Zwei Grenzwerthe, von welchen das obere Integral ein besonderer Fall ist

O. Stolz,
c. M. k. Akad.

Das obere Integral lässt sich als besonderer Fall der nachstehenden Grenzwerthe betrachten, die wir, um eine bestimmte Annahme vor uns zu haben, für die Punkte einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit erklären wollen.

1. Erster Grenzwerth. »In jedem Punkte xy des im Endlichen gelegenen Systems $\mathfrak{f}$ (dessen Punkte also sämmtlich innerhalb eines bestimmten Rechtecks liegen, dessen Seiten zu den Coordinatenaxen parallel sind) sei eine reelle Function $f(x, y)$ eindeutig definirt, und zwar sei sie endlich, d. h. es gibt zwei Zahlen A und B derart, dass, mag xy was immer für ein Punkt des Systems $\mathfrak{f}$ sein,

$$A < f(x, y) < B \tag{1}$$

ist. Über das Punktsystem $\mathfrak{f}$ wird eine Schaar oder ein Netz von einfachen geradlinig-begrenzten Vielecken mit den Zahlen $\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_n$ in der Weise ausgebreitet, dass zu jedem von ihnen Punkte von $\mathfrak{f}$ gehören und umgekehrt jeder Punkt von $\mathfrak{f}$ mindestens in einem vorkommt. Diese τ_r sind entweder sämmtlich positiv oder negativ. Beschränkt man den Punkt xy auf alle zum Vielecke τ_r $(r = 1, 2, \ldots n)$ gehörigen Systempunkte, so sei g_r die obere Grenze von $f(x, y)$.

Dann hat die Summe

$$\sum_{1}^{n} {}_r \, g_r \tau_r \tag{2}$$

bei unbeschränkter und unbegrenzter Abnahme eines jeden Vielecks τ_r nach den beiden Dimensionen der Ebene einen endlichen Grenzwerth G, d. h. jeder positiven Zahl $\varkappa$ entspricht eine andere λ so, dass

$$\left| \sum_{1}^{n} {}_r\, g_r \tau_r - G \right| < \varkappa \tag{3}$$

ist, wenn nur der Durchmesser[1] (D_r) eines jeden der Vielecke τ_r $(r = 1, 2, \ldots n)$ kleiner als λ ist.« Diese Beziehung wird kurz durch die Formel

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_{1}^{n} {}_r\, g_r = G \tag{I}$$

angedeutet.[2]

Beweis. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Erster Fall. $f(x, y)$ nimmt für die Punkte des Systems $\mathfrak{f}$ negative Werthe nicht an; es ist also dafür $f(x, y) \geqq 0$, somit $g_r \geqq 0$ und

$$\sum_{1}^{n} {}_r\, g_r \tau_r \geqq 0. \tag{4}$$

Auch ist jetzt $B > 0$.

Zunächst betrachten wir nur eine unbegrenzte Reihe $\mathfrak{T}_1 \mathfrak{T}_2 \ldots \mathfrak{T}_m \ldots$ solcher Schaaren von Vielecken in der xy-Ebene, dass der Durchmesser eines jeden zur Schaar $\mathfrak{T}_m$ gehörigen Vielecks $\tau_{m,n}$ kleiner als eine beliebige vorgegebene Zahl λ ausfällt, wenn nur m gross genug ist und dabei keines von ihnen in zwei benachbarten, dem System $\mathfrak{T}_{m-1}$ zugehörigen Vielecken liegt. Von den Vielecken der Schaar $\mathfrak{T}_m$ kommen zunächst alle jene in Betracht, zu denen mindestens je ein Punkt von $\mathfrak{f}$ gehört. Diese seien

$$\tau_{m,1}\, \tau_{m,2} \ldots \tau_{m,n_m} \qquad (m = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

---

[1] Unter Durchmesser eines einfachen Vielecks wird der grösste Abstand irgend zweier Punkte seines Umfanges verstanden.

[2] Für das Punktsystem auf einer Geraden lässt sich der Satz genau nach dem Verfahren zeigen, welches der Verfasser seinen »Grundzügen der Differential- und Integralrechnung«, I, S. 353 eingeschlagen hat, um die Existenz des oberen Integrals einer Function einer Veränderlichen nachzuweisen.

