# Über das innere Virial eines elastischen Körpers

von

Dr. **Jos. Finger.**

Von grosser Bedeutung für die mechanische Wärmetheorie ist das Virialtheorem von Clausius. Diesem zufolge[1] ist, wenn $P_x P_y P_z$ die zu drei festen rechtwinkligen Coordinatenaxen parallelen Componenten der auf irgend einen in stationärer Bewegung befindlichen, irgend einem Punktsystem angehörigen materiellen Punkt, dessen Masse $m$, dessen Geschwindigkeit $v$ ist und dessen rechtwinklige Coordinaten $xyz$ sind, einwirkenden Kraft bedeuten und wofern der Mittelwerth einer variablen Grösse durch einen über dieselbe gesetzten wagrechten Strich angedeutet ist,

$$\Sigma \frac{m}{2} \overline{v^2} = -\frac{1}{2} \Sigma (\overline{P_x x + P_y y + P_z z}). \tag{1}$$

Die Summe ist beiderseits auszudehnen über sämmtliche Punkte des Punktsystems.

Der Ausdruck auf der rechten Seite der letzten Gleichung wird nach Clausius das Virial des Systems genannt, so dass das Clausius'sche Theorem (1) einfach lautet: »Die mittlere lebendige Kraft des Systems ist gleich seinem Virial«. Clausius zerlegt das Virial in zwei Theile. Der erste Theil bezieht sich auf die inneren Kräfte, mit welchen die mate-

---

[1] »Über einen auf die Wärme anwendbaren mechanischen Satz von R. Clausius«. Pogg. Annalen, Bd. 141 (1870), S. 124—130 und Sitzungsberichte der Niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zu Bonn (Juni 1870, S. 114). — »Sur une quantité analogue au potential et sur un théorème y relatif«. Comptes-rendus, 1870, p. 1314.

riellen Punkte des Systems einander gegenseitig anziehen oder abstossen und wird nach Clausius als das »innere Virial« des Punktsystems bezeichnet, während den von aussen her auf das System wirkenden äusseren Kräften der zweite Theil, das »äussere Virial« zukommt.

Unter der Annahme, dass die inneren Kräfte $R$ bloss Functionen der Entfernung $r$ derjenigen Massenpunkte sind, die einander mit der Kraft $R = \varphi(r)$ anziehen oder abstossen, und wofern $R = \varphi(r)$ für anziehende Kräfte positiv, für abstossende negativ in Rechnung kommt, ist das innere Virial nach Clausius bestimmt durch

$$\frac{1}{2}\Sigma(\overline{R.r}) = \frac{1}{2}\Sigma[\overline{r.\varphi(r)}], \tag{2}$$

wo die Summe auf sämmtliche Paare je zweier auf einander wirkenden materiellen Punkte des ganzen Systems auszudehnen ist.

Das äussere Virial des Druckes auf die Oberfläche des Körpers ist, wofern der Körper einem gleichförmigen, zur Oberfläche normalen Drucke $p$ ausgesetzt ist, gegeben durch $\frac{3}{2}pV$, wo $V$ das Volum des Körpers bedeutet.

Yvon Villarceau[1] hat im engen Anschluss an den Clausius'schen Virialsatz folgendes Theorem aufgestellt:

$$\Sigma\left(\frac{1}{2}mv^2\right) =$$
$$= \frac{1}{4}\frac{d^2\Sigma(m\rho^2)}{dt^2} + \frac{1}{2}\Sigma[r\varphi(r)] - \frac{1}{2}\Sigma(P_x x + P_y y + P_z z), \tag{3}$$

wo jedoch $P_x P_y P_z$ bloss die Componenten der äusseren Kräfte bedeuten und $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist.[2] Villarceau hat überdies nachgewiesen, dass die Gleichung (3) auch für die relative Bewegung des Körpers in Bezug auf ein fortschreitendes

[1] »Sur un nouveau théorème de Mécanique générale«. Comptes-rendus, tome 75 (1872), p. 232—240.

[2] Bezüglich des Prioritätsstreites zwischen Clausius und Villarceau sei verwiesen auf R. Clausius, »Sur l'équation mécanique, dont découle le théorème du virial« (Comptes-rendus, tome 75, p. 912—916) und Y. Villarceau, »Note concernant un nouveau théorème de Mécanique« (ibidem, p. 990—992).

Axensystem Giltigkeit hat, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt ist.

Das erste Glied der rechten Seite der Gleichung (3), d. i. die zweite nach der Zeit $t$ genommene Ableitung des polaren Trägheitsmomentes $\Sigma(m\rho^2)$ des Systems wurde ausser von Clausius theils allgemein, theils für besondere Fälle besonders in Untersuchung gezogen von Jacobi,[1] Lipschitz,[2] C. Grinwis[3] und C. E. Basevi.[4] Der Mittelwerth dieses zweiten Differentialquotienten kann nach allgemeiner Übereinstimmung bei stationären Bewegungen, wie sie auch Clausius voraussetzt, gleich Null gesetzt werden, so dass dadurch die Gleichung (3) die Form (1) annimmt.

Die letzten Glieder der Gleichung (3), welche das Virial des Systems bestimmen, sind in Bezug auf die verschiedenen Formen, in welchen man dieselben ausdrücken kann, von R. Clausius[5] in Untersuchung gezogen worden.

