

Über den Feuerbach'schen Kreis

Prof. Dr. B. Sporer in Ehingen.

(Mit 4 Textfiguren.)

Seit der Auffindung des Neunpunktekreises des Dreiecks durch Brianchon und Poncelet¹ und der wichtigsten Eigenschaft desselben durch Feuerbach,² wonach er den In- und die Ankreise des Dreiecks berührt, ist der Neunpunktekreis oder der Feuerbach'sche Kreis Gegenstand zahlreicher Untersuchungen geworden.³ Namentlich war es die von Feuerbach aufgefundene Eigenschaft, die den Scharfsinn zahlreicher Geometer herausforderte. Trotz der mannigfaltigen Beweise des Satzes von Feuerbach ist aber doch keiner bekanntgeworden, der befriedigte, auch der von Schröter gegebene nicht.⁴

Die Beweise selbst stützen sich vielfach auf algebraische Beziehungen am Dreieck und sind beinahe durchwegs mehr oder weniger verwickelt, erkünstelt und erzwungen, so dass keiner Gemeingut der mathematischen Welt geworden ist. Es möge deshalb uns gestattet sein, in Folgendem zu zeigen, dass dieser Satz eine einfache Folgerung aus einer Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel ist. Zugleich werden sich dabei eine

Vergl. deren inhaltsreiche Abhandlung über die gleichseitige Hyperbel in Gergonne's Annalen, Bd. 11, 1821.

² Feuerbach, Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks. Nürnberg 1822.

Über die Literatur vergl. Lange, Geschichte des Feuerbach'schen Kreises. Progr. der Friedrichs-Werder'schen Oberrealschule, Berlin, Ostern 1894.

⁴ Journal für Mathematik, Bd. 68, S. 208—234 und Math. Annalen, Bd. VII.

Reihe weiterer merkwürdiger Beziehungen zwischen dem Feuerbach'schen Kreise und dem Dreieck ergeben.

I.

Ist irgend einem Dreieck ABC eine gleichseitige Hyperbel H^2 umschrieben, so geht dieselbe durch den Höhenschnitt H

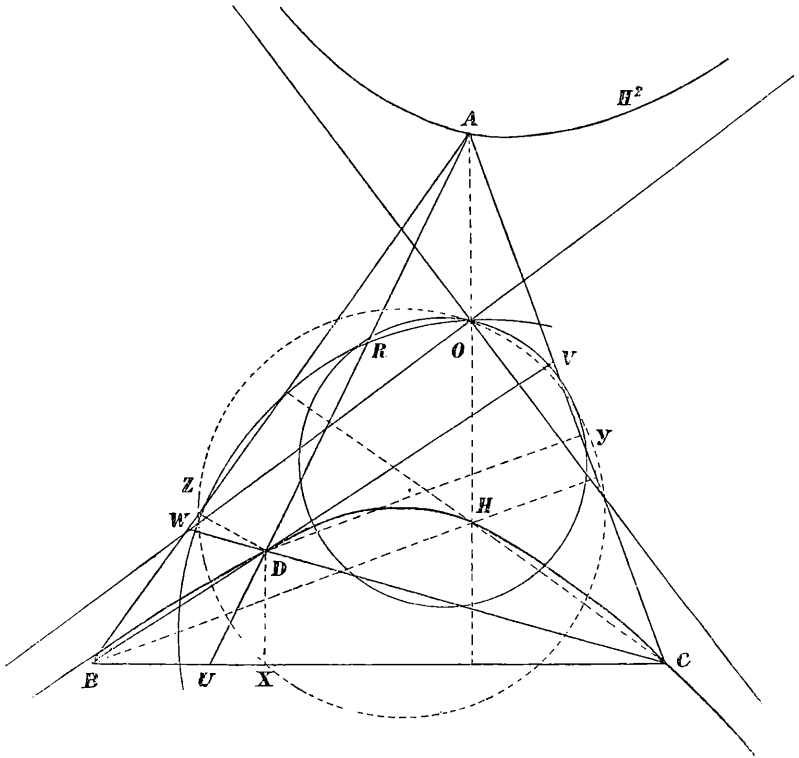


Fig. 1.

des Dreiecks und ihr Mittelpunkt O liegt auf dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks (Fig. 1). Alle einem Dreieck ABC umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln bilden also ein Büschel durch vier Punkte A, B, C, H und durch einen weiteren Punkt D ist eine einzige solche Hyperbel bestimmt. Eine unmittelbare Folge hiervon ist aber die: die vier Feuerbach'schen Kreise der vier Dreiecke

$ABC \quad ABD \quad ACD \quad BCD$

schneiden sich in einem Punkte O , dem Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel, welche dem Viereck $ABCD$ umschrieben ist.

