Über das Verhalten rotirender Isolatoren im Magnetfeld und eine darauf bezügliche Arbeit A. Campetti's

Dr. **Hans Benndorf.**

Aus dem physikalisch-chemischen Institute der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. November 1897.)

Führt ein Körper unter dem Einfluss äusserer Kräfte in einem Magnetfeld einen mechanischen Kreisprocess aus, d. h. kehrt er nach einer bestimmten Zeit genau wieder in den Anfangszustand zurück, so wird im Allgemeinen von den Kräften eine Arbeit geleistet, die von der Natur des betreffenden Körpers abhängt; im folgenden soll stets vorausgesetzt werden, dass das magnetische Feld constant bleibt und die Bewegung so langsam vor sich geht, dass eine Änderung des ursprünglichen Feldes durch die Bewegung des Körpers vernachlässigt werden kann.

Ist der Körper ein idealer Leiter ohne dielektrische Polarisation, so ist die aufgewandte Arbeit äquivalent der entwickelten Joule'schen Wärme, vermehrt um die durch etwaige magnetische Hysteresis erzeugte Wärmemenge.

Ist der Körper ein ideales Dielektricum ohne jede Leitung, so kann die der aufgewandten Arbeit entsprechende Wärme nur durch magnetische und dielektrische Hysteresis erzeugt sein.

Für einen Körper, der in seinen Eigenschaften zwischen diesen idealen Grenzen liegt, wird die Joule'sche Wärme, sowie die durch magnetische und dielektrische Hysteresis erzeugte Wärme das Äquivalent der aufgewandten Arbeit bilden.

In seiner Arbeit:[1] »Über eine dämpfende Wirkung des magnetischen Feldes auf rotirende Isolatoren« beschreibt Duane ein Dämpfungsphänomen, welches an isolirenden Cylindern auftritt, die in einem magnetischen Felde schwingen, und folgert aus seinen Messungen, dass der der Dämpfung entsprechende Energieverlust weder durch die äusserst geringe Joule'sche Wärme, noch aber durch magnetische Hysteresis von kleinen, dem Isolator vielleicht beigemengten Eisentheilchen erklärt werden könne. Es erscheint nach dem oben Gesagten daher nur folgerichtig, die Dämpfung mit einer elektrischen Hysteresis in Verbindung zu bringen.

Wenn auch über elektrische Hysteresis noch wenig bekannt ist, so liesse sich doch wenigstens die Möglichkeit einer Erklärung der Duane'schen Erscheinungen durch sie erweisen, wenn man zeigen könnte, dass die gesammte in dem dielektrischen Körper durch Induction hervorgerufene Energie von derselben Grössenordnung ist, wie das der Dämpfung entsprechende Energiequantum.

Im vergangenen Frühjahre habe ich einer Anregung Herrn Hofrath L. Boltzmann's folgend die in einer im homogenen magnetischen Felde rotirenden Kugel aus isolirender Substanz erzeugte Energiemenge berechnet und gefunden, dass dieselbe viel zu klein ist, um eine irgend merkliche Dämpfung zu erzeugen.

Dieses negative Resultat zu veröffentlichen, erschien umso unnöthiger, als bald darauf Duane und Stewart in einer zweiten Abhandlung[2] zeigten, dass die Dämpfung des schwingenden Cylinders doch durch magnetische Hysteresis kleinster Eisentheilchen erklärt werden müsse und den diesbezüglichen Irrthum in der ersten Arbeit aufklärten.

Vor Kurzem aber wurde ich auf eine Abhandlung von A. Campetti:[3] »Sul moto di un dielettrico in un campo magnetico« aufmerksam gemacht; in derselben wird zuerst in Anlehnung an J. J. Thomson die Grösse der in einem Dielektricum inducirten Polarisationen berechnet, wenn es in

---

[1] Wied. Annalen, Bd. 58, S. 517 (1896).

