Über räumliche Poncelet'sche Polygone

Gustav Kohn in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Juni 1897.)

Seitdem Poncelet seinen Hauptsatz über die einem Kegelschnitt eingeschriebenen und gleichzeitig einem zweiten umschriebenen Polygone gegeben hat, ist sein Ergebniss von den verschiedensten Seiten weiter verfolgt und nach den verschiedensten Richtungen hin erweitert und vertieft worden; allein die Existenz völlig analoger räumlicher Polygone scheint, so nahe sie liegt, bisher nicht bemerkt worden zu sein.

In der vorliegenden Note wird die Existenz von einfachen räumlichen n-Ecken dargethan, deren Ecken auf einer kubischen Raumcurve liegen und deren Seitenflächen eine zweite kubische Raumcurve osculiren und es wird gezeigt, dass, sobald $n > 6$ ist, das Vorhandensein eines solchen n-Eckes das Vorhandensein unendlich vieler zu denselben beiden kubischen Raumcurven in der nämlichen Beziehung stehender n-Ecke nach sich zieht.

---

1. Wir schicken unseren Entwicklungen eine kurze Darstellung des bekannten Zusammenhanges voraus, der zwischen der Theorie der Poncelet'schen Polygone und der Theorie gewisser symmetrischer (2, 2)-Correspondenzen besteht.

Eine symmetrische (2, 2)-Correspondenz zwischen den Punkten eines Kegelschnittes C_2 hat als Erzeugniss einen Kegelschnitt Γ^2, der von den Verbindungslinien entsprechender Punkte eingehüllt wird; umgekehrt wird der Kegelschnitt C_2 von den Tangenten eines beliebigen Kegelschnittes seiner Ebene in den Paaren entsprechender Punkte einer symmetrischen (2, 2)-Correspondenz getroffen.

Sind die beiden Kegelschnitte C_2 und Γ^2 in der besonderen Lagenbeziehung, dass es unendlich viele dem ersten eingeschrieben und gleichzeitig dem zweiten umschriebene einfache n-Ecke gibt, so hat die symmetrische (2, 2)-Correspondenz auf C_2 den besonderen Charakter, dass sie die Elemente dieses Trägers in Cyclen ordnet, so zwar, dass je zwei Nachbarelemente eines Cyclus einander vermöge der (2, 2)-Correspondenz entsprechen. Eine solche symmetrische (2, 2)-Correspondenz soll in der Folge als cyclisch von der n^{ten} Ordnung bezeichnet werden. Da die Existenz eines dem Kegelschnitt C_2 eingeschriebenen und dabei dem Kegelschnitt Γ^2 umschriebenen Polygons nach dem Poncelet'schen Hauptsatze die Existenz von unendlich vielen solchen Polygonen nach sich zieht, so können wir sagen: Eine symmetrische (2, 2)-Correspondenz ist cyclisch von der n^{ten} Ordnung, sobald es einen Cyclus von n verschiedenen Elementen auf dem Träger gibt, in welchem je zwei Nachbarelemente einander entsprechen. Einen solchen Cyclus von Elementen wollen wir einen Poncelet'schen Cyclus nennen.

Wird von einer symmetrischen (2, 2)-Correspondenz, die cyclisch von der n^{ten} Ordnung ist, ein Cyclus gegeben, so ist die Correspondenz bestimmt, so wie $n > 4$ ist. Denn es gibt gewiss nicht mehr als einen Kegelschnitt Γ^2, der die Seiten eines dem Kegelschnitt C_2 eingeschriebenen Polygons berührt, sobald die Anzahl der Seiten grösser als 4 ist.

Wenn die Seitenanzahl grösser als 5 ist, so können die Ecken des Polygons auf C_2 nicht mehr beliebig gewählt werden, wenn es möglich sein soll, dem Polygon einen Kegelschnitt Γ^2 einzuschreiben, d. h.: Die Aussage, dass n Elemente eines unicursalen Trägers einen Poncelet'schen Cyclus bilden, besagt die Existenz einer gewissen Relation zwischen den Elementen, sobald ihre Anzahl grösser als 5 ist.

2. Ein einfaches n-Eck, dessen Ecken auf einer kubischen Raumcurve C_3 liegen und auf ihr einen Poncelet'schen Cyclus bilden, soll ein räumliches Poncelet'sches Polygon heissen. Seine Seiten sind die Verbindungslinien von je zwei aufein-

anderfolgenden Punkten, seine Seitenflächen die Verbindungsebenen von je drei aufeinanderfolgenden Punkten des Cyclus.

Ein räumliches Poncelet'sches Polygon hat die folgenden Eigenschaften: Seine Ecken liegen auf einer kubischen Raumcurve, seine Seitenflächen sind Schmiegungsebenen einer zweiten kubischen Raumcurve und seine Seiten gehören einem linearen Complexe (Strahlengewinde) an.