Treffen sich ferner die Gegenseiten des vollständigen Vierecks $ABCD$ in den Punkten U, V, W , so ist das Dreieck UVW ein Polardreieck der Hyperbel H^2 , und da jeder einem solchen Polardreieck umschriebene Kreis durch den Mittelpunkt dieser Hyperbel geht, so geht also auch der durch die Punkte UVW gelegte Kreis durch den Punkt O .¹

Fällen wir weiter etwa von dem Punkte D auf die Seiten des Dreiecks ABC die Lothe DX, DY, DZ und legen durch die Fusspunkte X, Y, Z dieser Lothe einen weiteren Kreis, so geht auch dieser durch den Punkt O . Ist nämlich R die Mitte von AD , so sind über den Seiten des Dreiecks RYZ als Sehnen Kreise beschrieben, nämlich der Kreis durch die Punkte XYZ und die Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke ADB und ADC . Die Peripheriewinkel über den Sehnen ZR und YR in den Feuerbach'schen Kreisen sind aber gleich $ZBD = ZXD$ und gleich $YCD = YXD$, d. h. zusammen so gross als der Winkel ZXY , woraus unmittelbar folgt, dass die Kreise durch einen Punkt gehen, der in diesem Falle nur der Mittelpunkt O von H^2 sein kann. Da nicht nur der Punkt D , sondern auch jeder der übrigen Punkte A, B, C einen solchen Kreis durch O liefert, erhalten wir also im Ganzen neun Kreise durch O .

Das erhaltene Resultat ermöglicht es uns aber, den folgenden Satz auszusprechen:

»Ist irgend einer gleichseitigen Hyperbel H^2 ein beliebiges Dreieck ABC einbeschrieben und fällen wir von einem beliebigen Punkte D der Hyperbel auf die Seiten des Dreiecks ABC die Lothe DX, DY und DZ , so liegen die Fusspunkte dieser Lothe mit dem Mittelpunkte O der Hyperbel auf einem Kreise. Lassen wir also den Punkt D die ganze Hyperbel durchlaufen, so erhalten wir ein System von unendlich vielen Kreisen, die alle durch einen Punkt, den Mittelpunkte O der

¹ Soweit gaben diese Eigenschaften bereits Brianchon und Poncelet in der angezogenen Arbeit. Ausser diesen fünf Kreisen führen dieselben noch drei weitere an, die uns aber hier nicht berühren.

Hyperbel, gehen, also einen festen Punkt auf dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks ABC gemein haben. Der letztere Kreis gehört zudem ebenfalls diesem System von Kreisen an, und zwar entspricht

