q_1, \ldots q_{\rho-1}$ ρ Werthe an, welche mit den ρ Wurzeln der Gleichung

$$F_0(t) = 0$$

von nicht verschwindender Discriminante zusammenfallen und daher unter einander numerisch verschieden sind.

Sind also $U, U', \ldots$ die verschiedenen Potenzproducte der Unbestimmten $u_0, u_1, \ldots$ welche in der Entwicklung von $\Delta(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ vorkommen, und setzt man

$$\Delta(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n) = SU + S'U' + \ldots$$

so sind

$$S, S', \ldots$$

bekannte ganze ganzzahlige Functionen von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$, von welchen zu zeigen ist, dass sie nicht alle für

$$\sigma_1 = c_1, \ \sigma_2 = c_2, \ldots \sigma_n = c_n$$

verschwinden können.

2.

Man hat

$$\Delta(\sigma_1, \sigma_2, .\ .\sigma_n) = \Pi(\psi_\alpha - \psi_\beta)$$

wo α alle Werthe $0, 1, \ldots \rho-1$ und β für jeden besonderen Werth von α alle Zahlen $0, 1, \ldots \rho-1$ ausser α zu durchlaufen haben. Bezeichnen daher

$$\varphi_0^{(i)}, \varphi_1^{(i)}, \ldots \varphi_{\rho-1}^{(i)}$$

die Werthe, welche $\varphi^{(i)}$ bei den Permutationen $q_0, q_1, .\ .q_{\rho-1}$ annimmt, so ist

$$\psi_\alpha = u_0\varphi_\alpha^{(0)} + u_1\varphi_\alpha^{(1)} + .\ .+ u_{\nu-1}\varphi_\alpha^{(\nu-1)}$$
$$\psi_\beta = u_0\varphi_\beta^{(0)} + u_1\varphi_\beta^{(1)} + .\ .+ u_{\nu-1}\varphi_\beta^{(\nu-1)}$$

und demgemäss

$$\Delta(\sigma_1, \sigma_2, .\ .\sigma_n) =$$
$$= \Pi[u_0(\varphi_\alpha^{(0)} - \varphi_\beta^{(0)}) + u_1(\varphi_\alpha^{(1)} - \varphi_\beta^{(1)}) + \ldots + u_{\nu-1}(\varphi_\alpha^{(\nu-1)} - \varphi_\beta^{(\nu-1)})].$$

Ich habe an anderer Stelle[1] folgenden Satz bewiesen:

Sind Φ, Ψ ganze Functionen der Veränderlichen $x, y, \ldots$ mit unbestimmten Coëfficienten, A, B, C beziehungsweise Coëfficienten der Functionen $\Phi, \Psi, \Phi\Psi$, so gibt es immer Exponenten m von der Art, dass jedes Product $A^m B$ sich als Vielfachsumme von lauter Producten $P_{m-1}C$ darstellen lässt, wo allgemein P_λ ein Product von λ gleichen oder verschiedenen Coëfficienten von Φ bezeichnet. Sind daher

$$A_0, A_1, .\ .A_\lambda$$
$$B_0, B_1, \ldots B_\mu$$

die Coëfficienten von Φ und Ψ und

$$A'_0, A'_1, \ldots A'_\lambda$$
$$B'_0, B'_1, .\ .B'_\lambda$$

Unbestimmte, so lässt sich auch ein Exponent m von der Art angeben, dass der Ausdruck

$$(A_0A'_0 + AA'_1 + \ldots + A_\lambda A'_\lambda)^m (B_0B'_0 + B_1B'_1 + .\ .+ B_\mu B'_\mu)$$

---

[1] Sitzungsberichte, 1892.

als Vielfachsumme von lauter Producten $P_{1m}-CQ$ darstellbar ist, wo Q ein Potenzproduct der Unbestimmten $A'_0, A'_1, \ldots B'_0, B'_1, \ldots$ bezeichnet.

Dieser Satz lässt sich leicht auf ein Product von mehr als zwei Factoren ausdehnen. Sind

$$\Phi, \Psi, \ldots \Theta$$

irgend eine Anzahl von ganzen Functionen der Variablen $x, y, \ldots$ mit unbestimmten Coëfficienten und sind

$$\begin{gathered} A_0, A_1, \ldots \\ B_0, B_1, \ldots \\ \\ E_0, E_1, \ldots \end{gathered}$$

die Coëfficienten von $\Phi, \Psi, \ldots \Theta$,

$$\begin{gathered} A'_0, A'_1, \ldots \\ B'_0, B'_1, \ldots \\ \\ E'_0, E'_1, \ldots \end{gathered}$$

Unbestimmte, so gibt es Exponenten $a, b, \ldots e$ von der Art, dass der Ausdruck

$$(A_0 A'_0 + A_1 A'_1 + \ldots)^a (B_0 B'_0 + B_1 B'_1 + \ldots)^b \ldots (E_0 E'_0 + E_1 E'_1 + \ldots)^c$$

als Vielfachsumme von lauter Producten $L\Lambda$ darstellbar ist, wo L ein Potenzproduct der Unbestimmten

$$A_0, A_1, \ldots B_0, B_1, \ldots, E_0, E_1, \ldots A'_0, A'_1, \ldots E'_0, E'_1, \ldots$$

und Λ einen Coëfficienten des nach $x, y, \ldots$ entwickelten Productes $\Phi\Psi \ldots \Theta$ bezeichnen.

