Über Rotationen im homogenen elektrischen Felde

Dr. **Egon R. v. Schweidler.**

In der Abhandlung: »Über die Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche bewegter Leiter« behandelt H. Hertz[1] auch den Fall, dass eine leitende Kugel im elektrischen Felde um einen zur Feldrichtung senkrechten Durchmesser gleichförmig rotirt. Die Vertheilung der Elektricität auf der Oberfläche ist eine derartige, dass im Innern der Kugel stationäre Leitungsströme erzeugt werden, die durch Convectionsströme in der Oberfläche geschlossen werden; entsprechend der dabei erzeugten Joule'schen Wärme tritt ein der Rotation entgegenwirkendes Drehungsmoment auf.

Hertz hat auch gezeigt, dass diese Dämpfung bei den praktisch erreichbaren Rotationsgeschwindigkeiten nur an ziemlich schlechten Leitern (Glas, Petroleum etc.) merklich werden kann.

Herr Heydweiller[2] macht nun darauf aufmerksam, dass dieses Problem sich auch verallgemeinern, respective umkehren lasse; ist nämlich eine rotirende nichtleitende Kugel von einer leitenden Flüssigkeit umgeben, die in Folge des künstlich aufrecht erhaltenen Feldes stationär durchströmt wird, so müssen an der Kugeloberfläche ebenfalls Belegungen auftreten, die durch die Rotation mitgeführt werden; nur haben in diesem Falle die Belegungen das umgekehrte Vorzeichen, und das Drehungsmonument der elektrischen Kräfte wirkt im Sinne der Rotation.

---

[1] H. Hertz, Wied. Ann. 13, S. 266 (1881), auch Ges. Werke, Bd. I, Nr. 3.

[2] A. Heydweiller, Verh. der phys. Ges. zu Berlin, Jahrg. 16, Heft 3.

Die qualitative Übereinstimmung dieses Falles mit den von Herrn Quincke[1] beschriebenen Erscheinungen führt Herrn Heydweiller zur Ansicht, dass wenigstens ein grosser Theil der Quincke'schen Versuche durch das Auftreten derartiger Drehungsmomente zu erklären sei.

Zur Untersuchung der Frage, ob diese Auffassung auch in quantitativer Beziehung ausreicht, soll im Folgenden ein möglichst einfacher Fall genauer behandelt und die Grössenordnung der zu erwartenden ponderomotorischen Kräfte numerisch berechnet werden.

Eine Kugel vom Radius R befinde sich im Ursprung eines fixen Coordinatensystemes und rotire um die Z-Axe im Sinne des Uhrzeigers mit der constanten Winkelgeschwindigkeit $\frac{2\pi}{\tau}$; die Kugel habe die Leitungsfähigkeit λ_i und sei umgeben von einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit von der Leitungsfähigkeit λ_a.

λ_i, λ_a sowie alle weiterhin vorkommenden elektrischen Grössen sollen im elektrostatischen Maasssysteme gemessen werden.

Es seien nun ferner elektrostatische Kräfte gegeben, die bei Abwesenheit der rotirenden Kugel in der Flüssigkeit ein elektrisches Feld erzeugen würden, dessen Potential Φ in der Zeit constant sei.

Durch die rotirende Kugel wird das Feld gestört; es stellt sich ein stationärer Zustand her, bei dem das Potential $\psi = \Phi + \varphi$ sei; φ bedeutet also das Potential, welches von den auf der Kugel inducirten Ladungen herrührt.

Bei Benützung von Polarcoordination ω, ϑ, wobei

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cos\omega \sin\vartheta \\
y &= \rho \sin\omega \sin\vartheta \\
z &= \rho \cos\vartheta,
\end{aligned}
$$

ergeben sich für das Potential ψ folgende Bedingungsgleichungen:

---

[1] G. Quincke, Wied. Ann. 59, S. 417 (1896).

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{1}$$

für alle Punkte innerhalb und ausserhalb der Kugeloberfläche.

$$\frac{dh}{dt} = -\lambda_i \frac{\partial \psi_i}{\partial \rho} + \lambda_a \frac{\partial \psi_a}{\partial \rho} \tag{2}$$

für die Oberfläche ($\rho = R$).

Hiebei bedeuten ψ_i und ψ_a die analytischen Ausdrücke für das Potential innerhalb, respective ausserhalb, h die Oberflächendichte, $\frac{dh}{dt}$ deren zeitliche Änderung an einem bestimmten Elemente der Kugeloberfläche, so dass also:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial h}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Bezüglich der Ableitung der beiden Bedingungsgleichungen verweise ich auf die ganz analoge Betrachtung von H. Hertz in der oben citirten Abhandlung.