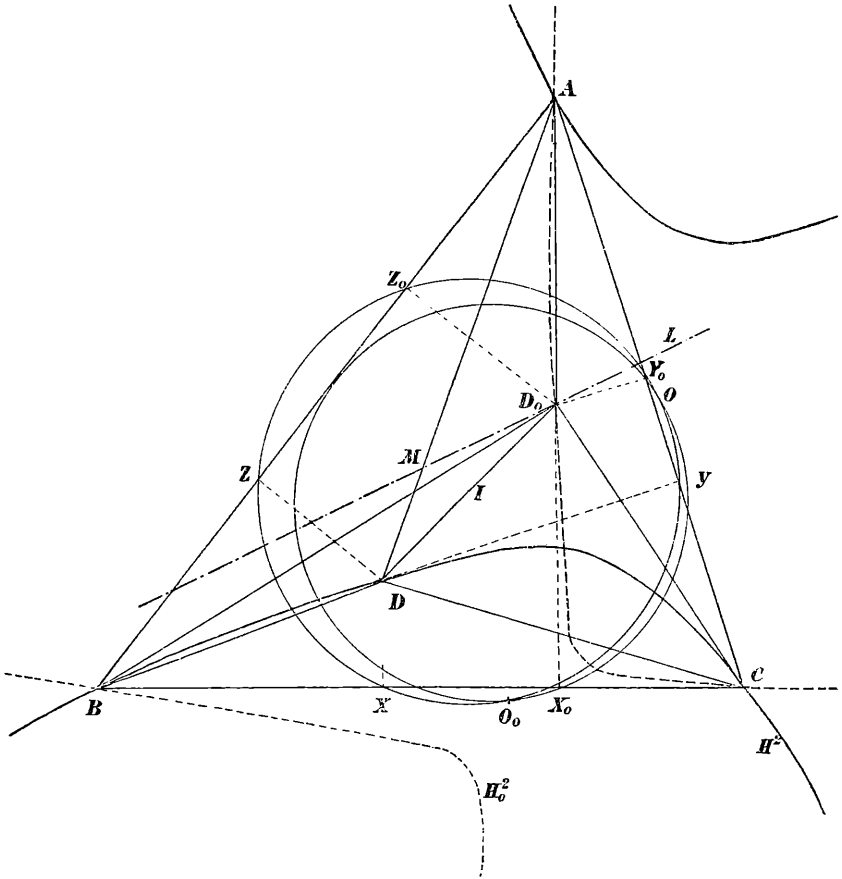


Fig. 2.

er dem Höhenschnitt H des Dreiecks ABC als Punkt D der Hyperbel H^2 .«

II.

Fällen wir von einem Punkt D auf die Seiten des Dreiecks ABC die Lothe DX , DY und DZ und legen durch die

Fusspunkte X, Y, Z dieser Lothe einen Kreis I^2 mit dem Mittelpunkte I (Fig. 2), so schneidet dieser die Seiten noch in den Punkten X_0, Y_0 und Z_0 , und die Lothe in diesen Punkten auf den Seiten treffen sich allemal in einem Punkte D_0 , und zwar ist I die Mitte von DD_0 . Legen wir durch die Punkte D und D_0 die beiden dem Dreieck ABC umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln H^2 und H_0^2 , so müssen die Mittelpunkte O und O_0 derselben sowohl auf dem Kreis I^2 (nach I), als auch auf dem Feuerbach'schen Kreis von ABC liegen, d. h. diese beiden Kreise schneiden sich stets in zwei Punkten, den Mittelpunkten O und O_0 .

Lassen wir aber jetzt X mit X_0, Y mit Y_0 und Z mit Z_0 zusammenfallen, d. h. wählen wir als Punkt D etwa den Mittelpunkt des Inkreises, so fällt D mit D_0, H^2 mit H_0^2 und O mit O_0 zusammen und wir haben:

»Der Inkreis berührt den Feuerbach'schen Kreis im Mittelpunkte derjenigen gleichseitigen Hyperbel, die dem Dreieck ABC umschrieben ist und ausserdem noch durch den Mittelpunkt des Inkreises geht.« Analoges gilt für die Ankreise.

Ausserdem erhalten wir noch unmittelbar aus den Resultaten in I:

»Legen wir durch die Endpunkte der Winkelhalbirenden (d. h. deren Schnitten mit den Gegenseiten) einen Kreis, so geht dieser durch den Berührungspunkt O des Inkreises und des Feuerbach'schen Kreises. Desgleichen gehen durch diesen Punkt O die Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke, die aus zwei Ecken des Dreiecks ABC und dem Mittelpunkte I des Inkreises gebildet werden. Füllen wir ebenso etwa von der Ecke A auf die Seiten des Dreiecks BCI Lothe und legen durch die Fusspunkte dieser Lothe einen Kreis, so geht auch dieser durch O .«

Überhaupt gehört zu jedem Punkte D der gleichseitigen Hyperbel durch ABC , wie wir sahen, ein solcher Kreis durch O . Wir werden aber dieses System von Kreisen noch auf eine andere Art erhalten.

III.

Lassen wir den Punkt D die gleichseitige Hyperbel H^2 durchlaufen, so können wir nach dem Orte des zugehörigen Punktes D_0 fragen (Fig. 2). Die Punkte D und D_0 sind aber auch die Brennpunkte eines Kegelschnittes, der dem Dreieck ABC einbeschrieben ist. Daraus folgt aber, dass z. B. die Geraden AD und AD_0 mit den Seiten AB und AC wechselseitig gleiche Winkel bilden, oder dass die Punkte D und D_0 aus den Ecken A , B und C durch projectivische Büschel projectirt werden. So sind z. B. die Büschel, die die Punkte D_0 aus den Ecken B und C projectiren, projectivisch. Zudem entspricht aber dem Punkte A als Punkt D ein Punkt auf BC , d. h. BC entspricht sich in den beiden Büscheln selbst, die Büschel sind nicht nur projectivisch, sondern auch perspectivisch.

