Zur Frage des Widerstandes, welchen bewegte Körper in Flüssigkeiten und Gasen erfahren

Prof. **G. Jäger.**

(Mit 2 Textfiguren.)

Die durch Stokes mit Rücksicht auf die innere Reibung erweiterten Euler'schen Grundgleichungen der Hydrodynamik lauten, wenn wir von äusseren Kräften absehen, folgendermassen:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t}=\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)-$$

$$-\varkappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\frac{\varkappa}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{2}$$

Dazu kommen noch zwei analoge Gleichungen für $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial p}{\partial z}$. Bekanntlich sind hier u, v, w die Geschwindigkeitscomponenten in der Richtung der Coordinaten x, y, z, p der Druck, ρ die Dichte, $\varkappa$ der Coëfficient der inneren Reibung der Flüssigkeit, t die Zeit. Für eine andere Flüssigkeit seien die Geschwindigkeiten U, V, W, die Coordinaten X, Y, Z, der Druck P, die Dichte R, die Reibungsconstante K, die Zeit T. Setzen wir nun

$$R=r\rho,\ K=k\varkappa,$$

$$U=nu,\ V=nv,\ W=nw,$$

$$X=\frac{k}{rn}x,\ Y=\frac{k}{rn}y,\ Z=\frac{k}{rn}z,$$

$$P=n^2rp+\text{Const.},\ T=\frac{k}{rn^2}t,$$

so erfüllen auch diese Grössen die Gleichungen (1) und (2). Wir können sonach bekannte mögliche Bewegungen einer Flüssigkeit auf eine andere übertragen. Die Constanten r und k sind dabei ohneweiters durch die Natur der Flüssigkeiten bestimmt, streng genommen auch n, da ja die Zustandsgleichung der Flüssigkeit eine Beziehung zwischen p und ρ feststellt. Helmholtz machte in seiner Abhandlung: »Über ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken«[1] auf diese Eigenschaft der hydrodynamischen Gleichungen aufmerksam und erläuterte damit mehrere bekannte Erscheinungen der Hydrodynamik. Helmholtz drückt jedoch die Grösse $\frac{\varkappa}{\rho}$ durch einen einzigen Buchstaben aus und nennt sie die Reibungsconstante. Dadurch werden seine Formeln auch theilweise anders als die unsrigen.

Helmholtz weist ferner darauf hin, dass viele Bewegungen auch in Gasen so verlaufen, dass die dabei auftretenden Compressionen vernachlässigt werden können. Es kann dann die Dichte als unabhängig vom Druck wie bei incompressiblen Flüssigkeiten angenommen und dadurch über die Constante n frei verfügt werden. Bei allen jenen Bewegungen in ausgedehnten Flüssigkeitsmassen, wo sich derjenige Widerstand überwiegend geltend macht, welcher von den Beschleunigungen der Flüssigkeit herrührt, kann man auch von der Reibung absehen, d. h.

$$\varkappa = K = 0$$

setzen und kann somit auch über die Constante k frei verfügen. Auf diese Weise vergleicht Helmholtz die Verhältnisse eines Linienschiffes mit den Erfahrungen, welche Dupuy de Lôme mit seinem langgestreckten lenkbaren Ballon machte.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, dass die von Helmholtz gemachte Anwendung nicht völlig einwurfsfrei ist. Durch die Annahme, dass Dichtenänderungen in der Luft

[1] Monatsber. der königl. Akad. der Wissensch. zu Berlin, Jahrg. 1873 S. 501—514. — Wissensch. Abhandl. I, S. 158—171.

keine Rolle spielen, geht die Gleichung (1) in die für incompressible Flüssigkeiten bekannte Beziehung über:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{3}$$

Der Widerstand, welchen das Linienschiff und der Ballon erfahren, sind bei constanten Geschwindigkeiten gemessen. Dadurch wird in den Gleichungen (2), indem man sich das Coordinatensystem mit dem Schiff, bezüglich Ballon fest verbunden denkt,