[2] Wied. Annalen, Bd. 61, S. 436 (1897).

[3] Atti della R. accademia delle scienze di Torino, vol. XXXII, p. 52.

einem homogenen Magnetfelde rotirt, und zwar für eine Kugel und einen Cylinder. Zum Schlusse rechnet der Verfasser die in einer solchen dielektrischen Kugel aufgespeicherte elektrische Energie aus und kommt zu dem Schlusse, dass dieselbe so gross sei, dass man sehr gut die Duane'schen Phänomene daraus erklären könne. Durch passende Wahl der magnetischen Feldintensität, meint Herr Campetti, kann die elektrische Energie so weit gesteigert werden, dass sie von gleicher Grössenordnung mit der kinetischen Energie der rotirenden Kugel wird. Wie gross aber die Feldintensität gemacht werden muss, damit dieser Fall eintritt, hat entweder der Verfasser ziffernmässig nicht berechnet oder er hat es unterlassen, alle Grössen seiner Formel in demselben Masssystem zu messen.

Die Formel, welche Herr Campetti für die elektrische Energie erhält, stimmt mit der von mir berechneten überein, und nur die Ableitung derselben hat er in strengerer und einwurfsfreier Weise durchgeführt.

Um die Prüfung der in seiner Formel auftretenden Grössen zu ermöglichen, werde ich seine Ableitung mit unwesentlichen Änderungen wiedergeben, da die Originalabhandlung nur schwer zugänglich und durch einige Druckfehler entstellt ist.

Die allgemeinen, von Maxwell aufgestellten Gleichungen für die Componenten der elektromotorischen Kraft, welche in der Zeiteinheit in einem Volumelement eines Körpers inducirt wird, wenn derselbe sich in einem elektromagnetischen Feld bewegt, lauten:

$$X = cv - bw - \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$Y = aw - cu - \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$Z = bu - av - \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

wobei u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten, a, b, c und F, G, H die Componenten der magnetischen Induction, respective des Vectorpotentials sind; ψ ist eine Function, die Maxwell das locale elektrische Potential nennt.

Die magnetische Induction $\mathfrak{B}$ und das Vectorpotential $\mathfrak{A}$ sind durch die Gleichung $\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$ verbunden, daher ist

$$a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \quad b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \quad c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Wenn u, v, w, und $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ gegeben sind, beschränkt sich die Aufgabe auf die Berechnung der Function ψ.

Wir nehmen nun an, eine homogene dielektrische Kugel vom Radius a rotire mit constanter Winkelgeschwindigkeit ω um die X-Axe eines fixen rechtshändigen Coordinatensystems in einem homogenen magnetischen Feld; und zwar soll die Drehung in einem solchen Sinne erfolgen, dass die Geschwindigkeitscomponenten eines Punktes (x, y, z) der Kugel $u = 0$, $v = -\omega z$, $w = \omega y$ werden. Die magnetische Induction falle in die Richtung der positiven Z-Axe und habe die Grösse c.

In unserem Falle ist $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$ und ausserdem empfiehlt es sich, $\psi = (Fu + Gv + Hw) + \varphi$ zu setzen, wie es schon J. J. Thomson thut, weil, wie wir sehen werden, φ dann überall die Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ befriedigt.

Nach dieser Änderung lauten die allgemeinen Gleichungen:

$$\begin{aligned} X &= cv - bw - \frac{\partial}{\partial x}(Fu + Gv + Hw) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ Y &= aw - cu - \frac{\partial}{\partial y}(Fu + Gv + Hw) - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ Z &= bu - av - \frac{\partial}{\partial z}(Fu + Gv + Hw) - \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1}$$

wobei wir in unserer Betrachtung $a = 0$, $b = 0$, $c = c$ und daher $F = -\frac{1}{2} cy$, $G = \frac{1}{2} cx$, $H = 0$ setzen müssen.