Wir bezeichnen ferner die obere Grenze der Werthe von $f(x, y)$ zu den dem System $\mathfrak{f}$ angehörigen Punkten von $\tau_{m,n}$ mit $g_{m,n}$ und setzen

$$\sum_{1}^{n_m} {}_n\, g_{m,n}\tau_{m,n} = \Sigma_m. \tag{6}$$

Beim Übergange von der Schaar $\mathfrak{T}_m$ zu $\mathfrak{T}_{m+1}$ zerfällt jedes Vieleck $\tau_{m,n}$ in mehrere Theile, von denen jene, zu welchen keine Punkte von $\mathfrak{f}$ gehören, in die Schaar $\mathfrak{T}_{m+1}$ nicht aufzunehmen sind. Da $g_{m,n} \geqq 0$ ist, so wird Σ_m bei Weglassung der diesen Theilen $\tau'_{m+1,n}$ der $\tau_{m,n}$ entsprechenden Producte $g_{m,n}\tau'_{m+1,n}$ nicht vergrössert. Der Rest von Σ_m ist, wie leicht zu sehen, nicht kleiner als Σ_{m+1}. Wir gelangen demnach zur Beziehung

$$\Sigma_m \geqq \Sigma_{m+1}. \tag{7}$$

Σ_m nimmt also mit wachsendem m nicht zu und hat daher bei $\lim m = +\infty$ einen Grenzwerth, und zwar, weil Σ_m nach (4) nicht negativ ist, einen nicht negativen endlichen, den wir mit G bezeichnen. Dabei ist

$$\Sigma_m \geqq G (= \lim_{m=+\infty} \Sigma_m). \tag{8}$$

Somit lässt sich jedem $\varkappa > 0$ ein $\mu > 0$ so zuordnen, dass wenn nur $m > \mu$ ist,

$$0 \leqq \Sigma_m - G < {}^1/_2\varkappa \quad \text{oder} \quad \Sigma_m < G + {}^1/_2\varkappa \tag{9}$$

ist.

Wir können ferner zeigen, dass wie immer auch die Vielecke $\tau_1 \ldots \tau_n$ gewählt werden mögen,

$$(S =) \sum_{1}^{n} {}_r\, g_r\tau_r \geqq G \tag{10}$$

ist. Zufolge der Beziehungen (9) und (10) ist also G die untere Grenze für alle Werthe, welche die Summe (2) überhaupt annehmen kann. Um die Ungleichung (10) zu erweisen, bemerken wir, dass nach (8)

$$G - S \leqq \Sigma_m - S \tag{11}$$

ist, und zeigen, dass sich jedem $\varepsilon > 0$ ganze Zahlen m so zuordnen lassen, dass

$$\Sigma_m - S < \varepsilon \tag{12}$$

ist. Dann hat man nach (11) $G - S < \varepsilon$, also in der That $G \leqq S$.

Umständlicher ist der Beweis der Formel (12). Wir denken uns in der xy-Ebene die gegebenen Vielecke $\tau_1 \ldots \tau_n$ gezeichnet und darüber die Schaar $\mathfrak{T}_m$ von Vielecken $\tau_{m,n}$, wobei m zunächst nur so gross sein soll, dass jedes $\tau_{m,n}$ kleiner ist als das kleinste unter den $\tau_1 \ldots \tau_n$. Es kann also kein τ_r ganz in einem $\tau_{m,n}$ liegen. Unter den in Σ_m erscheinenden Vielecken $\tau_{m,n}$, d. i. den Vielecken (5), gibt es keines, das nicht mindestens mit einem τ_r wenigstens einen Punkt gemein hätte, weil sonst nicht jeder Punkt von $\mathfrak{f}$ zu einem oder mehreren der Vielecke τ_r gehören würde. Daher zerfallen diese Vielecke (5) in zwei Classen, und zwar 1) solche, welche innerhalb je eines τ_r liegen oder wenigstens über je ein τ_r nicht hinausragen, 2) solche, welche mit dem Rande eines oder mehrerer τ_r mindestens je einen Punkt gemein haben, ohne ganz in einem von ihnen zu liegen. Die Summen der den τ_{mn} dieser beiden Classen entsprechenden Glieder von Σ_m seien beziehungsweise mit Σ'_m, Σ''_m bezeichnet, so dass

$$\Sigma_m = \Sigma'_m + \Sigma''_m \tag{13}$$

ist. Da nach (1) $g_{m,n} \leqq B$ ist, so hat man

$$\Sigma''_m \leqq B \Sigma'' \tau_{m,n}, \tag{14}$$

wo die Summe Σ'' sich eben auf alle Vielecke der 2. Classe erstreckt. Fassen wir zunächst alle jene unter ihnen, welche mit dem Umfange (P_r) eines und desselben τ_r mindestens je einen Punkt gemein haben, ins Auge. Man kann eine solche Länge K_r angeben,[1] dass wenn der grösste unter den Durch-

