Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Ein Beitrag zur Kugelgeometrie

Von

Josef Lense in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. März 1927)

I.

Wir denken uns die Kugeln des euklidischen R_3 in bekannter Weise auf die Punkte des euklidischen R_4 abgebildet, indem wir der Kugel mit der Gleichung

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2$$

den Punkt mit den Koordinaten $a, b, c, \pm ir$ zuordnen. Den beiden Werten von ir tragen wir dadurch Rechnung, daß wir die Kugel durch Angabe eines Drehungssinnes auf ihrer Oberfläche orientieren. Einer Kugel mit positivem Drehungssinn soll das positive, einer Kugel mit negativem Drehungssinne das negative Zeichen zugeordnet werden.[1] Wir sagen kurz, die Punkte des R_4 sind isotrop auf die orientierten Kugeln des R_3 projiziert. Sollen sich zwei Kugeln mit den Koordinaten (a_1, b_1, c_1, r_1), (a_2, b_2, c_2, r_2) gleichsinnig berühren, so muß

$$(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2+(c_1-c_2)^2 = (r_1-r_2)^2 \tag{1}$$

sein, d. h. die beiden Bildpunkte im R_4 müssen die Entfernung Null haben.

Den Punkten einer Kurve des R_4 entsprechen ∞^1 Kugeln des R_3, deren Mittelpunkte auf einer Kurve liegen (Kugelreihe); sie werden im allgemeinen von einer Röhrenfläche umhüllt. Wir können daher die Röhrenflächen als isotrope Projektionen der Kurven des R_4 auffassen. Wie man sich leicht überlegt, geht die Röhrenfläche im Falle einer Geraden in einen Rotationskegel über, auf dessen Rotationsachse die Mittelpunkte der Kugeln liegen, d. h. einer Geraden des R_4 entsprechen ∞^1 Kugeln, deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen und die von einem Rotationskegel umhüllt werden, dessen Achse mit der Mittelpunktsgeraden zusammenfällt (lineare Kugelreihe).

Einer isotropen Geraden des R_4 entsprechen nach Gleichung (1) ∞^1 Kugeln, die sich in einem Punkte berühren. Einer isotropen Kurve des R_4 entsprechen ∞^1 Kugeln, bei denen jede die benachbarte berührt, d. h. die Schmiegkugeln einer Raumkurve.

---

[1] F. Klein. Vorlesungen über höhere Geometrie. 3. Aufl., p. 246, J. Springer, Berlin, 1926.

Da es im R_4 außer den isotropen Kurven, d. h. den eindimensionalen Gebilden mit dem Bogenelement Null, auch noch zweidimensionale derartige Gebilde, die sogenannten ametrischen Ebenen, gibt,[1] dürfte es von Interesse sein, das isotrope Abbild dieser Mannigfaltigkeiten des R_4 zu studieren.

Im allgemeinen entspricht einer Fläche des R_4 ein System von ∞^2 Kugeln (Kugelkongruenz). Im Falle einer Ebene werden die ∞^2 Kugeln von zwei festen Ebenen berührt (lineare Kugelkongruenz). Dies ergibt sich am einfachsten in folgender Weise: Man erhält den allgemeinen Punkt einer Ebene, indem man die Koordinaten dreier ihrer Punkte A, B, C linear kombiniert, oder was dasselbe ist, indem man die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Geraden AB mit denen eines beliebigen Punktes der Geraden AC linear kombiniert. Bei der isotropen Abbildung hat man daher aus zwei beliebigen Kugeln zweier linearen Kugelreihen, die eine Kugel gemeinsam haben, wieder eine lineare Kugelreihe zu bilden, d. h. man erhält alle Kugeln, welche die beiden Tangentialebenen von drei Kugeln entsprechend berühren.

II.

Wir wollen jetzt die isotrope Projektion einer allgemeinen ametrischen Ebene des R_4 betrachten. x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 seien die homogenen rechtwinkeligen Koordinaten des R_4 ($x_0 = 0$ die Gleichung des uneigentlichen R_3). Bei passender Wahl der Bezeichnung lauten die Gleichungen einer Ebene des R_4:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= Ax_1 + Bx_2 + Cx_0 \\ x_4 &= A'x_1 + B'x_2 + C'x_0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die absolute V_2^2 des R_4 hat die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ x_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Soll die Ebene (2) ametrisch sein, so muß ihre uneigentliche Gerade auf der Fläche (3) liegen, d. h. die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + (Ax_1 + Bx_2)^2 + (A'x_1 + B'x_2)^2 = 0$$

identisch in x_1 und x_2 erfüllt sein.