Sind daher, den einzelnen Zahlenpaaren $\alpha\beta$ entsprechend,

$$A^{(0)}_{\alpha\beta}, A^{(1)}_{\alpha\beta}, \ldots A^{(\nu-1)}_{\alpha\beta} \tag{1}$$

$\rho(\rho-1)$ Reihen von je ν Unbestimmten, so gibt es nach dem angeführten Satze Exponenten

$$m_{01}, m_{10}, m_{02}, m_{20}, \ldots m_{\rho-2\,\rho-1}, m_{\rho-1\,\rho-2}$$

von der Art, dass das über alle oben beschriebenen Werthepaare $\alpha\beta$ erstreckte Product

$$W = \Pi\left(A_{\alpha\beta}^{(0)}(\varphi_\alpha^{(0)} - \varphi_\beta^{(0)}) + A_{\alpha\beta}^{(1)}(\varphi_\alpha^{(1)} - \varphi_\beta^{(1)}) + \ldots + A_{\alpha\beta}^{(\nu-1)}(\varphi_\alpha^{(\nu-1)} - \varphi_\beta^{(\nu-1)})\right)^{m_{\alpha\beta}} \quad (2)$$

als Vielfachsumme von Producten $L\Lambda$ darstellbar ist, wo L ein Potenzproduct von lauter Differenzen $\varphi_\alpha^{(i)} - \varphi_\beta^{(i)}$ und Unbestimmten (1), also eine ganze ganzzahlige Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der Unbestimmten (1) und Λ einen Coëfficienten der Potenzproducte $U, U', \ldots$ in $\Delta(\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n)$ bezeichnen. Das Product W erscheint demnach in der Gestalt

$$W = ST + S'T' + \ldots \quad (3)$$

wo $T, T', \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und der Unbestimmten (1) bezeichnen.

3.

Sind

$$y_1, y_2, \ldots y_n$$

Unbestimmte, so treten in der Entwicklung des Productes

$$\begin{aligned} V = (y_1 - x_1)(y_2 - x_1) \ldots &(y_{n-1} - x_1) \\ (y_2 - x_2) \ldots &(y_{n-1} - x_2) \\ &\ldots \\ &(y_{n-1} - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (4)$$

nach den Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$ nur die Potenzproducte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}^{(1)}, \mathfrak{P}^{(2)}, \ldots$ auf und man kann daher

$$V = \mathfrak{P}\underset{\sim}{Q} + \mathfrak{P}^{(1)}\underset{\sim}{Q}^{(1)} + \ldots \mathfrak{P}^{(\nu-1)}\underset{\sim}{Q}^{(\nu-1)}$$

setzen, wo $\underset{\sim}{Q}, \underset{\sim}{Q}^{(1)}, \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen von $y_1, y_2, \ldots y_n$ bezeichnen. Geht $\underset{\sim}{Q}^{(i)}$ für

$$y_1 = x_2, \quad y_2 = x_3, \ldots \quad y_{n-1} = x_n$$

in $X^{(i)}$ über und sind

$$r = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \ldots \mathfrak{e} \\ 1\,2 \ldots n \end{pmatrix}, \qquad s = \begin{pmatrix} \mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}' \ldots \mathfrak{e}' \\ 1\,2 \ldots n \end{pmatrix}$$

irgend zwei Permutationen der Stellenzeiger $1, 2, \ldots n$,

$$P = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots (x_n - x_1)$$
$$(x_3 - x_2) \ldots (x_n - x_2)$$
$$(x_n - x_{n-1})$$

das Differenzenproduct der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$, so hat die Summe

$$\sum_i \mathfrak{P}_r^{(i)} X_s^{(i)} = \mathfrak{P}_r Q_s + \mathfrak{P}_r^{(1)} Q_s^{(1)} + \ldots + \mathfrak{P}_r^{(\nu-1)} Q_s^{(\nu-1)}$$

den Werth $\pm P$ oder 0, je nachdem die Permutationen r und s identisch oder verschieden sind. Denn die Identität (4) geht zunächst durch Ausführung der Permutation r an den Stellenzeigern von $x_1, x_2, \ldots x_n$ in

$$\Sigma \mathfrak{P}_r^{(i)} Q^{(i)} = (y_1 - x_\mathfrak{a})(y_2 - x_\mathfrak{a}) \ldots (y_{n-1} - x_\mathfrak{a})$$
$$(y_2 - x_\mathfrak{b}) \ldots (y_{n-1} - x_\mathfrak{b})$$
$$(y_{n-1} - x_\mathfrak{e})$$