[1] Wenn man zu jeder Seite eines Vielecks $M_1 M_2 \ldots M_k$, dessen Umfang P sich selbst nicht schneidet, sowohl ausserhalb, als auch innerhalb des Vielecks im nämlichen Abstande H eine Parallele zieht, so bilden die Schnittpunkte je zweier aufeinander folgender äusserer Parallelen, sowie die je zweier aufeinanderfolgender innerer Parallelen ein neues Vieleck und der von den Umfängen dieser beiden Vielecke eingeschlossene Ring hat den Inhalt $2HP$. Nur darf, damit keiner von ihnen sich selbst schneide, H nicht grösser sein als der

messern der soeben bezeichneten Vielecke $\tau_{m,n}$ — er sei $\Delta_{m,r}$ — K_r nicht überschreitet, alsdann ihre Summe nicht grösser als $2\Delta_{m,r} P_r$ ist. Wenn dann der grösste unter den Durchmessern aller der Schaar $\mathfrak{T}_m$ angehörigen Vielecke $\tau_{m,n}$ überhaupt, Δ_m, höchstens die kleinste unter den Längen $K_1 K_2 \ldots K_n$ erreicht, so geht die soeben erwähnte Summe nicht über $2\Delta_m P_r$ hinaus. Lassen wir hier r nacheinander die Werthe $1 \ldots n$ durchlaufen und addiren die bezüglichen Ungleichungen, so finden wir, dass sicherlich

$$\Sigma'' \tau_{m,n} \leqq 2\Delta_m \sum_{1}^{n}{}_r P_r \tag{15}$$

ist. Mithin haben wir

$$\Sigma''_m \leqq 2B\Delta_m \sum_{1}^{n}{}_r P_r . \tag{16}$$

Aus den Formeln (14) und (16) ergibt sich dann, dass

$$\Sigma_m \leqq \Sigma'_m + 2B\Delta_m \sum_{1}^{n}{}_r P_r \tag{17}$$

ist.

In der Summe S ersetzen wir jedes τ_r durch die Summe der Theile, in welche es durch die Einzeichnung der $\tau_{m,n}$ in die mit den Vielecken $\tau_1 \ldots \tau_n$ bereits bedeckte Ebene zerfällt, und lösen die Producte $g_r \tau_r$ auf. Die so aus S erhaltenen Glieder theilen wir ebenfalls in zwei Gruppen; die erste bestehe aus jenen, deren zweiter Factor der Inhalt eines $\tau_{m,n}$ der ersten unter den obigen beiden Classen ist, also eines solchen, das ganz innerhalb e i n e s τ_r liegt, die zweite wird von allen übrigen

---

Abstand des Punktes O_r, wo die Halbirungslinien der Winkel M_r und M_{r+1} des vorgelegten Vielecks sich treffen, von der Seite $M_r M_{r+1}$, und zwar bei jeder der Nummern $r = 1, 2, \ldots k$. Wendet man diese Bemerkung auf das Vieleck τ_r i. T. an und denkt sich den Durchmesser sämmtlicher $\tau_{m,n}$, welche mit τ_r mindestens einen Punkt gemein haben, nicht grösser als den kleinsten der soeben erwähnten Abstände im Vielecke τ_r, K_r, so kann keines von ihnen über die ringförmige Fläche, deren äusserer und innerer Rand vom Umfange von τ_r überall den Abstand K_r hat, hinausragen und somit ihre Summe die Zahl $2 K_r P_r$ nicht überschreiten.