Auf der rechten Seite der Gleichung 1) sind dann alle Grössen bis auf φ bekannt; das Problem ist gelöst, wenn die Function φ bestimmt ist.

Setzt man in 1) alle Werthe ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung, dass $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$ ist, die Definitionsgleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ für φ, zu deren Bestimmung noch die

Grenzbedingungen an der Oberfläche der rotirenden Kugel anzugeben sind; sie müssen abgeleitet werden aus der Bedingung, dass die Normalcomponenten der dielektrischen Verschiebung an der Kugelfläche keinen Sprung erleiden.

Die Gleichungen 1) haben nur Giltigkeit, wenn keine Discontinuitäten der Geschwindigkeit auftreten. Um daher in unserem Falle die Grenzbedingung aufstellen zu können, muss man eine Annahme über die Mitbewegung des die Kugel umgebenden Mediums machen; die einfachste und plausibelste, die schon Thomson macht, ist die folgende:

Das die Kugel umgebende Medium werde von derselben so mitgenommen wie eine reibende Flüssigkeit, so dass die Geschwindigkeitscomponenten durch die Ausdrücke $u = 0$, $v = -\left(A\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)+Bz\right)$, $w = A\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)+By$ wiedergegeben werden können; dabei sollen die Constanten A und B so bestimmt werden, dass u, v, w für $r = a$ den Geschwindigkeitscomponenten der rotirenden Kugel, also bezüglich 0, $-\omega z$, ωy und für $r = b$ sämmtlich Null werden.

Man erhält dann

$$u = 0$$

$$v = -Az\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{r^3}\right)$$

$$w = \quad Ay\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{r^3}\right),$$

wobei

$$A = -\omega\frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3}$$

ist.

Es entstehen somit drei Räume, in denen die Geschwindigkeit sich überall continuirlich ändert:

1. Der Raum I eine Kugel vom Radius a, innerhalb dessen

$$u = 0$$

$$v = -\omega z$$

$$w = \omega y$$

2. Der Raum II eine Kugelschale von der Dicke $b-a$ mit den Geschwindigkeiten

$$u = 0$$
$$v = -Az\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$
$$w = \quad Ay\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3}\right)$$

3. Der Raum III ausserhalb der Kugel mit dem Radius b, wo überall

$$u = 0$$
$$v = 0$$
$$w = 0$$

ist.

Entsprechend den drei Räumen erhält man drei Systeme von Gleichungen:

$$X_1 = -\frac{1}{2}\omega cz - \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$Y_1 = \quad - \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$
$$Z_1 = \frac{1}{2}\omega cx - \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

für den Raum I,

$$X_2 = -\frac{1}{2}cAz\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3}\right) - \frac{1}{2}cAxz\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$Y_2 = \quad -\frac{1}{2}cAxz\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial y}$$
$$Z_2 = +\frac{1}{2}cAx\left(\frac{1}{b^3} - \frac{1}{r^3}\right) - \frac{1}{2}cAxz\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

für den Raum II und schliesslich

$$X_3 = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$
$$Y_3 = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$
$$Z_3 = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

für den Raum III.

Wie man sich leicht überzeugt, genügt φ in allen drei Räumen der Gleichung $\nabla^2\varphi = 0$. Zur Bestimmung von φ sind nun noch die Grenzbedingungen an den beiden Kugelflächen aufzustellen. Bezeichnen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ die Dielektricitätsconstanten in den drei Räumen, so lauten die Bedingungsgleichungen:

$$\varkappa_1 \left(X_1 \frac{x}{r} + Y_1 \frac{y}{r} + Z_1 \frac{z}{r}\right)_{r=a} = \varkappa_2 \left(X_2 \frac{x}{r} + Y_2 \frac{y}{r} + Z_2 \frac{z}{r}\right)_{r=a}$$

und

$$\varkappa_2 \left(X_2 \frac{x}{r} + Y_2 \frac{y}{r} + Z_2 \frac{z}{r}\right)_{r=b} = \varkappa_3 \left(X_3 \frac{x}{r} + Y_3 \frac{y}{r} + Z_3 \frac{z}{r}\right)_{r=b}$$

woraus

$$\varkappa_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = \varkappa_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{3}{2} Ac \frac{zx}{r^4}\right)_{r=a}$$

$$\varkappa_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{3}{2} Ac \frac{zx}{r^4}\right)_{r=b} = \varkappa_3 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=b}$$

folgt.