Der Ort des Punktes D_0 ist also eine Gerade L . Lassen wir aber D in den Höhenschnitt H des Dreiecks ABC fallen, so entspricht diesem der Mittelpunkt M des Umkreises des Dreiecks ABC , d. h. wie alle Hyperbeln H^2 den Höhenschnitt gemein haben, so haben alle Geraden L den Punkt M gemein, oder wir haben:

»Ziehen wir durch den Mittelpunkt M des Umkreises des Dreiecks ABC eine beliebige Gerade L , wählen auf dieser Geraden einen beliebigen Punkt D_0 , fällen von diesem auf die Seiten des Dreiecks ABC die Lothe und legen durch deren Fusspunkte X_0, Y_0, Z_0 einen Kreis, so gehen die unendlich vielen Kreise, welche zu den Punkten D_0 der Geraden L gehören, alle durch einen Punkt O_0 auf dem Feuerbach'schen Kreis des Dreiecks ABC «.

Und insbesondere z. B. für den Inkreis:

»Verbinden wir den Mittelpunkt M des Umkreises mit dem Mittelpunkte I des Inkreises eines Dreiecks ABC , fällen von einem beliebigen Punkte dieser Verbindungslinie Lothe auf die Seiten des Dreiecks ABC und legen durch die Fusspunkte dieser Lothe einen Kreis, so geht dieser durch den Berührungspunkt O des Inkreises mit dem Feuerbach'schen Kreise des Dreiecks ABC «.

IV

Die Asymptoten aller gleichseitigen Hyperbeln, die dem Dreieck ABC umschrieben sind, umhüllen eine Curve der dritten Classe und des vierten Grades. Um dieselben zu erhalten, können wir von den Punkten des Umkreises ausgehen und von diesen Lothe auf die Seiten des Dreiecks fallen. Die Fusspunkte dieser Lothe liegen dann auf Geraden G , und zwar bilden allemal die Geraden G , die den Endpunkten eines Durchmessers entsprechen, ein Paar von zusammengehörigen Asymptoten.¹ Unter den unendlich vielen Kreisen, die den Punkten D_0 einer der Geraden L zugeordnet sind, gibt es aber immer drei, die zu Geraden werden. Zwei derselben entsprechen den Schnitten R und R_1 von L mit dem Umkreis (Fig. 3), diese als Punkte D_0 angesehen, und zwar sind diese Asymptoten der Hyperbel H^2 . Die dritte Gerade entspricht dem unendlich fernen Punkte von L als Punkt D_0 . Um diese Gerade zu erhalten, können wir auch von dem vierten Schnitt E der Hyperbel mit dem Umkreis ausgehen, indem dieser der dem letzten Punkte D_0 conjugirte Punkt D ist. Um diesen Punkt E zu erhalten, können wir auf verschiedene Weise verfahren:

1. Wie wir sahen, bilden die Geraden AD und AD_0 mit den Seiten AC und AB wechselweise gleiche Winkel. Die Gerade AD_0 ist aber der Geraden L jetzt parallel, woraus sich die Gerade AD ergibt.

2. Hat irgend ein Kreis mit dem Mittelpunkte M mit einer gleichseitigen Hyperbel mit dem Mittelpunkte O vier Punkte gemein, so ist die Mitte N von OM der Schwerpunkt der vier gemeinsamen Punkte. Um den Punkt E zu erhalten, haben wir also nur den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC mit der Mitte N von OM zu verbinden und auf dieser Verbindungslinie E so zu bestimmen, dass $3SN = NE$ ist.

3. Verbinden wir die Punkte M und O mit den Mitten der Seiten des Vierecks $ABCE$, so sind diese Verbindungslinien

¹ Jacob Steiner, Über eine besondere Curve dritter Classe (und vierten Grades). Ges. Werke, Bd. 2, S. 639—647 oder Journal für Math., Bd. 53, S. 231—237.

paarweise gleich und parallel, indem die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten des Vierecks in dem Punkte N gehäuft werden. Füllen wir also in einem Kreisviereck von den Mitten der sechs Seiten auf die zugehörigen Gegenseiten Lothe, so gehen diese durch den Mittelpunkt O der gleichseitigen Hyperbel durch die Ecken des Vierecks. Sind also