Gliedern gebildet. Bezeichnen wir die Summen der in die erste Gruppe eingereihten Glieder mit S', die der zur zweiten gehörigen mit S'', so ist

$$S = S' + S''. \tag{18}$$

Da hier $g_r \geqq 0$, also $S'' \geqq 0$ ist, so finden wir nach (18)

$$S \geqq S'. \tag{19}$$

Aus (17) und (19) folgt dann, dass

$$\Sigma_m - S \leqq (\Sigma'_m - S') + 2 B \Delta_m \sum_1^n{}_r P_r \tag{20}$$

ist. $\Sigma'_m - S'$ kann, da für die einander entsprechenden Glieder von Σ'_m und S' $g_{m,n} \leqq g_r$ ist, nicht positiv sein, d. h. es ist

$$\Sigma'_m - S' \leqq 0. \tag{21}$$

Wir gewinnen demnach aus (20) die Formel

$$\Sigma_m - S \leqq 2 B \Delta_m \sum_1^n{}_r P_r. \tag{22}$$

Da es nun freisteht, m noch so weit zu vergrössern, dass

$$\Delta_m < \varepsilon : 2 B \sum_1^n{}_r P_r$$

ist, so ergibt sich aus (22) unmittelbar die Beziehung (12).

Die Ungleichung (22) reicht übrigens zum Beweise der Formel (I), d. i. der Beziehung (3) auf S. 454 in dem in Rede stehenden Falle aus. Wir setzen

$$\sum_1^n{}_r g_r \tau_r - G = (\Sigma_m - G) + \left(\sum_1^n{}_r g_r \tau_r - \Sigma_m\right) \tag{23}$$

und geben m einen so grossen Werth, dass für die Differenz $\Sigma_m - G$ die Ungleichung (9) besteht. Um für

$$\sum^n{}_r g_r \tau_r - \Sigma_m$$

eine obere Grenze zu erhalten, brauchen wir bloss im Vorstehenden das System der Vielecke (5) auf S. 454 mit dem System $\tau_1 \ldots \tau_n$ zu vertauschen. Bedeutet D den grössten unter den Durchmessern der Vielecke τ_r, welcher von vorneherein nicht grösser als alle wie die K_r zu bestimmenden Längen $K_{m,1} \ldots K_{m,n_m}$ anzunehmen ist, und $P_{m,u}$ den Umfang des Vielecks $\iota_{m\,u}$, so folgt aus (22), dass

$$\sum_1^n {}_r\, g_r \tau_r - \Sigma \leqq 2\,BD \sum_1^{n_m} {}_u\, P_{m,u} \tag{24}$$

ist. Lassen wir nun

$$D < \varkappa : 4B \sum_1^{n_m} {}_u\, P_{m,u} \tag{25}$$

sein, so ist nach (24)

$$\sum_1^n {}_r\, g_r \tau_r - \Sigma_m < \varkappa \quad 2.$$

Mithin haben wir nach (23) zufolge der Beziehungen (9) und (10)

$$0 \leqq \sum_1^n {}_r\, g_r \tau_r - G < \varkappa,$$

wenn nur D kleiner als die rechte Seite der Ungleichung (25) ist. Damit ist unser Satz im ersten Falle bewiesen.

Wir wenden zunächst dieses Ergebniss auf die Function $f(x, y) = 1$ an. Alsdann finden wir, dass

$$\sum_1^n {}_r\, \tau_r,$$

wenn wir den Durchmesser D_r eines jeden τ_r zur Null convergiren lassen, einen nicht negativen endlichen Grenzwerth hat, den wir mit A bezeichnen. Es ist also

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^n {}_r\, \tau_r = \mathrm{A} \tag{26}$$

und dabei nach (10)

$$\sum_{1}^{n} {}_r \tau_r \geqq A. \tag{27}$$

Zweiter Fall. $f(x,y)$ nimmt in den Punkten des Systems $\mathfrak{f}$ entgegengesetzt bezeichnete Werthe an. Bezeichnet alsdann k die endliche untere Grenze der Werthe von $f(x,y)$ für alle diese Punkte, so ist $f(x,y)-k \geqq 0$. Für die Function $f(x,y)-k$ ist die obere Grenze in den dem Vielecke τ_r angehörigen Systempunkten g_r-k; also hat

$$\sum_{1}^{n} {}_r (g_r-k)\tau_r$$

nach dem beim ersten Falle Bemerkten bei $\lim \tau_r = 0$ $(r=1,2,\ldots n)$ einen endlichen Grenzwerth G_0. Wir haben aber

$$\sum_{1}^{n} {}_r g_r \tau_r = \sum_{1}^{n} {}_r (g_r-k)\tau_r + k \sum_{1}^{n} {}_r \tau_r,$$

mithin mit Rücksicht auf (26)

$$\lim_{\tau_r=0} \sum_{1}^{n} {}_r g_r \tau_r = G_0 + kA.$$

Es ist also unser Satz auch im zweiten Falle bewiesen.