über und man erhält hierauf, wenn

$$y_1 = x_{\mathfrak{b}'}, \quad y_2 = x_{\mathfrak{c}'}, \ldots \quad y_{n-1} = x_{\mathfrak{e}'}$$

gesetzt wird, wodurch $Q^{(i)}$ in $X_s^{(i)}$ übergeht,

$$\Sigma \mathfrak{P}_r^{(i)} X_s^{(i)} = (x_{\mathfrak{b}'} - x_\mathfrak{a})(x_{\mathfrak{c}'} - x_\mathfrak{a}) \ldots (x_{\mathfrak{e}'} - x_\mathfrak{a})$$
$$(x_{\mathfrak{c}'} - x_\mathfrak{b}) \ldots (x_{\mathfrak{e}'} - x_\mathfrak{b})$$
$$(x_{\mathfrak{e}'} - x_\mathfrak{d}).$$

Dieses Product ist nur dann von Null verschieden, wenn $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{b}', \mathfrak{c}', \ldots \mathfrak{e}'$ verschieden ist also mit $\mathfrak{a}'$ zusammenfällt, wenn $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{c}', \ldots \mathfrak{e}'$ verschieden ist also mit $\mathfrak{b}'$ zusammenfällt u. s. f., wenn also r und s identisch sind. Sind aber r, s identisch, so wird

$$\Sigma \mathfrak{P}_r^{(i)} Q_r^{(i)} = (x_\mathfrak{b} - x_\mathfrak{a})(x_\mathfrak{c} - x_\mathfrak{a}) \ldots (x_\mathfrak{e} - x_\mathfrak{a})$$
$$(x_\mathfrak{c} - x_\mathfrak{b}) \ldots (x_\mathfrak{e} - x_\mathfrak{b})$$
$$(x_\mathfrak{e} - x_\mathfrak{d})$$
$$= \pm P.$$

4.

Ersetzt man in dem Ausdrucke W die Unbestimmten

$$A_{\alpha\beta}^{(0)},\ A_{\alpha\beta}^{(1)},\ldots A_{\alpha\beta}^{(\nu-1)}$$

für jedes β durch

$$X_{q\alpha}^{(0)},\ X_{q\alpha}^{(1)},\ldots X_{q\alpha}^{(\nu-1)},$$

so wird

$$X_{q\alpha}^{(0)}(\varphi_\alpha^{(0)}-\varphi_\beta^{(0)})+X_{q\alpha}^{(1)}(\varphi_\alpha^{(1)}-\varphi_\beta^{(1)})+\ldots$$
$$=\sum_i X_{q\alpha}^{(i)}\mathfrak{P}_{q\alpha}^{(i)}+\sum_i X_{q\alpha}^{(i)}\mathfrak{P}_{gq\alpha}^{(i)}+\ldots+\sum X_{q\alpha}^{(i)}\mathfrak{P}_{kq\alpha}$$
$$-\sum X_{q\alpha}^{(i)}\mathfrak{P}_{q\beta}^{(i)}-\sum X_{q\alpha}^{(i)}\mathfrak{P}_{gq\beta}^{(i)}-\ldots-\sum_i X_{q\alpha}^{(i)}\mathfrak{P}_{kq\beta}$$
$$=\pm P$$

und demzufolge

$$W=\pm P^\lambda$$

Aus (4) ergibt sich dann eine Identität von der Form

$$\pm P^\lambda = SH+S'H'+\ldots$$

wo $H, H', \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen. Man darf λ gerade annehmen, da man im Gegenfalle nur beide Seiten der Identität mit P zu multipliciren braucht. Ist daher R die Discriminante der Function

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

so hat man eine Identität von der Form

$$R^\mu = KS+K'S'+$$

wo $K, K', \ldots$ ganze ganzzahlige Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen.

Permutirt man in derselben die Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots x_n$ auf alle möglichen Weisen und addirt die Resultate, so ergibt sich nach Division mit $n!$

$$R^\mu = S\frac{1}{n!}\Sigma K+S'\frac{1}{n!}\Sigma K'+$$

wo ΣK, $\Sigma K'$,. die Summe der Werthe bezeichnen, welche aus K, K',. durch alle Permutationen von $x_1, x_2,$. hervorgehen. Da diese Summen in $x_1, x_2,$. symmetrisch sind, so sind $\frac{1}{n!}\Sigma K$, $\frac{1}{n!}\Sigma K'$,. bekannte ganze rationalzahlige Functionen $G, G', \ldots$ von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ und man hat

$$R^{\mu} = GS + G'S' +$$

Gehen nun G, S, G', S',. nach Ersetzung von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ durch $c_1, c_2, \ldots c_n$ in $G_0, S_0, G'_0, S'_0, \ldots$ über, so hat man

$$D^{\mu} = G_0 S_0 + G'_0 S'_0 +$$

und es erhellt, dass S_0, S'_0,. nicht alle verschwinden können

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: 106_2a

Autor(en)/Author(s): Mertens F.

Artikel/Article: Über einen algebraischen Satz. 422-430