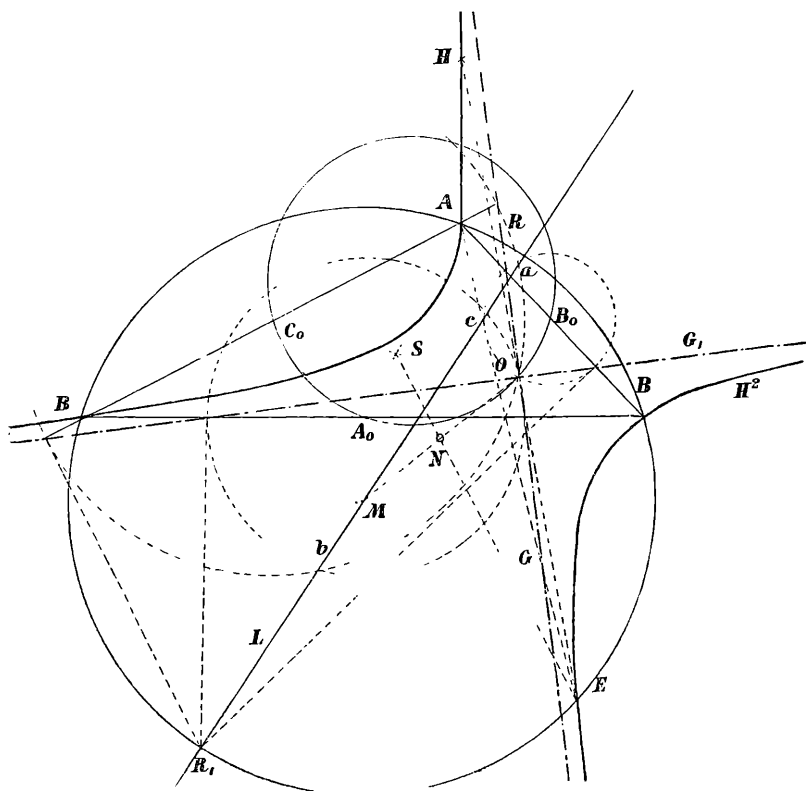


Fig. 3.

A_0, B_0, C_0 die Mitten der Seiten des Dreiecks ABC , so haben wir, um E zu erhalten, nur von den Punkten A, B und C entsprechend auf die Strahlen OA_0, OB_0 und OC_0 Lothe zu fällen, dieselben werden sich dann immer in dem gesuchten Punkte E treffen.

4. Der Höhenschnitt H ist Ähnlichkeitspunkt des Feuerbach'schen Kreises und des Umkreises. Verlängern wir also

HO über O hinaus um sich selbst, so liegt der Endpunkt auf dem Umkreis, und da O auch Mittelpunkt der Hyperbel ist und diese durch H geht, auch auf der Hyperbel, ist also der vierte Schnitt E . Die Fusspunkte der Lothe von E auf die Seiten des Dreiecks ABC liegen dann immer auf der dritten Geraden G durch O .

Aber auch die Asymptoten lassen sich noch auf eine zweite Art construiren. Bedenken wir, dass die Abschnitte einer Secante einer Hyperbel zwischen der Hyperbel und ihren Asymptoten gleich lang sind, so folgt sofort, dass wir die Asymptoten einer Hyperbel H^2 erhalten, wenn wir um die Seitenmitten A_0, B_0 und C_0 mit A_0O, B_0O und C_0O entsprechend Kreise beschreiben. Diese treffen dann die zugehörigen Seiten in denselben Punkten wie die Asymptoten von H^2 .

Da die Mittelpunkte dieser Kreise mit ihrem gemeinsamen Schnitte ferner auf einem Kreise liegen, so schneiden sich diese drei Kreise noch in Punkten a, b und c einer Geraden, nämlich der Leitlinie der Parabel, die O zum Brennpunkte hat und dem Dreieck $A_0B_0C_0$ einbeschrieben ist. Diese Leitlinie geht aber zudem durch den Höhenschnitt des Dreiecks $A_0B_0C_0$, d. h. den Mittelpunkt M ; sie ist mit der Geraden L identisch. Wählen wir nämlich aus den drei Seiten des Dreiecks ABC und den Asymptoten der Hyperbel H^2 je vier Gerade heraus, so erhalten wir fünf Gruppen von vier Geraden, und zu jeder Gruppe gehört eine Parabel, welche diese Geraden berührt, und die Brennpunkte dieser Parabeln liegen auf einem Kreise. Diese Brennpunkte sind aber die Punkte a, b, c, R und R_1 , und da drei derselben auf einer Geraden liegen, so ist dies mit allen der Fall.

Die Geraden Aa, Bb und Cc stehen zudem auf der Geraden L senkrecht, doch wollen wir uns damit begnügen, dies erwähnt zu haben.