Setzen wir die Kugelflächenfunction zweiten Grades $\frac{xz}{r^2} = V_2$, so ist

$$\varkappa_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = \varkappa_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{3}{2} Ac \frac{V_2}{r^2}\right)_{r=a}$$

und

$$\varkappa_2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{3}{2} Ac \frac{V_2}{r^2}\right)_{r=b} = \varkappa_3 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r=b} \qquad 2)$$

φ kann also als Potential zweier Schichten auf den Kugelflächen mit den Radien a und b angesehen und daher für den Raum I nach positiven Potenzen von r, für den Raum II nach positiven und negativen und für den Raum III nach negativen Potenzen des Radius vector in eine Kugelfunctionsreihe entwickelt werden.

Aus dieser Entwicklung ergeben sich folgende Werthe für φ, wobei eine additive Constante, die nicht weiter interessirt, weggelassen ist.

$$\varphi_1 = L_1 V_2 r^2$$

$$\varphi_2 = L_2 V_2 r^2 + M_2 V_2 \frac{1}{r^3}$$

$$\varphi_3 = L_3 V_2 \frac{1}{r^3}.$$

Die Continuitätsbedingungen für φ und die Gleichungen 2) liefern folgende Relationen zur Constantenbestimmung:

$$L_1 a^2 = L_2 a^2 + \frac{M_2}{a^3}$$

$$L_2 b^2 + \frac{M_2}{b^3} = L_3 \frac{1}{b^3}$$

$$2\varkappa_1 L_1 a = \varkappa_2 \left(2 L_2 a - 3 M_2 \frac{1}{a^4} - \frac{3}{2} A c \frac{1}{a^2}\right)$$

$$\varkappa_2 \left(2 L_2 b - 3 M_2 \frac{1}{b^4} - \frac{3}{2} A c \frac{1}{b^2}\right) = -3 \varkappa_3 L_3 \frac{1}{b^4},$$

woraus sich L_1, L_2, L_3, M_2 bestimmen lassen.

Da uns nur die Vorgänge in der Kugel interessiren, brauchen wir nur L_1; es ist aus obigen Gleichungen:

$$L_1 = \frac{3}{2} \varkappa_2 c\omega \frac{b^3}{b^3 - a^3} \cdot \frac{3\varkappa_3 (b^5 - a^5) - \varkappa_2 (5a^3 b^2 - 2b^5 - 3a^5)}{3\varkappa_2\varkappa_3 (3b^5 + 2a^5) + 2\varkappa_1\varkappa_2 (2b^5 + 3a^5) + 6(\varkappa_1\varkappa_3 + \varkappa_2^2)(b^5 - a^5)}. \qquad 3)$$

Nehmen wir an, dass $b - a$ sehr klein ist, so wird

$$L_1 = \frac{3\varkappa_2\varkappa_3}{6\varkappa_2\varkappa_3 + 4\varkappa_1\varkappa_2} c\omega$$

und für $\varkappa_2 = \varkappa_3 = 1$, wie bei den Duane'schen Versuchen, ist

$$L_1 = \frac{3c\omega}{6 + 4\varkappa_1} = Rc\omega,$$

wo R ein echter Bruch ist.

Herr Campetti nimmt an, dass $\varkappa_2 = 1$ und die Kugel vom Radius b leitend ist; man erhält den Werth für L_1 aus Gleichung 3), indem man $\varkappa_3 = \infty$ setzt.