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0,$$

und da die innere Reibung vernachlässigt wird, fallen die beiden letzten Glieder weg, so dass nur bleibt

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{4}$$

Denken wir uns eine unendlich ausgedehnte Flüssigkeit, welche sich geradlinig, etwa parallel zur x-Axe mit constanter Geschwindigkeit bewegt, und bringen wir in dieselbe einen festen Körper, der seine Lage nicht verändern soll, so wird dadurch die Flüssigkeitsbewegung gestört. Für die nunmehrige Strömung besteht aber ein Geschwindigkeitspotential φ, mit dessen Benützung wir durch Integration der Gleichung (4)

$$\frac{p}{\rho}+\frac{c^2}{2}=C \tag{5}$$

erhalten, wenn

$$u^2+v^2+w^2=c^2$$

gesetzt wird, während C eine Constante ist. Aus Gleichung (3) ergibt sich

$$\Delta\varphi=0,$$

was uns bekanntlich erlaubt, die Analogie mit einem magnetischen Potential aufzustellen. Darnach würde unser hydrodynamischer Fall ein Analogon für ein unendlich ausgedehntes homogenes magnetisches Feld sein, in welches wir einen festen

Körper von der magnetischen Susceptibilität $-\frac{1}{4\pi}$ bringen. Es würden dann alle magnetischen Inductionslinien um den Körper herumlaufen, so wie im anderen Falle die Strömungslinien.

Wir denken uns nun, die Flüssigkeit ströme in weiter Entfernung vom störenden Körper parallel zur x-Axe eines rechtwinkeligen Coordinatensystems mit der Geschwindigkeit u. Wir bringen in die Flüssigkeit einen symmetrischen Körper, für welchen die (yz)-Ebene eine Symmetrieebene ist. Aus dem Analogon mit einem magnetischen Feld geht dann ohneweiters hervor, dass auch alle Strömungslinien zur (yz)-Ebene symmetrisch sind. Sind nun die Winkel, welche die Normale eines Oberflächenelementes des Körpers mit den drei Axen einschliesst, α, β, γ, so gehören zum symmetrischen Punkt die Winkel $\alpha+\frac{\pi}{2}$, β, γ. Senkrecht zur Oberfläche darf keine Strömung stattfinden, es ist daher für das eine Oberflächenelement

$$u_1 \cos\alpha + v_1 \cos\beta + w_1 \cos\gamma = 0,$$

für das symmetrische hingegen

$$u'_1 \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) + v'_1 \cos\beta + w'_1 \cos\gamma =$$
$$= -u'_1 \cos\alpha + v'_1 \cos\beta + w'_1 \cos\gamma = 0,$$

und man erkennt aus der Symmetrie der Strömungslinien sofort, dass

$$u_1 = u'_1,\; v_1 = -v'_1,\; w_1 = -w'_1,$$

wenn wir mit $u_1 v_1 w_1$ die Geschwindigkeitscomponenten am Oberflächenelement $d\omega_1$, mit $u'_1 v'_1 w'_1$ jene am symmetrisch gelegenen $d\omega'_1$ bezeichnen. Es muss ferner auch

$$d\omega_1 = d\omega'_1$$

sein. Der Druck auf $d\omega_1$ ist nach Gleichung (5)

$$p_1 = C\rho - \frac{\rho c_1^2}{2} = C\rho - \frac{\rho}{2}(u_1^2+v_1^2+w_1^2)$$

und analog auf $d\omega'_1$

$$p'_1 = C\rho - \frac{\rho c'^2_1}{2} = C\rho - \frac{\rho}{2}(u'^2_1 + v'^2_1 + w'^2_1) =$$