2. Zweiter Grenzwerth. »Bedeuten $\tau'_1 \tau'_2 \ldots \tau'_{n'}$ unter den Vielecken $\tau_1 \ldots \tau_n$ diejenigen, deren Punkte sämmtlich Punkte des Systems $\mathfrak{f}$ sind, und g'_r $(r=1 \ldots n')$ die obere Grenze von (fx, y) für die Punkte von τ'_r, so hat auch die Summe

$$\sum_{1}^{n'} {}_r g'_r \tau'_r \tag{28}$$

bei unbeschränkter und unbegrenzter Abnahme der Durchmesser aller Vielecke $\tau_1 \ldots \tau_n$ einen endlichen Grenzwerth G', d. h. jedem $\varkappa > 0$ entspricht ein $\lambda < 0$ so, dass

$$\left| G' - \sum_{1}^{n'} {}_{r}\, g'_r \tau'_r \right| < \varkappa$$

ist, wenn nur der Durchmesser (D_r) eines jeden der Vielecke τ_r $(r = 1, 2, .. n)$ kleiner als λ ist.« Wir schreiben also auch hier

$$G' = \lim_{\tau_r = 0} \sum_{1}^{n'} {}_{r}\, g'_r \tau'_r. \tag{II}$$

»Gibt es unter den $\tau_1 \ldots \tau_n$ gar keine von der soeben erwähnten Beschaffenheit, so setze man $G' = 0$.«

Die Existenz des Grenzwerthes P' wird ganz ähnlich wie die des Grenzwerthes G in Nr. 1 gezeigt. Nur tritt in den Beziehungen (7) und (10) an Stelle von $\geqq$ $\leqq$, so dass es jetzt heisst

$$\sum_{1}^{n'} {}_{r}\, g'_r \tau'_r \leqq G'. \tag{29}$$

Wenn $f(x, y)$ für die Punkte des Systems $\mathfrak{f}$ negative Werthe nicht annimmt, so ist die Summe (28) nicht grösser als die Summe (2), somit ist auch $G' \leqq G$.

3. Die äussere und innere Flächenzahl. Die Formel (26) habe zuerst ich für ein beliebiges Punktsystem in der Ebene aufgestellt und auf ähnliche Art, wie die allgemeine (I), bewiesen.[1] Später hat sie C. Jordan gebracht,[2] aber zugleich mit der Formel, welche aus (II) bei der Annahme $f(x, y) = 1$ hervorgeht, d. i. wenn wir den ihr entsprechenden Grenzwerth mit A' bezeichnen,

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_{1}^{n'} {}_{r}\, \tau'_r = A'. \tag{30}$$

Dabei ist $0 \leqq A' \leqq A$. Wenn $A = A'$ ist, so heisst ihr gemeinsamer Werth die Zahl oder der Inhalt des Punkt-

---

[1] Math. Annal., Bd. 23 (1884), S. 152 f.

Vergl. Journal de Mathém. 1892, p. 76. Cours d'Analyse, éd. I, No. 36.

systems $\mathfrak{f}$. Sollte aber $A > A'$ sein, so wird A die äussere, A' die innere Flächenzahl dieses Punktsystems genannt. Die Unterscheidung dieser beiden Zahlen, somit die völlige Einsicht in die Natur der Flächenzahl verdankt man indess G. Peano.[1] Er erklärt die erstere als die untere Grenze aller Summen

$$\sum_{1}^{n}{}_{r}\, g_r \tau_r$$

[vergl. Formel (10)], die letztere als die obere Grenze aller Summen

$$\sum_{1}^{n'}{}_{r}\, g'_r \tau'_r$$

[vergl. (29)].

Wenn $A = 0$ ist, so ist auch $A' = 0$. Das endliche Punktsystem $\mathfrak{f}$ hat dann den Inhalt Null und wird nach Harnack als discret bezeichnet.[2]

Es mögen nun noch einige Beispiele von Flächenzahlen Erwähnung finden, wobei indess nur vollständige Punktsysteme, d. h. solche, zu denen auch ihre Grenzpunkte gehören,[3] berücksichtigt werden. Um solche Punktsysteme in der Ebene zu bilden, denken wir uns auf der Abscissenaxe ein vollständiges endliches Punktsystem gegeben und in jedem dazu gehörigen Punkte auf der positiven Seite dieser Axe ein Loth von der Länge 1 errichtet. Unser System möge dann aus allen Punkten eines jeden dieser Lothe bestehen. Als solches hat es zu Flächenzahlen die Längenzahlen des auf der x-Axe gegebenen Systems, so dass nur diese zu ermittelt werden brauchen.