Eine wichtige Rolle spielt bekanntlich das Virialtheorem in der kinetischen Gastheorie.

In die Elasticitätstheorie hat das Virial meines Wissens bisher nicht Eingang gefunden, und doch bestehen, wie in dieser Abhandlung gezeigt werden soll, für elastische Körper einfache und interessante Beziehungen zwischen dem inneren Virial, den Spannungen und dem elastischen Potential.

## I. Beziehung zwischen dem inneren Virial und den Spannungen.

Unter Virial $I$ sei in der Folge statt des Mittelwerthes von $-\frac{1}{2}\Sigma(P_x x+P_y y+P_z z)$ der wahre Werth dieser Grösse zu einer beliebigen Zeit verstanden.

---

[1] Jacobi, »Vorlesungen über Dynamik«, Berlin, 1866, S. 22—27.

[2] Borchardt's Journal, Bd. 66 (1866), S. 363—374: »Über einen algebraischen Typus der Bedingungen eines bewegten Massensystems«.

[3] C. Grinwis, »Über die vollständige Gleichung des Virials«, Arch. Néerl. Bd. 19 (1884), p. 461—478.

[4] C. E. Basevi, »Clausius' Virialtheorem«. Nat. Bd. 52 (1895), S. 413 und 414.

[5] R. Clausius, »Über verschiedene Formen des Virials«. Poggendorf's Annalen, Jubelband, 1874.

In Folge der vorausgesetzten Deformation des elastischen Körpers erlangen die anfänglichen, vor der Deformation bestehenden Coordinaten $xyz$ eines beliebigen Punktes $m$, welcher durch diese Deformation zur beliebigen Zeit $t$ in die Lage $M$ gelangt, zu dieser Zeit gewisse Werthe $XYZ$. Die zu den Coordinatenaxen parallelen Componenten jener im Punkte $M$ herrschenden Spannung, welche sich auf ein Flächenelement bezieht, das zur Zeit $t$ im deformirten Körper zur $x$-Axe, beziehungsweise $y$-Axe, beziehungsweise $z$-Axe normal ist, seien $(X_x Y_x Z_x)$, beziehungsweise $(X_y Y_y Z_y)$, beziehungsweise $(X_z Y_z Z_z)$. Die Normalspannungen $X_x Y_y Z_z$ seien positiv oder negativ in Rechnung gebracht, je nachdem dieselben Druck- oder Zugspannungen sind. Es sei vorausgesetzt, dass zum mindesten in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes $M$ die Componenten der einwirkenden äusseren Kräfte und die cubische Dichtigkeit stetige Functionen der Punktcoordinaten und der Zeit $t$ sind, so dass auch innerhalb desselben Bereiches die Componenten $X_x Y_y$. der Spannungen als stetige Functionen derselben Veränderlichen angesehen werden können. Unter dieser Voraussetzung ist die Annahme gerechtfertigt, dass die componentale Beschleunigung der Bewegung parallel zu irgend einer Axe innerhalb der ganzen Ausdehnung eines Parallelepipeds, dessen vom Punkte $M$ ausgehende Kanten mit den Coordinatenaxen gleichgerichtet sind und die (positiven) Längen $\Delta X$, $\Delta Y$, $\Delta Z$ haben, dasselbe Qualitätszeichen besitzt, wofern diese Kanten entsprechend klein gewählt sind. Es hat sonach auch $P_x$, d. i. die $X$-Componente der Resultanten sämmtlicher Kräfte, die auf irgend einen innerhalb dieses Parallelepipeds befindlichen materiellen Punkt $(XYZ)$ zur Zeit $t$ einwirken, für alle Punkte dieses Parallelepipeds dasselbe Qualitätszeichen. Es kann demnach die auf alle diese Punkte sich erstreckende Summe $\Sigma\left[-\frac{P_x}{2}\cdot X\right]$, d. i. das auf die $x$-Richtung bezügliche Gesammtvirial gleichgesetzt werden dem Producte aus $-\frac{1}{2}\Sigma P_x$ und irgend einem Mittelwerthe der diesen einzelnen Punkten entsprechenden Abscissen, der offenbar durch $X+\alpha$ bezeichnet werden kann, wo $0<\alpha<\Delta X$

ist. Anderseits ist, wenn $I_x$ den Mittelwerth dieses Virials pro Volumeinheit bedeutet, dieses Virial durch $I_x . \Delta X . \Delta Y . \Delta Z$ ausdrückbar, daher

$$I_x . \Delta X . \Delta Y . \Delta Z = -\frac{1}{2}(X+\alpha) . \Sigma P_x. \qquad (4)$$