$$= C\rho - \frac{\rho}{2}(u^2_1 + v^2_1 + w^2_1).$$

Es ist somit der Druck auf beiden Seiten des symmetrischen Körpers gleich. Parallel zur x-Axe werden sich demnach die Druckkräfte gegenseitig aufheben. Die Gesammtkraft, welche parallel zur x-Axe wirkt, ist gleich Null. Für den ganzen Strömungsvorgang bleibt es sich natürlich gleichgiltig, ob wir uns den Körper ruhend und die Flüssigkeit in Bewegung, oder die Flüssigkeit ruhend, den Körper hingegen mit der entgegengesetzten Geschwindigkeit parallel zur x-Axe bewegt denken. Daraus folgt der wichtige Satz: Ein symmetrischer Körper, der sich senkrecht zur Symmetrieebene mit constanter Geschwindigkeit in einer idealen Flüssigkeit bewegt, erfährt keinen Widerstand.

Dieser Satz lässt sich auf jeden beliebigen Körper, folglich auch auf jede Bewegungsrichtung ausdehnen. Wir können nämlich einen jeden Körper, der sich mit constanter Geschwindigkeit und Richtung in einer idealen Flüssigkeit bewegt, zu einem symmetrischen ergänzen, indem wir ihn mit einem zweiten zu ihm symmetrischen durch eine unendlich dünne, genügend lange Stange, welche die Richtung der Bewegung hat, verbinden. Wir können das Verbindungsstück immer so lang wählen, dass zwischen den beiden symmetrischen Körpern die Flüssigkeit bereits wieder als ruhend gedacht werden kann. Erfährt dann der vorangehende Körper bei der Bewegung einen Widerstand, so muss in Folge der Symmetrie der nachfolgende genau denselben, aber entgegengesetzt gerichteten erleiden, da ja das ganze System nichts Anderes als ein symmetrischer Körper ist, von dem wir bewiesen haben, dass der Gesammtwiderstand gleich Null sein muss. Auf den nachfolgenden Körper würde also, richtiger gesagt, eine Kraft in der Richtung seiner Bewegung wirken. Wäre er also allein vorhanden, so würde er eine immer grössere lebendige Kraft erlangen. Es würde Arbeit aus nichts erzeugt, was ein Widerspruch ist.

Sonach kann sich jeder Körper, ohne einen Widerstand zu erfahren, mit constanter Geschwindigkeit in einer idealen Flüssigkeit bewegen. Nach einem Referat der »Fortschritte der Physik im Jahre 1890« wurde dieser Satz von N. E. Joukovsky in einer mir leider nicht zugänglichen Abhandlung[1] abgeleitet, weshalb es mir angezeigt schien, darzulegen, wie ich zu obigem Resultat gelangte.

Nach alldem können wir nicht ohneweiters die Gleichungen der Hydrodynamik ohne Berücksichtigung der inneren Reibung für geeignet halten, aus dem Widerstand, den ein Körper bei der Bewegung in einer Flüssigkeit erfährt, jenen eines ähnlich situirten zu bestimmen. Dies ist ohne Bedenken nur dann möglich, wenn wir die unverkürzten hydrodynamischen Gleichungen benützen. Allerdings ist dann die praktische Anwendbarkeit eine sehr beschränkte. Beim Vergleich eines Schiffes mit einem Ballon spielt noch eine missliche Rolle die äussere Reibung zwischen der Schiffswand und dem Wasser. Während nämlich beim Ballon die Gleitung an der Ballonwand sicherlich als Null angenommen werden kann, müssen wir sie beim Schiff als ziemlich beträchtlich voraussetzen. Dies verändert die Verhältnisse zu Ungunsten des Ballons. Der Einfluss der äusseren Reibung auf die Geschwindigkeit des Fahrzeuges ist jenen, die dem Ruder- und Segelsport huldigen, sehr wohl bekannt. Man fettet deshalb vor den Wettfahrten jenen Theil des Bootes, der unter dem Wasserspiegel ist, sehr gut ein, was die Geschwindigkeit des Fahrzeuges beträchtlich erhöht. Aus demselben Grunde begreifen wir es auch, wenn F. Nansen auf seinem Wege zum Nordpol vor dem Verlassen des letzten Hafens schreibt: »Die letzte Arbeit, die nun mit der Fram vorgenommen werden musste, war die Reinigung des Schiffes von Muscheln und Wasserpflanzen, um eine möglichst schnelle Fahrt zu erzielen«.[2]