Daraus ergibt sich, wenn wir $\varepsilon = \pm 1$ setzen:

$$\left.\begin{aligned} B &= \mp i\varepsilon\sqrt{1+A^2} \\ A' &= \pm i\sqrt{1+A^2} \\ B' &= \varepsilon A \end{aligned}\right\},$$

[1] J. Lense, Über ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante, Jahresber. d. D.M.V Bd. 35, p. 283 (1926).

also

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= A x_1 \mp i \varepsilon \sqrt{1+A^2}\, x_2 + C \\ x_4 &= \pm i \sqrt{1+A^2}\, x_1 + \varepsilon A x_2 + C' \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

als allgemeinste Gleichungen einer ametrischen Ebene des R_4 in rechtwinkeligen inhomogenen Koordinaten ($x_0 = 1$).

Deuten wir nun x_1, x_2, x_3 als Koordinaten des Mittelpunktes der Bildkugel, x_4 als ihren imaginären Radius, setzen also $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = ir$, so lautet die Gleichung der Bildkugel in rechtwinkeligen Koordinaten x, y, z:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z - Aa \pm i \varepsilon b \sqrt{1+A^2} - C)^2 &= \\ = (\pm a \sqrt{1+A^2} - i \varepsilon b A - i C')^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Setzen wir

$$\left.\begin{aligned} K &= x^2 + y^2 + z^2 + C^2 + C'^2 \\ E_1 &= x + Az - AC \mp i C' \sqrt{1+A^2} \\ E_2 &= y \mp i \varepsilon \sqrt{1+A^2}\, z - \varepsilon A C' \pm i \varepsilon C \sqrt{1+A^2} \end{aligned}\right\}$$

so läßt sich Gleichung (5) auch schreiben:

$$K - 2aE_1 - 2bE_2 = 0. \tag{6}$$

Die Kugeln bilden also ein Kugelbündel, die Linearkombination aus der Kugel $K = 0$ und den beiden in Ebenen ausgearteten Kugeln $E_1 = 0$ und $E_2 = 0$. Diese beiden Ebenen berühren sämtliche Kugeln des Bündels. Die Mittelpunkte der Kugeln liegen auf der isotropen Ebene mit der Gleichung

$$z = Ax \mp i \varepsilon \sqrt{1+A^2}\, y + C. \tag{7}$$

Sie enthält die Schnittlinie der beiden Ebenen E_1 und E_2. Weil die Bildebene (2) ametrisch ist, berühren einander sämtliche ∞^2 Kugeln des Bündels in eigentlichen Punkten, d. h. jede Kugel des Systems wird von jeder berührt. Da es im R_4 außer den Ebenen keine ametrischen Flächen gibt, sind nichtlineare Kugelkongruenzen, bei denen jede Kugel des Systems wieder jede Kugel berührt, unmöglich. Aus analogen Gründen gibt es keine Systeme von ∞^3 Kugeln, die sich derartig berühren.

III.

Es wäre nun angenehm, an Stelle eines Bündels komplexer Kugeln womöglich ein reelles Abbild einer ametrischen Ebene zu haben. Dies läßt sich aber in folgender Weise leicht erreichen: Wir führen an Stelle der Größen z, A, C, C' dieselben Größen mit i multipliziert in die Rechnung ein. Dadurch geht unser Kugelbündel in ein System von ∞^2 gleichseitigen, einschaligen Rotationshyperboloiden über, die sich wechselseitig berühren, einen gemeinsamen uneigentlichen Kegelschnitt haben und deren Mittelpunkte auf einer Tangentialebene dieses Kegelschnittes liegen. Ihre Asymptotenkegel haben also parallele Erzeugende und berühren sämtlich die Ebene der Mittelpunkte.

Die Gleichung der Hyperboloide lautet:

$$(x-a)^2+(y-b)^2-(z-c)^2 = r^2, \tag{8}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} c &= Aa \mp \varepsilon \sqrt{1-A^2}\, b + C \\ r &= \pm \sqrt{1-A^2}\, a + \varepsilon A b + C' \end{aligned}\right\}$$

Sämtliche Hyperboloide haben eine Erzeugende gemeinsam; in jedem Punkt dieser Erzeugenden berühren einander ∞^1 Hyperboloide. Sie liegt auf der Ebene, welche die Mittelpunkte der Hyperboloide enthält. Diese Ebene berührt den gemeinsamen uneigentlichen Kegelschnitt im Schnittpunkte mit der gemeinsamen Erzeugenden.