Für die zwischen den einzelnen Punkten des Parallelepipeds gegenseitig wirkenden, anziehenden oder abstossenden inneren Kräfte ist $\Sigma P_x = 0$, so dass bei der Bildung von $\Sigma P_x$ bloss die $X$-Componenten der äusseren Kräfte zu summiren sind, nämlich die $X$-Componenten der auf die Massen der einzelnen materiellen Punkte dieses Parallepipeds von aussen einwirkenden Kräfte, deren Mittelwerth pro Volumeinheit $p_x$ sei, ferner die Druckkräfte, welche auf die zur $x$-Axe senkrechten Seitenflächen des Parallelepipeds ausgeübt werden' nämlich

$$\bar{X}_x . \Delta Y . \Delta Z \quad \text{und} \quad -\left(\bar{X}_x + \frac{\Delta_x \bar{X}_x}{\Delta X} . \Delta X\right) . \Delta Y . \Delta Z,$$

ferner die auf die Seitenflächen $\Delta Z . \Delta X$ wirkenden Schubkräfte

$$\bar{X}_y . \Delta Z . \Delta X \quad \text{und} \quad -\left(\bar{X}_y + \frac{\Delta_y \bar{X}_y}{\Delta Y} . \Delta Y\right) . \Delta Z . \Delta X$$

und schliesslich die in den beiden Seitenflächen $\Delta X . \Delta Y$ thätigen Schubkräfte

$$\bar{X}_z . \Delta X . \Delta Y \quad \text{und} \quad \left(-\bar{X}_z + \frac{\Delta_z \bar{X}_z}{\Delta Z} . \Delta Z\right) . \Delta X . \Delta Y$$

(Durch die oberhalb eines Zeichens angebrachten Querstriche sind hier und in der Folge Mittelwerthe innerhalb der betreffenden Fläche angedeutet.)

Demgemäss ist

$$\Sigma P_x = \left(p_x - \frac{\Delta_x \bar{X}_x}{\Delta X} - \frac{\Delta_y \bar{X}_y}{\Delta Y} - \frac{\Delta_z \bar{X}_z}{\Delta Z}\right) . \Delta X . \Delta Y . \Delta Z. \qquad (5)$$

Um nun den auf die Volumeinheit entfallenden Mittelwerth $i_x$ des auf die $x$-Richtung bezüglichen inneren Virials für das in Betracht gezogene Parallelepiped zu bestimmen, hat man zunächst das Virial der auf die innere Masse einwirkenden Kraft $p_x . \Delta X \Delta Y \Delta Z$, welches offenbar in der Form

$$-\frac{1}{2}\, p_x . \Delta X . \Delta Y . \Delta Z (X+\beta),$$

wo $0 < \beta < \Delta X$ ist, ausgedrückt werden kann, und die Viriale der früheren auf die Seitenflächen wirkenden sechs Kräfte, nämlich die Viriale

$$-\frac{1}{2}\, \overline{X_x X} . \Delta Y \Delta Z \text{ und } +\frac{1}{2}\left(\overline{X_x X} + \frac{\Delta_x (\overline{X_x X})}{\Delta X} . \Delta X\right) . \Delta Y \Delta Z,$$

ferner $-\frac{1}{2}\, \overline{X_y X} . \Delta Z \Delta X$ u. s. w. von dem Virial (4) zu subtrahiren und durch das Volum $\Delta X \Delta Y \Delta Z$ des Parallelepipeds zu dividiren, wodurch man nach Einsetzung des Werthes (5) und (4) beim Grenzübergange zu dem Grenzwerthe für $\Delta X = \Delta Y = \Delta Z = 0$, also auch für $\alpha = \beta = 0$ leicht zu folgender einfachen Beziehung gelangt:

$$i_x = -\frac{1}{2}\, X_x . \tag{6}$$

In gleicher Weise sind die auf die $y$- und $z$-Richtung bezüglichen inneren Viriale $i_y$ und $i_z$ pro Volumeinheit $i_y = -\frac{1}{2}\, Y_y$, $i_z = -\frac{1}{2}\, Z_z$, sonach das gesammte innere Virial pro Volumeinheit $i_x + i_y + i_z = -\frac{1}{2}\, (X_x + Y_y + Z_z)$ und das innere Virial $di$ des dem Punkte $M$ unmittelbar benachbarten Körperelementes vom Volum $dV$

$$di = -\frac{1}{2}\, (X_x + Y_y + Z_z) . dV \tag{7}$$

In strengerer Weise können die Gleichungen (6) und (7) etwa folgendermassen abgeleitet werden: Bedeuten $\rho$ die cubische Dichtigkeit und $p_x$ die äussere Kraft pro Volumeinheit im beliebigen Punkte $M$ zur Zeit $t$, so ist

$$\rho \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = p_x - \frac{\partial X_x}{\partial X} - \frac{\partial X_y}{\partial Y} - \frac{\partial X_z}{\partial Z},$$

sonach, wenn $dV$ das dem Punkte $M$ unmittelbar benachbarte unendlich kleine Volumelement zur selben Zeit bedeutet,

$$\int^V X\cdot\frac{\partial^2 X}{dt^2}\rho . dV = \int^V X p_x . dV - \int^V X\cdot\frac{\partial X_x}{\partial X}dV -$$

$$-\int^V X\cdot\frac{\partial X_y}{\partial Y}dV - \int^V X\cdot\frac{\partial X_z}{\partial Z}dV, \qquad (8)$$

wo diese sämmtlichen Volumintegrale ausgedehnt werden können auf ein beliebiges allseits geschlossenes Volum $V$, das innerhalb des elastischen Körpers gelegen ist. Wie früher, sei auch hier vorausgesetzt, dass die hier zu integrirenden Grössen innerhalb des Volums $V$ stetige Functionen der Coordinaten sind.