Bezüglich der numerischen Werthe scheint bei Helmholtz' Betrachtung ein Irrthum vorzuliegen. Er erhält nämlich

---

Verhandl. der VIII. Versamml. Naturforscher und Ärzte, phys. Abth., S. 34—39. Petersburg, 1890.

2 In Nacht und Eis. S. 80.

für die von uns $\frac{k}{r}$ genannte Grösse bei der Übertragung der Verhältnisse des Wassers auf jene der Luft den Werth 0·8082, während wir aus dem Reibungscoëfficienten des Wassers 0·0102 (C. G. S.) und jenem der Luft 0·000175 (C. G. S.) und dem Dichtenverhältniss $\frac{1}{773}$ zwischen Luft und Wasser $\frac{k}{r} = 13 \cdot 26$ finden.

Es wäre natürlich verfehlt, aus der widerstandslosen Bewegung eines Körpers in einer idealen Flüssigkeit den Schluss zu ziehen, dass bei einem stationären Zustand nur jene Glieder der Grundgleichungen in Rechnung zu ziehen seien, welche die innere Reibung enthalten. Sind die vorkommenden Geschwindigkeiten sehr klein, so ist dies allerdings gestattet, weil dann Producte von der Form $u\frac{\partial u}{\partial x}$ u. s. w. vernachlässigt werden können. Für incompressible Flüssigkeiten und stationäre Bewegungen bleibt dann von den Gleichungen (1) und (2) nur übrig

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varkappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{\varkappa}{3}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right). \qquad (6)$$

Aber nicht in diesem einzigen Falle können wir die letzte Gleichung für $\frac{\partial p}{\partial x}$ und die zwei analogen für $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial p}{\partial z}$ benützen, sondern ihre Anwendung ist auch bei grösseren Geschwindigkeiten gestattet, falls es nur gelingt, der Flüssigkeit eine derartige Bewegung zu ertheilen, dass ihre Strömungslinien jenen einer idealen Flüssigkeit möglichst nahekommen; denn dann muss sich der Widerstand, welcher von den Beschleunigungen herrührt, ebenfalls der Null nähern. Dies ist der Fall bei möglichst langgestreckten Körpern, wie sie etwa die Figuren 1 und 2 im Längsschnitt zeigen, wenn sie sich in der Richtung ihrer Längsaxe AB bewegen, und wenn gleichzeitig die Gleitung an der Oberfläche sehr gross ist. Das ist die Ursache, weshalb man einem Schiff eine derartige Form gibt. Auf solche Formen werden wir die Gleichungen (6) mit einer gewissen Annäherung an die Wirklichkeit anwenden können.

In diesen Gleichungen kommt die Dichte der Flüssigkeit gar nicht vor. Setzen wir nun wieder

$$K = k\varkappa,$$
$$U = nu,\quad V = nv,\quad W = nw,$$
$$X = mx,\quad Y = my,\quad Z = mz,$$
$$P = \frac{kn}{m} p + C,$$

so erfüllen auch diese Werthe die Gleichungen (6). Darnach wächst der Widerstand, den ein Körper erfährt, proportional

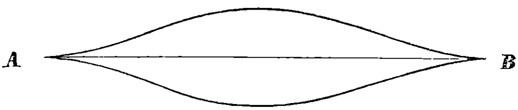

Fig. 1.