Es ist für diesen Fall:

$$L_1 = \frac{3}{2}\,\frac{b^3}{b^3-a^3}\,\frac{b^5-a^5}{(3b^5+2a^5)+2\varkappa_1(b^5-a^5)}\,c\omega,$$

und wenn man $b-a$ wieder sehr klein nimmt,

$$L_1 = \frac{1}{3}\,c\omega.$$

In jedem Fall aber ist $L_1 = Rc\omega$, wo R ein echter Bruch ist, der unabhängig von der Wahl der Einheiten ist, in denen die einzelnen Grössen gemessen werden. Es ist daher

$$\varphi_1 = Rc\omega xz$$

und

$$X_1 = -\left(\frac{1}{2}+R\right)cz\omega$$

$$Y_1 = 0$$

$$Z_1 = \left(\frac{1}{2}-R\right)cx\omega,$$

womit das Problem der Induction gelöst ist.

Nachdem X_1, Y_1, Z_1 bestimmt ist, kann man den elektrischen Energie-Inhalt der Kugel berechnen.

Er ist $W = \frac{\varkappa_1}{8\pi}\iiint(X^2+Y^2+Z^2)\,d\tau$, wobei die Integration über den ganzen Kugelraum zu erstrecken ist.

In unserem Falle also

$$W = \frac{\varkappa_1 c^2\omega^2}{8\pi}\iiint\left[\left(\frac{1}{2}+R\right)^2 z^2+\left(\frac{1}{2}-R\right)^2 x^2\right]dx\,dy\,dz =$$

$$= \varkappa_1 c^2\omega^2 a^5\,\frac{1+4R^2}{60},$$

wobei R ein echter Bruch ist.

Die kinetische Energie einer rotirenden Kugel ist, wenn ihre Dichte δ ist, $U = \frac{4}{15}\pi\omega^2 a^5\delta$. Nennt man ω die grösste Geschwindigkeit, die eine schwingende Kugel erreicht, so ist ihre mechanische Energie durch denselben Ausdruck U gegeben, und gleichzeitig ist dann W das Maximum der in ihr inducirten elektrischen Energie.

Herr Campetti meint nun, dass die beiden Grössen U und W durch ein genügend grosses c von der gleichen Grössenordnung gemacht werden könnten, und schliesst daraus, dass die Duane'schen Phänomene sich eventuell durch dielektrische Hysteresis erklären liessen.[1]

Dass dies aber vollständig unmöglich ist, sieht man, wenn man numerische Werthe einsetzt.

Ich nehme an $R = 1$, $c = 10.000$ absolute Einheiten des elektromagnetischen Systems; beide Werthe sind grösser angenommen, als sie bei den Duane'schen Versuchen waren. Ferner sei $\delta = 1$ gesetzt und die Dielektricitätsconstante $\varkappa_1$, wie üblich, im elektrostatischen System gemessen. Ihr Werth im elektromagnetischen System wird dann sein $\frac{\varkappa_1}{v^2} = \frac{\varkappa_1}{9.10^{20}}$ Setzt man diese Werthe in den Ausdruck $\frac{W}{U}$ ein, so ist annähernd $\frac{W}{U} = \frac{\varkappa_1}{9.10^{13}}$ d. h. aber, die elektrische Energie in der Kugel ist einige zehn billionenmal zu klein, um die Zurückführung der Duane'schen Erscheinungen auf dielektrische Hysteresis als möglich erscheinen zu lassen.

---

[1] Herr Campetti gebraucht nicht den Ausdruck »elektrische Hysteresis« aus seinen Ausführungen aber ergibt sich dieser Sinn; er sagt gegen Schluss seiner Abhandlung: ..e dell' energia elletrica prima fornita ne sarà restituita una parte più o meno grande a seconda della natura del dielettrico, potendo per es. una parte trasformarsi in calore.