Nun ist

$$X\frac{\partial X_x}{\partial X} = \frac{\partial(XX_x)}{\partial X} - X_x, \quad X\frac{\partial X_y}{\partial Y} = \frac{\partial(XX_y)}{\partial Y},$$

$$X\frac{\partial X_z}{\partial Z} = \frac{\partial(XX_z)}{\partial Z},$$

sonach, wenn man die letzten drei Raumintegrale der Gleichung (8) in Flächenintegrale verwandelt, die sich über die Flächenelemente $dF$ der Grenzfläche $F$ des Volums $V$ erstrecken,

$$\int^V X\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}\rho dV - \int^V X . p_x dV -$$

$$-\int^F X(X_x \cos x, n + X_y \cos y, n + X_z \cos z, n) dF = \int^V X_x . dV,$$

wo $n$ die nach dem Inneren des Volums $V$ gerichtete Normale des Flächenelementes $dF$ bedeutet. Die in dieser Gleichung innerhalb der Klammern enthaltene Summe stellt die $X$-Componente $X_n$ des auf das Flächenelement $dF$ einwirkenden äusseren Druckes dar, so dass die letzte Gleichung nach ihrer Multiplication mit $-\frac{1}{2}$ die Form annimmt:

$$-\frac{1}{2}\int^{V} X \cdot \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \rho \, dV - \left[ -\frac{1}{2}\int^{V} X . p_x dV - \frac{1}{2}\int^{F} X X_n dF \right] =$$
$$= -\frac{1}{2}\int^{V} X_x dV$$

Da nun das erste Glied dieser Gleichung das auf die $x$-Richtung bezügliche Virial sämmtlicher Kräfte darstellt, welche auf den von der Fläche $F$ eingeschlossenen Körpertheil einwirken, dagegen das innerhalb der eckigen Klammern enthaltene zweite Glied das auf dieselbe Richtung bezogene Virial sämmtlicher äusseren Kräfte ausdrückt, so muss die Differenz dieser beiden Glieder, d. i. $-\frac{1}{2}\int^{V} X_x dV$ dem auf die $x$-Richtung bezogenen Virial der inneren Kräfte gleichen, wodurch die Gleichung (6) also auch (7) nachgewiesen ist.

## II. Beziehung des inneren Virials zum inneren Potential.

Es sei $dv$ das anfängliche, vor der Deformation vorhandene Volum jenes Körperelementes, das zur Zeit $t$ im deformirten Zustande das Volum $dV$ einnimmt. Ferner sei durch $f$ die Potentialfunction der Elasticität bezeichnet, worunter verstanden sein soll eine Function von der Beschaffenheit, dass das dem Zeitelement $dt$ entsprechende Differential $df . dv$ die von den inneren Kräften in diesem Zeitelement geleistete mechanische Arbeit ausdrückt. Das Potential $U$ der inneren Kräfte (das »elastische Potential«) ist dann

$$U = -\int f . dv. \tag{9}$$

Wie früher, sei auch hier stets vorausgesetzt, dass die zur beliebigen Zeit $t$ bestehenden Coordinaten $XYZ$ des Punktes $M$ stetige Functionen der Coordinaten $xyz$ der anfänglichen Lage $m$ dieses Punktes und der Zeit $t$ sind. Dies muss dann auch der Fall sein für die Componenten $\xi = X - x$, $\eta = Y - y$, $\zeta = Z - z$ der stattgefundenen Verschiebung $mM$ dieses Punktes.

Kürze halber seien durch $a_{11} a_{12}$. bezeichnet die Grössen

$$\left.\begin{array}{lll} a_{11}=1+\dfrac{\partial\xi}{\partial x}, & a_{21}=\dfrac{\partial\xi}{\partial y}, & a_{31}=\dfrac{\partial\xi}{\partial z} \\ a_{12}=\dfrac{\partial\eta}{\partial x}, & a_{22}=1+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}, & a_{32}=\dfrac{\partial\eta}{\partial z} \\ a_{13}=\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}, & a_{23}=\dfrac{\partial\zeta}{\partial y} & a_{33}=1+\dfrac{\partial\zeta}{\partial z} \end{array}\right\} \tag{10}$$

Die hier angeführten partiellen Differentialquotienten der Componenten $\xi\eta\zeta$ der Verschiebung $mM$ seien Verschiebungsderivationen genannt. In der allgemeinen Elasticitätstheorie sind von ganz besonderer Wichtigkeit folgende sechs Functionen der Grössen (10)

$$\left.\begin{array}{l} a_x = a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2 \\ a_y = a_{21}^2+a_{22}^2+a_{23}^2 \\ a_z = a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2 \\ b_x = a_{21}a_{31}+a_{22}a_{32}+a_{23}a_{33} \\ b_y = a_{31}a_{11}+a_{32}a_{12}+a_{33}a_{13} \\ b_z = a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}+a_{13}a_{23} \end{array}\right\} \tag{11}$$

Durch diese sechs Functionen $a_x \ldots b_z$ ist nämlich in jedem Falle nicht nur die Deformation eines beliebigen Körperelementes vollkommen bestimmt, sondern es ist auch, wie zuerst George Green[1] gezeigt hat, mag die Deformation welche immer und mag das Körperelement isotrop oder aëolotrop sein, die Potentialfunction $f$ stets nur eine Function dieser sechs Grössen $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$.