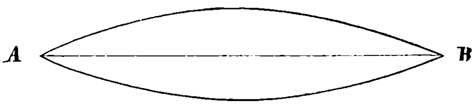

Fig. 2.

der Geschwindigkeit und dem Reibungscoëfficienten. Thatsächlich wenden wir dies in der Physik mit Erfolg an. Bestimmen wir ja das logarithmische Decrement einer gedämpften schwingenden Bewegung immer unter der Voraussetzung eines Widerstandes, der proportional der Geschwindigkeit ist, und die Erfahrung zeigt, dass das selbst bei beträchtlichen Geschwindigkeiten gestattet ist, wenn der sich bewegende Körper nur eine solche Form hat, dass die Strömungslinien der Flüssigkeit sich jenen einer idealen nähern, wie es z. B. bei den linsenförmigen Pendelgewichten der Fall ist.

Wechseln wir die Flüssigkeit, so ändert sich der Widerstand und auch die zur Bewegung nothwendige Arbeit proportional dem Reibungscoëfficienten. Dies können wir auf die Arbeit anwenden, welche zur Fortbewegung einer Last mit Hilfe eines Ballons nothwendig ist. Überlegen wir, dass ein mit Wasserstoff gefüllter Ballon etwa ebensoviel Kilogramm schwer sein kann, als er Cubikmeter enthält, so muss er tausendmal grösser als ein gleich schwerer Körper im Wasser, die linearen Dimensionen müssen also die zehnfachen sein. Wir haben daher beim Übergang von Wasser auf Luft $m = 10$ zu setzen, hingegen $k = 0 \cdot 017$ Bei sonst gleicher Geschwindigkeit hätten wir also beim Transport einer Last durch die Luft nur 0·17 jener Arbeit zu leisten, welche beim Wasserweg aufzuwenden wäre. Nach Helmholtz' Vorgang ist das Verhältniss zwischen diesen beiden Arbeiten 0·13, also ein ganz ähnlicher Werth. Dabei haben wir allerdings wiederum die äussere Reibung als unendlich gross angesehen, was zwischen Wasser und einer getheerten Schiffswand sicherlich nicht der Fall ist, während es beim Ballon wohl zutreffen dürfte. Das spricht aber nur zu Ungunsten des Ballons. Ungünstiger als beim Wasserstoffballon gestalten sich die Verhältnisse des Leuchtgasballons, dessen Tragfähigkeit ja bei Weitem kleiner ist.

Unsere Ausführungen können auch Anwendung auf den Vogelflug finden. Darnach stehen die Chancen des Fliegens bei den grössten Vögeln am besten. Thatsächlich sind die besten Flieger die grossen Raubvögel, der Albatros u. s. w. Diese benützen nämlich zum Flug nicht so sehr ihre Muskelkraft, als vielmehr die Eigenbewegungen der Luft, welche kleine Vögel beim Fliegen meist stören. Hat man ja grosse Segler beobachtet, wie sie stundenlang ihre Kreise zogen, ohne auch nur einen einzigen Flügelschlag zu thun oder sich zu senken, indem sie die beständig wechselnde Windgeschwindigkeit benützten, um sich schwebend zu erhalten. Dazu ist aber erforderlich, dass der sogenannte Stirnwiderstand, d. i. jener, welchen der Vogel beim Vorwärtsfliegen erfährt, möglichst klein wird. Dies wird durch den langgestreckten Körper, ähnlich den Figuren 1 und 2, und die schmalen Flügel erreicht, wobei eine möglichst glatte Oberfläche unerlässliche Bedingung ist, was, wie Herr S. Exner[1] gezeigt hat, dadurch erfüllt ist, dass die Federn durch gegenseitige Reibung elektrisch werden und so fest aneinander haften.

---

[1] Über die elektrischen Eigenschaften der Haare und Federn. Archiv für die gesammte Physiologie. Bd. 61, pp. 427—449 (1895), Abhandl., Bd. 63, pp. 305—316 (1896).