1. Ein vollständiges endliches Punktsystem auf der x-Axe, dessen äussere und innere Länge von einander verschieden

---

[1] Vergl. dessen Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale, 1887, p. 152.

[2] Math. Annal., Bd. 19, S. 238.

[3] Nach C. Jordan's »parfait«, das von G. Cantor, welcher Punktmengen, die mit ihrer Ableitung identisch sind, perfect nennt (Math. Ann., Bd. 21, S. 575), entlehnt ist.

sind, bilden die Gesammtheit aller endlichen echten Decimalbrüche mit ungeradem Zähler nebst den Zahlen 0 und 1 und die Gesammtheit aller unendlichen echten Decimalbrüche, rational oder irrational, welche nicht von einer bestimmten Stelle an lauter gerade Ziffern (0, 2, 4, 6, 8) besitzen. Da dieses System in der Umgebung gar keines Punktes der Strecke (0, 1) stetig ist, so ist seine innere Länge $\mathrm{A}' = 0$. Seine äussere Länge A ist aber 1.

2. Das System der Punkte

$$x = 0 \quad x = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots, \text{ d. i. jeder natürlichen Zahl}) \tag{31}$$

ist vollständig und discret.[1]

3. Fügt man zu den Punkten (31) alle Punkte x:

$$0 > x \geqq -1,$$

so hat man ein unstetiges System, dessen äussere und innere Länge 1 ist.

4. Fügt man aber die nämlichen Punkte zu dem unter 1. beschriebenen System, so erhält man eines, wofür die äussere Länge $\mathrm{A} = 2$, die innere $\mathrm{A}' = 1$ ist.

Unter welcher Bedingung stetige Punktsysteme in der Ebene die nämliche äussere und innere Flächenzahl besitzen, werden wir sogleich erfahren.

5. Über die Gleichheit der Grenzwerthe (I) und (II). Das obere Doppelintegral.

Es ist leicht zu zeigen, dass wenn die äussere und innere Flächenzahl des Systems $\mathfrak{f}$ zusammenfallen, alsdann auch die Grenzwerthe (I) und (II) einander gleich sind. — Bezeichnet man nämlich mit $\tau_1'' \ldots \tau_{n''}''$ unter

---

[1] Ein anderes Beispiel ist das von G. Cantor (a. a. O. S. 590) angegebene System aller Zahlen

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_n}{3^n} + \ldots,$$

wo die Coëfficienten c_n nach Belieben die Werthe 0 oder haben dürfen und die Reihe endlich oder unendlich sein kann. Das System ist zugleich perfect.

den Vielecken τ_1. diejenigen, zu welchen sowohl Punkte des Systems f, als auch solche, die nicht in f vorkommen, gehören, und mit g_r'' die obere Grenze der Werthe von $f(x, y)$ für die in τ_r'' vorhandenen Punkte von f, so hat man natürlich

$$\sum_{1}^{n} r \, g_r \tau_r - \sum_{1}^{n'} r \, g_r' \tau_r' = \sum_{1}^{n''} r \, g_r'' \tau_r''. \tag{32}$$

Nun ist der Betrag der rechten Seite von (32) nicht grösser als

$$C \sum_{1}^{n''} r$$

wenn wir unter C die grössere von den Zahlen $|A$ und $|B$ aus (1) verstehen. Ist

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_{1}^{n} r \, \tau_r'' = 0, \tag{33}$$

d. h. fallen äussere und innere Flächenzahl des Systems f zusammen, so hat also auch die linke Seite der Gleichung (32) bei lim τ_r $(r = 1, 2, . \;\; . n)$ den Grenzwerth Null, d. i. es besteht die Gleichung

$$G - G' = 0.$$

Die Gleichung (33), d. i. $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$ gilt für jedes stetige[1] Punktsystem, welches geometrisch in der xy-Ebene durch eine