Das Verhältniss der Volumelemente $\dfrac{dV}{dv}$ ist durch die Determinante

Green, On the propagation of light in crystallized media (Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1839). — Green, On the laws of reflexion and refraction of light (Transactions of the Cambridge Philosophical Society 1838). — Siehe auch: Mathematical Papers of George Green, edited by N. M. Ferrers (London 1871), p. 249, 296, 297. — Boussinesq, Théorie des ondes liquides périodiques (Mém. prés. à l'Acad. des Sciences, tome XX. Paris 1872, p. 592). — Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy, II. Edit., part II, p. 462 u. s. w.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{dV}{dv}, \tag{12}$$

also die cubische Dilatation in $M$ durch $D-1$ bestimmt.

Für die normalen Spannungen $X_x Y_y Z_z$ bestehen die allgemeinsten Gleichungen:[1]

$$\begin{aligned} D.X_x &= a_{11}\frac{\partial f}{\partial a_{11}} + a_{21}\frac{\partial f}{\partial a_{21}} + a_{31}\frac{\partial f}{\partial a_{31}} \\ D.Y_y &= a_{12}\frac{\partial f}{\partial a_{12}} + a_{22}\frac{\partial f}{\partial a_{22}} + a_{32}\frac{\partial f}{\partial a_{32}} \\ D.Z_z &= a_{13}\frac{\partial f}{\partial a_{13}} + a_{23}\frac{\partial f}{\partial a_{23}} + a_{33}\frac{\partial f}{\partial a_{33}}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in (7) ein und beachtet, dass $\frac{dV}{D} = dv$ ist, so findet man für das Virial $di$ desjenigen Körperelementes, dessen anfängliches Volum $dv$ war, den Werth

$$di = -\frac{1}{2}\Sigma\left(a_{mn}\frac{\partial f}{\partial a_{mn}}\right).dv, \tag{13}$$

wo sich die Summe $\Sigma$ auf alle 9 Grössen (10) erstreckt.

Gewöhnlich wird bekanntlich in der Elasticitätstheorie die Annahme gemacht, dass die Potentialfunction $f$ eine homogene Function der Verschiebungsderivationen $\lambda_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\lambda_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}$ $\lambda_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y}$,.. und zwar vom zweiten Grade ist. Unter dieser Voraussetzung würde zufolge der Werthe (10) und zufolge einer bekannten Eigenschaft homogener Functionen die Gleichung (13) die Form annehmen

$$di = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial \lambda_x} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_y} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_z} + 2f\right].dv,$$

[1] Carl Neumann, Zur Theorie der Elasticität (Borchardt's Journal für reine und angewandte Mathematik, 1860, S. 281—318). — Boussinesq, Théorie des ondes etc. (Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris 1872). — Finger, Das Potential der inneren Kräfte (Diese Sitzungsberichte, Bd. CIII, 1894, S. 174.

demnach der Unterschied zwischen dem inneren Virial $di$ und dem inneren Potential $dU = -f.dv$ gegeben sein durch

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial \lambda_x}+\frac{\partial f}{\partial \lambda_y}+\frac{\partial f}{\partial \lambda_z}\right].dv.$$

Selbst wenn auch nicht von der obigen, nur unter beschränkenden Voraussetzungen giltigen Annahme ausgegangen wird, so bestehen — und zwar auch für aëolotrope Substanzen — zwischen dem inneren Virial und Potential einfache Beziehungen.

Es lässt sich nämlich die von der Wahl der drei orthogonalen Axenrichtungen $xyz$ unabhängige Summe der Normalspannungen $X_x Y_y Z_z$, die der Summe der demselben Punkte $M$ zugehörigen Hauptspannungen $S_1 S_2 S_3$ gleich ist, auch folgendermassen ausdrücken:[1]

$$X_x+Y_y+Z_z = S_1+S_2+S_3 =$$
$$= \frac{2}{D}\left[a_x\frac{\partial f}{\partial a_x}+a_y\frac{\partial f}{\partial a_y}+a_z\frac{\partial f}{\partial a_z}+b_x\frac{\partial f}{\partial b_x}+b_y\frac{\partial f}{\partial b_y}+b_z\frac{\partial f}{\partial b_z}\right]. \quad (14)$$

Sind nun $abc$ die reciproken Werthe der Halbaxen des Ellipsoids

$$a_x x^2+a_y y^2+a_z z^2+2b_x yz+2b_y zx+2b_z xy = 1, \qquad (15)$$

d. i. jenes Ellipsoids, das anfänglich (vor der betrachteten Deformation) alle jene Punkte in sich enthält, die zur Zeit $t$ in einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkte 0 und dem Halbmesser 1 liegen, und sind $(\alpha_x\alpha_y\alpha_z)$, $(\beta_x\beta_y\beta_z)$, $(\gamma_x\gamma_y\gamma_z)$ die Richtungscosinus dieser Halbaxen $\frac{1}{a}$ $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, so ist

$$\left.\begin{aligned}
a_x &= a^2\alpha_x^2+b^2\beta_x^2+c^2\gamma_x^2\\
a_y &= a^2\alpha_y^2+b^2\beta_y^2+c^2\gamma_y^2\\
a_z &= a^2\alpha_z^2+b^2\beta_z^2+c^2\gamma_z^2\\
b_x &= a^2\alpha_y\alpha_z+b^2\beta_y\beta_z+c^2\gamma_y\gamma_z\\
b_y &= a^2\alpha_z\alpha_x+b^2\beta_z\beta_x+c^2\gamma_z\gamma_x\\
b_z &= a^2\alpha_x\alpha_y+b^2\beta_x\beta_y+c^2\gamma_x\gamma_y
\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

[1] Finger, »Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aëolotropen und isotropen Substanzen«. Diese Sitzungsberichte, Bd. CIII, 1894, S. 1082 und 1083.