Mit Berücksichtigung, dass

$$h = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \psi_a}{\partial \rho} - \frac{\partial \psi_i}{\partial \rho}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial \rho} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho}\right),$$

ferner dass in unserem speciellen Falle

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{2\pi}{\tau}\frac{\partial h}{\partial \omega},$$

endlich dass $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$, weil ein stationärer Zustand abgewartet wird, erhält die Gleichung (2) die Form:

$$\frac{1}{2\tau}\frac{\partial}{\partial \omega}\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial \rho}\right] = \lambda_a\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial \rho}\right] - \lambda_i\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho}\right]. \tag{2a}$$

Es werde nun vorausgesetzt, dass

$$\Phi = C + \frac{A_1}{R}\rho \cos \omega \sin \vartheta,$$

d. h. das ursprüngliche Feld sei ein homogenes, dessen Feldintensität in die Richtung der negativen X-Axe falle und die Grösse $\frac{A_1}{R}$ habe.

Setzt man nun

$$\varphi_i = \frac{\rho}{R}(A\cos\omega + B\sin\omega)\sin\vartheta$$

$$= \left(\frac{R}{\rho}\right)^2 (A\cos\omega + B\sin\omega)\sin\vartheta,$$

so genügt φ der Bedingung (1) und auch der Gleichung ($2a$), wenn

$$-A\sin\omega + B\cos\omega = \frac{2\tau}{3}\lambda_a\,[A_1\cos\omega - 2A\cos\omega - 2B\sin\omega] -$$

$$-\frac{2\tau}{3}\lambda_i\,[A_1\cos\omega + A\cos\omega + B\sin\omega].$$

Da diese Beziehung für jedes ω bestehen muss, bestimmen sich die Constanten A und B zu:

$$A = \frac{4\tau^2}{9}\,\frac{(\lambda_a - \lambda_i)(2\lambda_a + \lambda_i)}{1 + \frac{4\tau^2}{9}(2\lambda_a + \lambda_i)^2}\,.\,A_1$$

$$B = \frac{2\tau}{3}\,\frac{(\lambda_a - \lambda_i)}{1 + \frac{4\tau^2}{9}(2\lambda_a - \lambda_i)^2}\,.\,A_1.$$

Das Potential φ und somit auch ψ ist dadurch bis auf eine Constante bestimmt. In der Kugel finden Strömungen statt, und zwar in parallelen Geraden senkrecht zur Z-Axe; die Stromdichte ist in allen Punkten der Kugel dieselbe. Setzt man $\lambda_a = 0$, so erhält man als Specialfall den von Hertz behandelten.

Für das Drehungsmoment, welches von den elektrischen Kräften auf die Oberflächenbelegung im Sinne der Rotation ausgeübt wird, ergibt sich:

$$D = -\int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega\, h\left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)_{\rho=R} R^2\sin\vartheta$$

$$= -\frac{3R}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega\,[AB\cos^2\omega - B(A_1 + A)\sin^2\omega +$$

$$+ (B^2 - A\{A_1 + A\})\sin\omega\cos\omega]$$

$$= RA_1B = RA_1^2\,\frac{2\tau}{3}\,\frac{\lambda_a - \lambda_i}{1 + \frac{4\tau^2}{9}(2\lambda_a - \lambda_i)^2}$$

oder wenn die Feldintensität $\frac{A_1}{R} = F$ gesetzt wird

$$D = R^3 F^2 \frac{\lambda_a - \lambda_i}{1 + \frac{4\tau^2}{9}(2\lambda_a + \lambda_i)^2} \frac{2\tau}{3}$$

Das Drehungsmoment ist positiv (im Sinne der Rotation), wenn $\lambda_a > \lambda_i$; negativ (hemmend), wenn $\lambda_i > \lambda_a$, und in complicirter Weise von der Rotationsgeschwindigkeit abhängig. Wird diese Kugel aus einem nichtleitenden Material genommen, also $\lambda_i = 0$ gesetzt, so ist

$$D = R^3 F^2 \frac{6\tau\lambda_a}{9 + 16\tau^2\lambda_a^2}$$

$$D = \frac{1}{4} R^3 F^2 = \text{Maximum für } \tau\lambda_a = \frac{3}{4}$$

Das Drehungsmoment kann also leicht auf eine Grössenordnung von 10 Dyn.-*cm* gebracht werden, wenn man die der Leitfähigkeit der Flüssigkeit entsprechende günstigste Rotationsgeschwindigkeit erreichen kann.