---

[1] Analytisch wird ein stetiges Punktsystem von zwei Dimensionen nach Weierstrass auf folgende Art erklärt: 1. Die zu sämmtlichen Punkten des Systems gehörigen Werthe von x und y liegen zwischen zwei endlichen Grenzen. Das System ist vollständig. 3. Unter den Systempunkten soll es Innenpunkte (S. 466) geben. 4. Bedeuten $A \equiv (a, b)$ und $A' \equiv (a', b')$ irgend zwei Punkte des Systems und ist eine beliebige gegebene positive Zahl, so lässt sich zwischen A und A' eine aus Innenpunkten des Systems in endlicher Anzahl $A_1 \ldots A_m$ gebildete Kette in der Art einschalten, dass A_1 zur Umgebung ε von A, A_2 zur Umgebung von $A_1 \ldots A_m$ zur Umgebung von A_{m-1} und endlich A' zur Umgebung von A_m gehört. Dabei wird unter Umgebung eines Punktes $x_0 y_0$ die Gesammtheit aller Punkte xy verstanden, wofür x irgend einen Werth zwischen $x_0 - \varepsilon$ und $x_0 + \varepsilon$, y irgend einen zwischen $y_0 - \varepsilon$ und $y_0 + \varepsilon$ bedeutet. Natürlich darf man als Umgebung ε

von einer endlichen Anzahl gewöhnlicher Ränder begrenzte Fläche $\mathfrak{f}$ dargestellt wird. Dabei wird unter einer gewöhnlichen Curve eine solche verstanden, welche sowohl mit jeder Parallelen zur x-Axe, als auch mit jeder Parallelen zur y-Axe höchstens eine bestimmte Anzahl von Punkten gemein hat.[1] Da wir bereits wissen, dass für jedes ebene Punktsystem

$$\lim_{\tau_r = 0} \sum_1^{n''} {}_r \tau_r'' = A - A'$$

ist, so können wir $A - A'$ schon dadurch ermitteln, dass wir nur eine unbegrenzte Reihe von Schaaren solcher Vielecke, deren Durchmesser sämmtlich kleiner als irgend eine gegebene Zahl werden können, berücksichtigen. Wir wählen als solche die Quadrate von der Seite δ, welche in der xy-Ebene auftreten, wenn ein System von Parallelen zur x-Axe, wovon je zwei aufeinanderfolgende den Abstand δ haben, und das ähnliche System von Parallelen zur y-Axe construirt werden. Dann lassen wir δ zur Null convergiren. Nun ist die Summe aller solcher Quadrate, welche mit einem und demselben Rande von $\mathfrak{f}$ mindestens einen Punkt gemein haben, kleiner als[2]

$$\{2p(b'-b) + 4q(a'-a)\}\delta, \tag{34}$$

worin $2p$ die grösste Anzahl der Punkte, welche dieser Rand mit einer Parallelen zur x-Axe, $2q$ die grösste Anzahl der Punkte, welche er mit einer Parallelen zur y-Axe gemein hat, bedeutet und a die kleinste, a' die grösste unter den Abscissen der Punkte ebendesselben Randes, b die kleinste, b' die grösste unter ihren Ordinaten bedeutet. Der Ausdruck (34) ist nun kleiner als irgend eine gegebene Zahl, wenn nur δ hinlänglich klein gewählt wird. Wiederholt man diesen Schluss an jedem

---

von $x_0 y_0$ mit C. Jordan (Cours d'Anal. 2. ed., I., Nr. 31) auch die Gesammtheit aller die Ungleichung (35) i. T. erfüllenden Punkte xy betrachten. Sie bilden ein Quadrat, dessen Mittelpunkt der Punkt $x_0 y_0$ und dessen Diagonalen von der Länge 2ε in den Coordinatenaxen liegen.

[1] In diese Anzahl sind im Falle, dass die Curve und eine solche Gerade eine Strecke gemein haben, bloss die beiden Endpunkte derselben aufzunehmen. Vergl. auch E. Picard, Traité d'Analyse, I, p. 96.

der Ränder von $\mathfrak{f}$, so erkennt man, dass die Summe aller jener unter den in Rede stehenden Quadraten, welche mit der Begrenzung von $\mathfrak{f}$ mindestens einen Punkt gemein haben, zugleich mit δ zur Null convergirt. Somit ist für jede Fläche $\mathfrak{f}$ von der oben angegebenen Beschaffenheit $A - A' = 0$.