Die Axen dieses Ellipsoids (15) sind bekanntlich die Deformationshauptaxen in ihrer anfänglichen Lage und die linearen Dilatationen $\lambda_a \lambda_b \lambda_c$ in der Richtung dieser Axen sind die Hauptdilatationen; demgemäss ist

$$\left.\begin{aligned} a &= 1+\lambda_a \\ b &= 1+\lambda_b \\ c &= 1+\lambda_c \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Da die Potentialfunction $f$ eine Function der sechs Grössen $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ ist und diese letzteren Grössen mittelst der Gleichungen (16) stets durch $abc$ und irgend welche drei Grössen, welche die Axenrichtungen des Ellipsoids (15), also auch die Richtungscosinus $\alpha_x \beta_x$. zu ermitteln gestatten, ausgedrückt werden können, so kann die Potentialfunction $f$ auch als eine Function von $abc$ und der letztgenannten drei Richtungsgrössen betrachtet werden. Dann ist aber den Gleichungen (6) zufolge

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \left[\frac{\partial f}{\partial a_x} . \alpha_x^2 + \frac{\partial f}{\partial a_y} . \alpha_y^2 + \frac{\partial f}{\partial a_z} . \alpha_z^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial b_x} . \alpha_y \alpha_z + \frac{\partial f}{\partial b_y} . \alpha_z \alpha_x + \frac{\partial f}{\partial b_z} . \alpha_x \alpha_y \right] 2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \left[\frac{\partial f}{\partial a_x} . \beta_x^2 + \frac{\partial f}{\partial a_y} . \beta_y^2 + \frac{\partial f}{\partial a_z} . \beta_z^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial b_x} . \beta_y \beta_z + \frac{\partial f}{\partial b_y} . \beta_z \beta_x + \frac{\partial f}{\partial b_z} . \beta_x \beta_y \right] . 2b$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \left[\frac{\partial f}{\partial a_x} . \gamma_x^2 + \frac{\partial f}{\partial a_y} . \gamma_y^2 + \frac{\partial f}{\partial a_z} . \gamma_z^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial f}{\partial b_x} . \gamma_y \gamma_z + \frac{\partial f}{\partial b_y} . \gamma_z \gamma_x + \frac{\partial f}{\partial b_z} . \gamma_x \gamma_y \right] . 2c.$$

Demnach findet man bei Berücksichtigung von (16)

$$a \frac{\partial f}{\partial a} + b \frac{\partial f}{\partial b} + c \frac{\partial f}{\partial c} =$$
$$= 2 \left[ a_x \frac{\partial f}{\partial a_x} + a_y \frac{\partial f}{\partial a_y} + a_z \frac{\partial f}{\partial a_z} + a_x \frac{\partial f}{\partial b_x} + b_y \frac{\partial f}{\partial b_y} + b_z \frac{\partial f}{\partial b_z} \right].$$

Der Gleichung (14) zufolge ist daher stets

$$X_x + Y_y + Z_z = \frac{1}{D}\left[a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c}\right] \tag{18}$$

oder es ist, wenn mit Zuhilfenahme von (17) die Potentialfunction $f$ als Function der Hauptdilatationen $\lambda_a \lambda_b \lambda_c$ und der oberwähnten drei Richtungsgrössen ausgedrückt ist, zufolge (18)

$$X_x + Y_y + Z_z =$$
$$= \frac{1}{D}\left[\frac{\partial f}{\partial \lambda_a} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_b} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_c} + \lambda_a \frac{\partial f}{\partial \lambda_a} + \lambda_b \frac{\partial f}{\partial \lambda_b} + \lambda_c \frac{\partial f}{\partial \lambda_c}\right]. \tag{19}$$

Durch Einsetzung von (18), beziehungsweise (19) in (7) bei Beachtung von (12) findet man für das innere Virial $di$ des Körperelementes, dessen anfängliches Volum $dv$ war, folgende Werthe:

$$di = -\frac{1}{2}\left[a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c}\right].dv \tag{20}$$

$$di = -\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial \lambda_a} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_b} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_c}\right]\cdot dv -$$
$$-\frac{1}{2}\left[\lambda_a \frac{\partial f}{\partial \lambda_a} + \lambda_b \frac{\partial f}{\partial \lambda_b} + \lambda_c \frac{\partial f}{\partial \lambda_c}\right] dv. \tag{21}$$

Das Virial einer Einzelkraft, deren Angriffspunkt die Coordinaten $xyz$ hätte und deren Potential $U$ wäre, würde $\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z}\right)$ sein. Die Analogie zwischen diesem Ausdruck und dem eben gefundenen Werthe (20) ist in die Augen springend.