Eine Zusammenstellung von λ und τ für den Maximaleffect gibt in runden Zahlen folgende Tabelle.

Quecksilber	$\lambda = 10^{16}$ sec^{-1}	$\tau = 10^{-16}$ sec
5% H_2SO_4	2.10^{11}	5.10^{-12}
Alkohol, Äthyläther	5.10^5	2.10^{-6}
Schwefelkohlenstoff	3	0·3
Benzol	5.10^{-2}	20
Petroleumäther, Vaselinöl	5.10^{-3}	200

Man erkennt hieraus, dass die von Herrn Heydweiller vermutheten Bewegungsursachen bei den Quincke'schen Erscheinungen nicht nur im richtigen Sinne wirken, sondern in günstigen Fällen auch die vorausgesetzte Grössenordnung erreichen können. Eine directe Anwendung obiger Formel auf das von Quincke angegebene Zahlenmaterial ist nicht möglich, da hier eine gleichförmige Rotation vorausgesetzt ist, thatsächlich aber die Kugeln Torsionssschwingungen ausführten, bei denen neben der periodisch wechselnden Fadentorsion auch noch der Einfluss der Flüssigkeitsreibung ins Spiel kommt. Die Differentialgleichung der Kugelbewegung wäre dann nach den hier entwickelten Anschauungen von der Form:

$$K\frac{d^2\omega}{dt^2}+a^2\omega+b\frac{d\omega}{dt}-\frac{c_1\dfrac{d\omega}{dt}}{1+c_2\left(\dfrac{d\omega}{dt}\right)^2}=0.$$

Ohne diese Gleichung zu integriren, was kaum ausführbar sein dürfte, kann man durch blosse Überlegung erkennen, dass die Bewegung vor und nach der Umkehr der Rotation asymmetrisch ist.

Hat nämlich die Rotation das Zeichen gewechselt, so wird die Winkelgeschwindigkeit rasch zunehmen, da das Torsionsmoment des stark (oft um $100\,\pi$) gedrillten Fadens und das durch die Rotation erweckte elektrische Drehungsmoment zusammenwirken gegen die Reibung; ist aber die Ruhelage überschritten, so wirken Torsionsmoment und Reibung hemmend, die elektrischen Kräfte noch im Sinne der Rotation. Die Winkelgeschwindigkeit wird also in der ersten Hälfte der Bewegung rascher zunehmen, in der zweiten Hälfte langsamer abnehmen, als bei Abwesenheit des elektrischen Feldes.

Hiemit scheint eine Bemerkung Herrn Quincke's (l. c. S. 429) zu stimmen: »Die Drehungen erfolgen gleich nach der Umkehr rasch, werden dann allmälig langsamer, hören auf und wechseln die Richtung, wenn die Torsionskraft des Fadens dem Drehungsmoment der elektrischen Kräfte das Gleichgewicht hält.«

Ich habe es auch versucht, in einzelnen von Herrn Quincke mitgetheilten Fällen das Drehungsmoment zu berechnen unter der Annahme, dass die Bewegung längere Zeit mit der angegebenen mittleren Winkelgeschwindigkeit u erfolgt sei. Für Rotationen in Äther ergeben sich numerische Werthe, die gegenüber der Fadentorsion und der Flüssigkeitsreibung sehr klein sind; in anderen Fällen (z. B. Crownglaskugel in Benzol oder grosse Quarzkugel in Schwefelkohlenstoff) sind die Werthe von der gleichen Grössenordnung.

Ich bin weit entfernt davon, hiemit eine Theorie der Quincke'schen Versuche geben zu wollen; doch zeigt die hier durchgeführte Rechnung, wie ich glaube, dass die hier behandelten Kraftwirkungen in vielen Fällen den Bewegungsvorgang merklich beeinflussen können.

Vorliegende Arbeit ist entstanden im Anschluss an ein Referat, das ich im physikalischen Seminare übernommen hatte, und ich bin dem Leiter desselben, Herrn Hofrath Boltzmann, für seine Anregung und Unterstützung bei der Ausarbeitung zu wärmstem Danke verpflichtet.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: 106_2a

Autor(en)/Author(s): Schweidler Egon Ritter von

Artikel/Article: Über Rotationen im homogenen elektrischen Felde. 526-532