Diese Behauptungen ergeben sich leicht aus den Gleichungen der betreffenden Gebilde.

Wir setzen im folgenden $C = 0$, was keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit bedeutet, da wir nur eine Parallelverschiebung längs der Z-Achse vornehmen. Aus analogen Gründen beschränken wir uns auf das obere Vorzeichen. Ferner führen wir ein:

$$\left.\begin{aligned} F &= x^2+y^2-z^2-C'^2 \\ L_1 &= x-Az+C'\sqrt{1-A^2} \\ L_2 &= y+\sqrt{1-A^2}\, z+AC' \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Dann lautet die Gleichung der Flächen des Bündels:

$$F-2aL_1-2bL_2 = 0, \tag{10}$$

$L_1 = 0$ und $L_2 = 0$ bilden mit der uneigentlichen Ebene zusammengenommen je ein dem Bündel angehöriges Ebenenpaar. Die Gleichungen der gemeinsamen Erzeugenden lauten:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= 0 \\ L_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die Ebene der Mittelpunkte ist:

$$z = Ax-\sqrt{1-A^2}\, y. \tag{12}$$

Sämtliche Hyperboloide werden von den Ebenen L_1 und L_2 in den Punkten der gemeinsamen Erzeugenden berührt.

IV.

Jetzt nehmen wir noch eine letzte Verallgemeinerung vor, wir üben nämlich auf unser Bündel von Hyperboloiden eine Kollineation aus. Dadurch erhalten wir die Gesamtheit aller ∞^2 Regelflächen zweiter Ordnung, die einen Kegelschnitt C und eine ihn in einem Punkt P schneidende Gerade g gemeinsam haben. Man überlegt sich leicht unabhängig von den früheren Betrachtungen, daß diese Gesamtheit ein spezielles Flächenbündel zweiter Ordnung ist. Denn jede Fläche, die mit C fünf Punkte und mit g drei Punkte gemeinsam hat, enthält C und g. Da wir aber von diesen fünf und drei Punkten je einen in P wählen können, sind für die Festlegung der Fläche sieben Punkte verbraucht, es bleiben also noch zwei, d. h. das System ist ein Bündel, und zwar ein Bündel von Regelflächen, weil alle Flächen die Gerade g gemeinsam haben.

Jede Ebene durch g berührt ∞^1 Flächen des Bündels in einem von ihr abhängigen Punkte von g. Denn die Forderung, eine bestimmte Ebene durch g in einem bestimmten Punkte zu berühren, ist gleichbedeutend mit der Angabe von acht Punkten. Wir bezeichnen mit t die Tangente von C im Punkte P, mit ε die Ebene von C. Die Ebene gt berührt sämtliche Flächen des Bündels im Punkte P und enthält die Pole von ε bezüglich dieser Flächen. Denn diese Pole sind die Scheitel der durch C an die Flächen des Bündels gelegten Tangentialkegel und diese werden sämtlich von der Ebene gt berührt. Das Bündel enthält also ∞^1 Kegel. Man erhält sie, indem man den Kegelschnitt C aus den Punkten der Geraden g projiziert. Es enthält ferner ∞^1 Ebenenpaare, nämlich alle Ebenen durch g zusammengenommen mit der Ebene ε des Kegelschnittes C.

Je zwei Flächen des Bündels berühren einander außer im Punkte P noch in einem zweiten auf g gelegenem Punkte Q. Seien nämlich F_1 und F_2 zwei beliebige Flächen des Bündels, die von einer durch g gelegten Ebene E in den Punkten P_1 und P_2 berührt werden mögen. Wenn sich E um g dreht, bewegen sich die Punkte P_1 und P_2 auf g projektiv zueinander. Diese beiden kollokalen projektiven Punktreihen haben zwei reelle Doppelpunkte, einer davon ist der Punkt P, der zweite ist der gesuchte Berührungspunkt Q von F_1 und F_2.

Das betrachtete Bündel aller Regelflächen zweiter Ordnung durch einen Kegelschnitt und eine ihn schneidende Gerade ist also ein reelles Abbild einer allgemeinen ametrischen Ebene des R_4. Den Punkten des R_4 werden die Regelflächen zugeordnet, dem Abstand Null im R_4 entspricht die Berührung zweier solchen Flächen.