Da $a^2 b^2 c^2$ als reciproke Quadrate der Halbaxen des Ellipsoids (15) die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$$

sind, wo

$$\left.\begin{aligned} A &= a^2+b^2+c^2 = a_x + a_y + a_z \\ B &= b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = a_y a_z + a_z a_x + a_x a_y - b_x^2 - b_y^2 - b_z^2 \\ C &= a^2b^2c^2 = a_x a_y a_z - a_x b_x^2 - a_y b_y^2 - a_z b_z^2 + 2 b_x b_y b_z = D^2 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

ist, so können $abc$ auch als einwerthige Functionen von $ABC$, also die Potentialfunction $f$ in jedem Falle als einwerthige Function von $ABC$ und der drei oberwähnten Richtungsgrössen angesehen werden. Unter dieser Voraussetzung ist den letzten Gleichungen (22) zufolge

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \left[\frac{\partial f}{\partial A} + (b^2+c^2)\frac{\partial f}{\partial B} + b^2 c^2 \frac{\partial f}{\partial C}\right] 2a$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \left[\frac{\partial f}{\partial A} + (c^2+a^2)\frac{\partial f}{\partial B} + c^2 a^2 \frac{\partial f}{\partial C}\right] 2b$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \left[\frac{\partial f}{\partial A} + (a^2+b^2)\frac{\partial f}{\partial B} + a^2 b^2 \frac{\partial f}{\partial C}\right] . 2c,$$

sonach

$$a\frac{\partial f}{\partial a} + b\frac{\partial f}{\partial b} + c\frac{\partial f}{\partial c} = 2\left[A\frac{\partial f}{\partial A} + 2B\frac{\partial f}{\partial B} + 3C\frac{\partial f}{\partial C}\right].$$

Es kann sonach der Gleichung (20) gemäss das Virial $di$ auch in folgender Form ausgedrückt werden:

$$di = -\left(A\frac{\partial f}{\partial A} + 2B\frac{\partial f}{\partial B} + 3C\frac{\partial f}{\partial C}\right) dv. \tag{23}$$

Besonders bemerkenswerth ist jener Ausdruck für das innere Virial $di$, der sich ergibt, wenn man die Deformationen jenes Triëders in Betracht zieht, dessen Spitze $M$ ist und dessen in $M$ zusammenstossende Kanten anfänglich (vor der betrachteten Deformation) zu den Coordinatenaxen $xyz$ parallel waren und die Länge 1 hatten.

Durch $R_1 R_2 R_3$ seien die Längen und Lagen dieser Kanten zur Zeit $t$ bezeichnet, so dass die den Richtungen $xyz$ entsprechenden linearen Dilatationen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ für den Punkt $M$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= R_1 - 1 \\ \lambda_2 &= R_2 - 1 \\ \lambda_3 &= R_3 - 1 \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

sind.

Den früheren Gleichungen $X = x+\xi$, $Y = y+\eta$, $Z = z+\zeta$ zufolge ist für irgend einen dem Punkte $M$ unmittelbar benachbarten Punkt, dessen anfängliche Coordinaten $x+dx$, $y+dy$,

$z+dz$ und dessen Coordinaten zur Zeit $t$ nach erfolgter Deformation $X+dX$, $Y+dY$, $Z+dZ$ sind,

$$dX = \left(1+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)dx + \frac{\partial\xi}{\partial y}dy + \frac{\partial\xi}{\partial z}dz = a_{11}dx + a_{21}dy + a_{31}dz$$

$$dY = \frac{\partial\eta}{\partial x}dx + \left(1+\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)dy + \frac{\partial\eta}{\partial z}dz = a_{12}dx + a_{22}dy + a_{32}dz$$

$$dZ = \frac{\partial\zeta}{\partial x}dx + \frac{\partial\zeta}{\partial y}dy + \left(1+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)dz = a_{13}dx + a_{23}dy + a_{33}dz.$$

Die relativen Coordinaten der Endpunkte $M_1 M_2 M_3$ der drei Kanten $R_1 R_2 R_3$ des oberwähnten Triëders in Bezug auf ein durch den Anfangspunkt $M$ dieser Kanten gelegtes, zu $xyz$ paralleles Axensystem besitzen demnach die Werthe

$$(a_{11}a_{12}a_{13}),\ (a_{21}a_{22}a_{23}),\ (a_{31}a_{32}a_{33}),$$

und es ist daher

$$\left.\begin{aligned}
R_1^2 &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = a_x \\
R_2^2 &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = a_y \\
R_3^2 &= a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = a_z \\
R_2 R_3 \cos(R_2 R_3) &= a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = b_x \\
R_3 R_1 \cos(R_3 R_1) &= a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = b_y \\
R_1 R_2 \cos(R_1 R_2) &= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = b_z
\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Da diesen Gleichungen gemäss die Grössen $a_x a_y a_z b_x b_y b_z$ durch die Längen $R_1 R_2 R_3$ der Kanten und entweder durch die drei Kantenwinkel $(R_2 R_3)$, $(R_3 R_1)$, $(R_1 R_2)$ oder durch drei andere die gegenseitige Lage dieser Kanten bestimmende Richtungsgrössen (z. B. die drei Neigungswinkel der Seitenflächen des Triëders $MM_1 M_2 M_3$) bestimmt sind, so kann auch die Potentialfunction $f$ als Function dieser sechs Grössen betrachtet werden. Dann ist aber den Gleichungen (25) gemäss

$$\frac{\partial f}{\partial R_1} = \frac{\partial f}{\partial a_x}.2R_1 + \frac{\partial f}{\partial b_z}.R_2\cos(R_1R_2) + \frac{\partial f}{\partial b_y}.R_3\cos(R_3R_1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_2} = \frac{\partial f}{\partial b_z}.R_1\cos(R_1R_2) + \frac{\partial f}{\partial a_y}.2R_2 + \frac{\partial f}{\partial b_x}.R_3\cos(R_2R_3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial R_3} = \frac{\partial f}{\partial b_y}.R_1\cos(R_3R_1) + \frac{\partial f}{\partial b_x}.R_2\cos(R_2R_3) + \frac{\partial f}{\partial a_z}.2R_3.$$