Der Beweis für diese Eigenschaften, soweit sie nicht durch die Definition gegeben sind, liegt in einem Satze von Cayley,[1] welcher besagt, dass die Regelfläche (4. Odg., mit kubischer Doppelcurve), welche von den Verbindungslinien entsprechender Punkte einer symmetrischen (2, 2)-Correspondenz auf einer kubischen Raumcurve gebildet wird, in einem linearen Complexe enthalten ist. Denn die Ecken eines räumlichen Poncelet'schen Polygons bilden der Definition zufolge einen Cyclus einer symmetrischen (2, 2)-Correspondenz auf der kubischen Raumcurve C_3, auf der sie liegen, so dass der Cayley'sche Satz direct aussagt, dass die Seiten des Polygons einem linearen Complex angehören.

Es wird nun aber ferner in dem durch diesen Complex bestimmten Nullsystem jedem Eckpunkte des Polygons die Ebene als Nullebene zugewiesen sein, welche ihn mit den beiden Nachbarecken verbindet, weil die Verbindungslinien mit diesen Ecken Nullstrahlen sind. Da die Ecken des Polygons auf einer kubischen Raumcurve C_3 liegen, so werden die Seitenflächen, als Nullebenen der Eckpunkte, sich der kubischen Raumcurve Γ^3 anschmiegen, welche im Nullsystem der Curve C_3 entspricht.

3. Um jenen Satz über die räumlichen Poncelet'schen Polygone zu beweisen, welcher die Analogie mit den ebenen Poncelet'schen Polygonen zu einer vollständigen macht, benöthigen wir einer Hilfsbetrachtung über zwei kubische Raumcurven C_3 und Γ^3 in solcher Lage, dass es unendlich viele gerade Linien gibt, welche Doppelsecanten für die eine und zugleich Doppelaxen für die zweite sind.

[1] Siehe Salmon-Fiedler, Analyt. Geom. d. Raumes. 3. Aufl., II. Th., S. 436 f.

W. Franz Meyer hat den Satz ausgesprochen,[1] dass zwei solche Raumcurven sich in der bekannten Hurwitz'schen Lagenbeziehung befinden. Dies ist indessen nur einer von den drei Fällen, welche man hier zu unterscheiden hat. Betrachtet man nämlich die symmetrische Correspondenz, welche zwischen zwei Punkten der Curve C_3 besteht, deren Verbindungslinie eine Doppelaxe von Γ^3 ist, so erweist sie sich entweder als (1, 1)- oder als (2, 2)- oder als (3, 3)-Correspondenz, je nachdem die Anzahl der durch einen beliebigen Punkt von C_3 gehenden Doppelsecanten dieser Curve, die Doppelaxen für Γ^3 sind, 1 oder 2 oder 3 beträgt. Jeder von diesen drei Fällen kann, wie wir jetzt zeigen wollen, thatsächlich eintreten.

Im ersten Falle werden die Geraden, welche zu gleicher Zeit Doppelsecanten von C_3 und Doppelaxen von Γ_3 sind, als Verbindungslinien der Paare einer quadratischen Punktinvolution auf C_3 eine Regelschaar zweiter Ordnung bilden. Bei vorgelegter Regelschaar zweiter Ordnung gibt es aber bekanntlich ein ganzes System von kubischen Raumcurven, welche die Geraden der Schaar zu Doppelsecanten haben, und ebenso reciprok ein ganzes System von kubischen Raumcurven, welche diese Geraden zu Doppelaxen haben. Es tritt also der erste Fall thatsächlich ein für zwei Curven C_3 und Γ^3, von denen die erste aus dem ersten, die zweite aus dem zweiten System genommen ist.

Bei der Discussion des zweiten Falles hat man sich gegenwärtig zu halten, dass jede Ebene, welche zwei Doppelaxen einer kubischen Raumcurve enthält, Schmiegungsebene derselben ist. Dies ist aus dem Umstande deutlich, dass die drei durch einen Punkt gehenden Doppelaxen die Schnittlinien von je zwei der drei vom Punkte ausgehenden Schmiegungsebenen sind. Liegt der zweite Fall vor, in welchem durch einen beliebigen Punkt von C_3 zwei Doppelaxen von Γ^3 hindurchgehen, die ihn mit den zwei ihm in einer symmetrischen (2, 2)-Correspondenz auf C_3 entsprechenden Punkten verbinden, so wird die Ebene dieser drei Punkte eine Schmiegungsebene von Γ^3 sein.

---

[1] Apolarität und rationale Curven, S. 315.

Aus dem obcitirten Cayley'schen Satze folgt aber leicht, dass umgekehrt, wenn auf der kubischen Raumcurve C_3 eine symmetrische $(2, 2)$-Correspondenz beliebig angenommen wird, die Ebenen, welche einen variablen Curvenpunkt mit den beiden ihm entsprechenden Punkten verbinden, Schmiegungsebenen einer zweiten kubischen Raumcurve Γ^3 sind, und in solchen zwei Curven C_3 und Γ^3 ist der zweite Fall realisirt.