V

Die Gerade L schneidet H^2 in zwei Punkten. Diese Punkte sind zugleich Punkte D und D_0 , oder sie bilden ein Paar von zusammengehörigen Punkten D und D_0 . In diesem Falle vereinigte sich aber die Hyperbel H_0^2 mit der Hyperbel H^2 , die

Mittelpunkte O und O_0 derselben fallen also zusammen, und der Kreis I^2 berührt in O den Feuerbach'schen Kreis (Fig. 4). Dies gestattet uns wieder eine Reihe von Folgerungen zu ziehen:

1. »Die Gerade, welche den Mittelpunkt M des Umkreises mit dem Mittelpunkte I des Inkreises verbindet, berührt die besondere Hyperbel H^2 durch

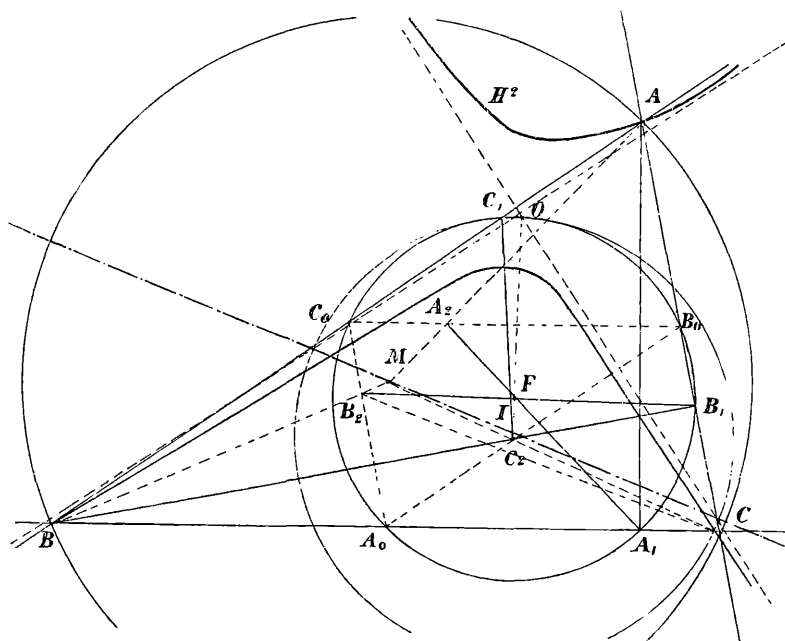


Fig. 4.

den Inkreismittelpunkt. Um die Asymptoten dieser Hyperbel zu erhalten, brauchen wir nur die Schnitte des Inkreises mit der Verbindungsline MI mit dem Berührungspunkte O des Inkreises und des Feuerbach'schen Kreises zu verbinden. Diese Verbindungslinien sind dann allemal diese Asymptoten.« Und da weiter der Ort der Berührungspunkte aller Tangenten von einem festen Punkte P an die Kegelschnitte eines Büschels eine bestimmte Curve des dritten Grades ist und alle obigen gleichseitigen Hyperbeln H^2 ein Büschel bilden, so folgt für

den Punkt M als Punkt P : »In jedem Dreieck liegen folgende zwölf Punkte auf einer Curve des dritten Grades C^3 , nämlich: Die drei Ecken, der Höhenschnitt, die drei Höhenfusspunkte, die vier Mittelpunkte des Inkreises und der Ankreise und der Mittelpunkt des Umkreises und die Geraden von letzterem Punkte nach den Ecken und dem Höhenschnitte sind zugleich Tangenten an diese Curve«.

2. »Geht eine Axe eines Kegelschnittes, der dem Dreieck ABC einbeschrieben ist, durch den Mittelpunkt des Umkreises, so berührt der über dieser Axe als Durchmesser beschriebene Kreis den Feuerbach'schen Kreis. Um den Kegelschnitt selbst zu construiren, wenn die Axe der Lage nach gegeben ist, können wir z. B. wie folgt verfahren: Zunächst construiren wir irgend zwei Fusspunktekreise oder die zur Geraden L gehörigen Geraden G den Berührungspunkt O ; dieser mit dem Mittelpunkte des Feuerbach'schen Kreises verbunden, liefert auf L den Mittelpunkt I des Kreises I^2 und damit den letzteren Kreis selbst, wodurch die Axe selbst bestimmt ist.«

3. Insbesondere folgt:

Lassen wir die Gerade L auf MA fallen, so degenerirt der einbeschriebene Kegelschnitt in diese Gerade; schneidet diese B_0C_0 (vergl. IV) in A_2 , so ist der Kreis I^2 der Kreis um A_2 mit dem Halbmesser AA_2 .