Es ist sonach

$$R_1 \frac{\partial f}{\partial R_1} + R_2 \frac{\partial f}{\partial R_2} + R_3 \frac{\partial f}{\partial R_3} =$$
$$= 2 \left[ a_x \frac{\partial f}{\partial a_x} + a_y \frac{\partial f}{\partial a_y} + a_z \frac{\partial f}{\partial a_z} + b_x \frac{\partial f}{\partial b_x} + b_y \frac{\partial f}{\partial b_y} + b_z \frac{\partial f}{\partial b_z} \right],$$

daher zufolge (14)

$$X_x + Y_y + Z_z = \frac{1}{D} \left( R_1 \frac{\partial f}{\partial R_1} + R_2 \frac{\partial f}{\partial R_2} + R_3 \frac{\partial f}{\partial R_3} \right). \quad (26)$$

Die Substitution dieses Werthes in die Gleichung (7) führt, da $\frac{dV}{D} = dv$ ist, zu dem einfachen Virialwerthe

$$di = -\frac{1}{2} \left( R_1 \frac{\partial f}{\partial R_1} + R_2 \frac{\partial f}{\partial R_2} + R_3 \frac{\partial f}{\partial R_3} \right). dv. \quad (27)$$

oder wenn schliesslich nach Einsetzung der Werthe $R_1 = 1 + \lambda_1$, $R_2 = 1 + \lambda_2$, $R_3 = 1 + \lambda_3$ die Potentialfunction $f$ als Function der drei linearen Dilatationen $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ längs der drei Axenrichtungen und dreier die gegenseitige Lage der drei Kanten $R_1 R_2 R_3$ des Tetraëders bestimmenden Richtungsgrössen in Rechnung gezogen wird, so wird

$$X_x + Y_y + Z_z =$$
$$= \frac{1}{D} \left[ \frac{df}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_3} + \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} + \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_3} \right] \quad (28)$$

und

$$di = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_3} \right) dv -$$
$$- \frac{1}{2} \left[ \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} + \lambda_3 \frac{\partial f}{\partial \lambda_3} \right]. dv. \quad (29)$$

In der Elasticitätstheorie geht man bisher fast immer von der Annahme aus, dass die Verschiebungsderivationen $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\frac{\partial \xi}{\partial y}$ unendlich klein sind, so dass fast stets Glieder, welche höhere Potenzen dieser Derivationen enthalten, gegenüber Gliedern mit niederen Potenzen vollständig vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung, die leider in gar vielen Fällen durch die Erfahrung nicht gerechtfertigt ist, nehmen, wie dies aus den Gleichungen (10), (11), (12), (24) und (25) sofort zu ersehen ist, die in den letzten Gleichungen angewendeten Variablen, von welchen die Function $f$ abhängig ist, folgende einfache und allgemein als sogenannte »Deformationselemente« zur Anwendung kommende Werthe an:

$$\lambda_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \lambda_x, \quad \lambda_2 = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \lambda_y, \quad \lambda_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \lambda_z,$$

$$D = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}$$

$$\cos(R_2 R_3) = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \cos(R_3 R_1) = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

$$\cos(R_1 R_2) = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Da die hier durchgeführte Untersuchung lediglich von der Annahme der Stetigkeit der hier zur Anwendung kommenden Functionen ausgeht und im Übrigen die Beschaffenheit des in Betracht gezogenen Körpers völlig unbestimmt lässt, so haben alle hier abgeleiteten Gleichungen Giltigkeit für alle, also auch für anisotrope Substanzen, mögen dieselben homogen sein oder mögen sich ihre physikalischen Eigenschaften in continuirlicher Weise von Punkt zu Punkt ändern. In dem besonderen Falle, dass die betrachtete Substanz isotrop ist, hängt der Werth der Potentialfunction $f$ bekanntlich in keiner Weise ab von den Richtungen der Deformationshauptaxen, also auch nicht von den Axenrichtungen des Ellipsoids (15). Es ist demgemäss $f$ bloss eine Function der drei Längen $abc$ oder zufolge (17) der drei Hauptdilatationen $\lambda_a \lambda_b \lambda_c$ oder nach (22) der drei Grössen $ABC$. Es ist demnach auch das innere Virial $di$ einer isotropen Substanz den Gleichungen (20), (21) und (23) zufolge bloss eine Function der drei Grössen $abc$ oder der drei Hauptdilatationen $\lambda_a \lambda_b \lambda_c$ oder der drei Grössen $ABC$.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: 106_2a

Autor(en)/Author(s): Finger Josef

Artikel/Article: Über das innere Virial eines elastischen Körpers. 722-738