Wir nehmen endlich an, es liege der dritte Fall vor, wo alle drei Schnittlinien, welche die von einem beliebigen Punkte von C_3 ausgehenden Schmiegungsebenen der Curve Γ^3 paarweise bestimmen, die Curve C_3 nochmals treffen. Ist jetzt die Verbindungslinie der beiden Punkte P und P' von C_3 Schnittlinie von zwei Schmiegungsebenen von Γ^3, von denen die eine auf C_3 noch den dritten Punkt $\mathfrak{Q}$, die andere den dritten Punkt $\mathfrak{Q}'$ ausschneidet, dann wird die dritte Schmiegungsebene, welche neben den Schmiegungsebenen $PP'\mathfrak{Q}$ und $PP'\mathfrak{Q}'$ noch vom Punkte P, beziehungsweise P' aus an die Curve Γ^3 geht, die Ebene $P\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$, beziehungsweise $P'\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ sein, weil sie sowohl auf der Ebene $PP'\mathfrak{Q}$, als auch auf der Ebene $PP'\mathfrak{Q}'$ eine Doppelsecante von C_3 ausschneiden muss. Es gibt hier unendlich viele der Curve C_3 eingeschriebene und der Curve Γ^3 umschriebene Tetraëder, wie $PP'\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}'$ eines ist, und die beiden Curven stehen daher in der Hurwitz'schen Lagenbeziehung.

4. Wir wenden uns zu dem Nachweis, dass jedes Polygon mit mehr als sechs Ecken, das einer kubischen Raumcurve C_3 eingeschrieben und einer zweiten Γ^3 umschrieben ist, ein räumliches Poncelet'sches Polygon ist.

Nehmen wir ein solches Polygon an, so sind seine Seiten als Verbindungslinien aufeinanderfolgender Ecken und als Schnittlinien aufeinanderfolgender Seitenflächen Doppelsecanten der Curve C_3 und Doppelaxen der Curve Γ^3. Für zwei kubische Raumcurven in allgemeiner Lage gibt es bekanntlich 6 Gerade, die Doppelsecanten der einen und zugleich Doppelaxen der anderen sind. Unter der von uns gemachten Voraussetzung, dass das Polygon mehr als 6 Seiten hat, gibt es mehr als 6, also gibt es unendlich viele solche Geraden und wir haben zwei Curven C_3 und Γ^3 in der im letzten Artikel behandelten Lagenbeziehung vor uns.

Es fragt sich nun, welcher von den drei dort unterschiedenen Fällen vorliegt.

Der erste nicht, weil in diesem Falle durch jeden Punkt von C_3 nur eine Gerade geht, die Doppelsecante dieser Curve und zugleich Doppelaxe von Γ^3 ist, in unserem Falle aber durch jeden Polygoneckpunkt zwei solche Gerade gehen. Auch der dritte Fall kann nicht vorliegen. Denn hier sind die Geraden, welche Doppelsecanten von C_3 und zugleich Doppelaxen von Γ^3 sind, die Kanten der unendlich vielen Tetraëder, welche der ersten von diesen zwei Raumcurven dritter Ordnung eingeschrieben und zugleich der zweiten umschrieben sind. Da nun jeder Punkt von C_3 Eckpunkt für ein einziges von diesen Tetraëdern ist, so kann ein der Curve C_3 eingeschriebenes Polygon, dessen Seiten Doppelaxen von Γ^3 sind, nicht mehr als vier Ecken haben.

Es liegt also der zweite Fall vor, d. h. es gibt unendlich viele Gerade, welche Sehnen von C_3 und zugleich Doppelaxen von Γ^3 sind, und diese Geraden ergeben sich als Verbindungslinien entsprechender Punkte einer gewissen symmetrischen (2, 2)-Correspondenz auf der Curve C_3. Diese Correspondenz ist cyclisch von der n^{ten} Ordnung, denn in den n Ecken des von uns vorausgesetzen Polygons haben wir einen Cyclus der Correspondenz. Durch diese cyclische Correspondenz werden nun die Punkte der Curve C_3 in Cyclen von n Punkten angeordnet und jeder solche Cyclus stellt die Ecken eines Poncelet'schen Polygons dar, dessen Seitenflächen Schmiegungsebenen der Curve Γ^3 sind, da jede derselben einen Punkt von C_3 mit den beiden ihm vermöge der symmetrischen (2, 2)-Correspondenz entsprechenden Punkten verbindet.

Wir finden:

Stehen zwei kubische Raumcurven in einer solchen Lagenbeziehung, dass es ein einfaches Polygon mit mehr als sechs Ecken gibt, das der einen Curve eingeschrieben und zugleich der zweiten umschrieben ist, so gibt es unendlich viele solche Polygone.

Diesen Satz könnten wir noch dahin ergänzen, dass die Seiten aller dieser Polygone einem linearen Complexe angehören und dass sie eine Regelfläche vierter Ordnung bilden, welche die erste von den beiden kubischen Raumcurven zur Doppelcurve und die Developpable der zweiten zur doppelt umschriebenen Developpablen hat.

Diese Ergänzung ergibt sich aus dem obcitirten Cayley'schen Satze.