Dieser Kreis muss aber nach Obigem den Feuerbach'schen Kreis berühren, und da er durch den Höhenfusspunkt A_1 geht, so liegen A_1 und A_2 mit dem Mittelpunkte F des Feuerbach'schen Kreises in einer Geraden, oder die Geraden A_1A_2 , B_1B_2 und C_1C_2 schneiden sich in letzterem Mittelpunkte.

VI.

Gehen beide Axen des Kegelschnittes durch den Mittelpunkt M , d. h. beschreiben wir dem Dreieck ABC einen Kegelschnitt C^2 ein, der den Mittelpunkt M des Umkreises zum Mittelpunkte hat, so folgt aus V unmittelbar:

»Der Kegelschnitt C^2 , der dem Dreieck ABC eingeschrieben ist und mit dem Umkreis des Dreiecks den Mittelpunkt gemein hat, ist so beschaffen, dass die beiden Kreise über den Axen desselben als Durchmesser den Feuerbach'schen Kreis berühren, die Summe oder Differenz der Halbaxen des Kegelschnittes ist also gleich dem Durchmesser des Feuerbach'schen Kreises oder aber gleich dem Halbmesser des Umkreises. Diese Halbaxen sind nämlich gleich den Abschnitten des Durchmessers des Feuerbach'schen Kreises, der durch M geht und in die er durch den Punkt M zerlegt wird. Der Kegelschnitt C^2 ist zudem immer eine Ellipse.«¹ Und hieraus wieder:

»Beschreibt man um den Mittelpunkt einer Ellipse mit der Summe oder dem Unterschiede der Halbaxen einen Kreis, so gibt es immer unendlich viele Dreiecke ABC , die alle dem Kreis ein- und der Ellipse umgeschrieben sind. Die Mittelpunkte der Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke ABC und also auch die Schwerpunkte dieser Dreiecke und ebenso die Höhenschnitte derselben liegen auf Kreisen, die zur Ellipse concentrisch sind. Die Feuerbach'schen Kreise berühren zudem die beiden über den Axen der Ellipse als Durchmesser beschriebenen Kreise.«²

In jedem Dreieck ist ferner

$$1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{2} (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma).$$

Bezeichnen wir aber die Seiten des Dreiecks mit a, b, c , die Lothe von M auf diese Seiten mit x, y, z und den Halbmesser des Umkreises mit r , so ist:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{a}{2r}$$

Vergl. auch Steiner, Ges. Werke, Bd. 2, S. 670, 2.

Zu dem gleichen Resultat kommt Steiner, Ges. Werke, Bd. 2, S. 671. Jedoch sollte es dort am Schlusse von III. 2 c heissen: Die den Dreiecken $A_1 B_1 C_1$ umschriebenen Kreise sind gleich, anstatt: Die den Dreiecken ABC etc.

oder

$$1 + \frac{xyz}{r^3} = \frac{1}{8r^2} (a^2 + b^2 + c^2),$$

also:

$$\frac{xyz}{r} = \frac{1}{8} (a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2).$$

Ist weiter H der Höhenschnitt des Dreiecks, so ist auch

$$HM^2 = 9r^2 - (a^2 + b^2 + c^2).$$

Sind aber A und B die Axen der Ellipse C^2 , so folgt für deren Product unmittelbar aus dem Secantensatz:

$$\begin{aligned} AB &= -\frac{1}{4} HM^2 + \frac{1}{4} r^2 = \frac{1}{4} (r^2 - HM^2) \\ &= \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 - 8r^2) \end{aligned}$$

und da $r = A+B$ ist, also

$$\frac{xyz}{r} = \frac{xyz}{A+B} = \frac{1}{2} AB$$

oder

$$xyz = \frac{1}{2} AB(A+B).$$

Hiebei haben wir sämtliche Winkel des Dreiecks als $< 90^\circ$ angesehen. Ist einer der Winkel stumpf, so tritt an Stelle von $A+B$ der Werth $A-B$, und wir finden also:

$$xyz = \frac{1}{2} AB(A \pm B)$$

oder:

»Das Product der Entfernungen des Kreismittelpunktes M von den Seiten der Dreiecke ABC ist constant,¹ und ebenso ist die Quadratsumme der Seiten dieser Dreiecke constant, nämlich gleich dem achtfachen Quadrat des Halbmessers des Umkreises vermehrt oder vermindert um das Product der Axen der