Der soeben bewiesene Satz lässt sich unmittelbar ausdehnen auf ein Punktsystem, das aus den Punkten einer endlichen Anzahl von stetigen Flächen der gerade beschriebenen Art besteht.

C. Jordan[1] nennt Domäne ein vollständiges Punktsystem, zu dem auch Innenpunkte gehören. Innenpunkt heisst ein Punkt $x_0 y_0$ des Systems, dem eine positive Zahl ε sich so zuordnen lässt, dass alle Punkte xy, wofür

$$|x - x_0| + |y - y_0| < \varepsilon \tag{35}$$

ist, dem System angehören. Fallen für eine Domäne die äussere und innere Flächenzahl zusammen, so besteht dafür auch die Gleichung $G = G'$ Der gemeinsame Werth von G und G' heisst nach C. Jordan[2] das obere Doppelintegral (intégrale par excès) der Function $f(x, y)$ über diese Domäne. Es ist indess nicht einzusehen, was die Ausdehnung des Integralbegriffes auf ein Punktsystem, wie das auf S. 463 unter 3. beschriebene, für einen Zweck haben soll. Bleiben wir daher dabei, die von Volterra und Pasch eingeführte Bezeichnung »oberes Integral« für den gemeinsamen Werth von G und G' nur dann zu gebrauchen, wenn das Punktsystem $\mathfrak{f}$ ein stetiges ist oder aus einer endlichen Anzahl stetiger Systeme besteht.

5. Selbstverständlich entsprechen auch dem unteren Doppelintegral zwei Grenzwerthe. Wir erhalten sie, indem wir in der Formel (I) an Stelle der oberen Grenze g_r $(r = 1, 2, \ldots n)$ die untere Grenze k_r der Werthe von $f(x, y)$ für die im Vielecke τ_r vorhandenen Punkte des Systems $\mathfrak{f}$ und in (II) an Stelle von g'_r $(r = 1, 2, \ldots n')$ die untere Grenze k'_r der Werthe von $f(x, y)$ für die im Vielecke τ'_r vorhandenen Punkte dieses Systems setzen.

---

[1] Cours d'Analyse, 2. éd., I, Nr. 24.

[2] Journal de Mathém. 1892, p. 84. Cours d'Analyse, II, p. 34.

6. Die in Nr. 1, 2 und 5 vorgeführten Sätze lassen sich ohne Schwierigkeit auf Punktsysteme im Raume von drei und mehr Dimensionen ausdehnen.

Was den Euklid'schen Raum von drei Dimensionen anlangt, so brauchen wir, da schon das Volum des Tetraëders bloss als Grenzwerth (beziehungsweise als obere oder untere Grenze) einer Prismensumme erklärt werden kann, uns unter $\tau_1 \ldots \tau_n$ lediglich Prismen vorzustellen. Dann tritt an Stelle des in der Note auf S. 456 erwähnten Satzes die Formel für den Inhalt des Körpers der von zwei Prismen-Oberflächen begrenzt wird, welche die eines gegebenen Prismas von aussen und von innen umgeben und davon überall den nämlichen Abstand haben. Aus dem Ausdrucke (34) leitet man ferner unmittelbar den analogen für die Summe aller jener Prismen her, welche mindestens je einen Punkt mit der Begrenzung eines stetigen Punktsystems von drei Dimensionen gemein haben.

Ähnliches gilt für die Punktsysteme in einem Raume von mehr als drei, etwa n Dimensionen. Nur kann man sich darauf beschränken, die τ_r Körper sein zu lassen vom Typus: Gesammtheit aller Punkte $x_1, x_2, \ldots x_n$, deren jede Coordinate x_k alle Werthe eines gegebenen Intervalles $(a_k, a_k + da_k)$ annehmen darf, wobei diesem Körper als Zahl zunächst das Product $da_1 \ldots da_n$ zugeordnet wird.[1] Als erste Anwendung der in Rede stehenden Sätze mögen dann die Inhalte der übrigen Polyeder ermittelt werden, namentlich des von $n+1$ n-dimensionalen Ebenen gebildeten Körpers.

[1] Anstatt des Satzes in der Note auf S. 456 braucht man dann bloss die Entwicklung der Differenz $(da_1+2H) \ldots (da_n+2H) - (da_1-2H) \ldots (da_n-2H)$ nach Potenzen von H.