Ellipse, je nachdem alle Winkel des Dreiecks spitz oder aber einer stumpf ist; d. h. es ist:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8r^2 \pm 4AB.$$

Der untere Abschnitt der Höhe eines Dreiecks zur Seite a ist weiter gleich $b \cdot \cot \beta \cdot \cos \gamma = c \cdot \cot \gamma \cdot \cos \beta$. Bezeichnen wir aber die Abstände des Mittelpunktes M von den Seiten des Dreiecks der Seitenmitten $A_0B_0C_0$ des Dreiecks ABC mit x_1, y_1, z_1 , so sind diese halb so gross als die unteren Höhenabschnitte, und wir haben also:

$$\begin{aligned} x_1 y_1 z_1 &= abc \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta \cdot \cot \gamma, \\ &= \frac{abc \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}, \end{aligned}$$

d. h.

$$x_1 y_1 z_1 = \frac{x^2 y^2 z^2}{r^3} = \frac{x^2 y^2 z^2}{(A \pm B)^3}$$

oder

$$x_1 y_1 z_1 = \frac{A^2 B^2}{4(A \pm B)}$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} xyz \cdot x_1 y_1 z_1 &= \frac{1}{8} A^3 B^3 \\ \frac{xyz}{x_1 y_1 z_1} &= \frac{2(A \pm B)^2}{AB}; \end{aligned}$$

oder:

»Ebenso ist auch das Product der Lothe von M auf die Seiten der Dreiecke $A_0B_0C_0$ constant, nämlich $\frac{A^2 B^2}{4(A \pm B)}$ und ausserdem gelten für die beiden Producte dieser Lothe die Gleichungen:

$$xyz \cdot x_1 y_1 z_1 = \frac{1}{8} A^3 B^3 \quad \text{und} \quad \frac{xyz}{x_1 y_1 z_1} = \frac{2(A \pm B)^2}{AB} . 1$$

¹ Steiner, S. 671. Aus diesen Relationen lassen sich wieder andere von Steiner gegebene ableiten. Aus $\frac{xyz}{r} = \frac{1}{2} AB$ erhalten wir zunächst:

$$\frac{ax \cdot by \cdot cz}{abc r} = \frac{1}{2} AB \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta ABM \cdot \Delta AMC \cdot \Delta MBC}{32 \Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.$$

Die angegebene Relation $xyz \cdot x_1 y_1 z_1 = \frac{1}{8} AB$ hätten wir auch direct ableiten können. Ist H der Höhengschnitt, so halbirt der Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises MH , d. h. M und H haben in Bezug auf diesen Kreis gleiche Potenz, oder es ist, da die Abschnitte der einen Höhe gleich $2x$ und $2x_1$ sind,

$$xx_1 = yy_1 = zz_1 = \frac{1}{2} AB,$$

also

$$xyz \cdot x_1 y_1 z_1 = \frac{1}{8} A^3 B^3.$$

Projiciren wir das Dreieck ABC , die Ellipse C^2 und den Umkreis auf eine andere Ebene, so bleibt die letztere Gleichung bestehen, d. h. sie gilt auch für die Projection. Gehen wir von dieser wieder aus, so erhalten wir für eine beliebige, dem Dreieck ABC einbeschriebene Ellipse die Relation:

$$\frac{xyz}{r} = \frac{1}{2} AB$$

oder mit Steiner:

Ist eine Ellipse einem Dreieck ABC einbeschrieben und sind deren Halbaxen A und B , die Entfernungen des Ellipsenmittelpunktes von den Seiten des Dreiecks xyz und r der Halbmesser des Umkreises des Dreiecks, so ist stets das Product dieser Entfernungen constant, nämlich $= \frac{1}{2} r \cdot AB$. (Steiner gibt bei seiner Bezeichnung $\alpha\beta\gamma \cdot r = \frac{1}{2} ab \cdot a_1 b_1$; da jedoch für diesen Fall $r = a = b$, so folgt daraus in Übereinstimmung mit uns $\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2} r \cdot a_1 b_1$.)

Überhaupt lassen sich alle weiteren von Steiner, S. 670—677, angegebenen Formeln durch Projection aus einfachern ableiten.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1897

Band/Volume: [106_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Sporer B.

Artikel/Article: [Über den Feuerbach'schen Kreis. 739-753](#)