Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über die Interpolation von Funktionen mehrerer Veränderlicher

Von

Theodor Radaković in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. Februar 1927)

Es sollen in dieser Arbeit einige Sätze über die Herleitung von Interpolationsverfahren aus Darstellungen durch singuläre Integrale, die ich in meiner Dissertation[1] im Anschluß an eine Ausführung von Lebesgue[2] (daß es möglich sei, aus jeder Darstellung durch singuläre Integrale ein Interpolationsverfahren herzuleiten) für den Fall von Funktionen einer Variabeln bewiesen habe, nunmehr für den Fall von Funktionen mehrerer Variabeln verallgemeinert werden. Es wird sich darum handeln, die Sätze von Lebesgue[3] und Hahn[4] für die Darstellung einer Funktion einer Variabeln durch singuläre Integrale oder durch Interpolationen nunmehr auch für den Fall von Funktionen mehrerer Variabeln auszusprechen, um daraus die entsprechenden Schlüsse zu ziehen. Dann soll noch insbesondere die Differenzierbarkeit der so gewonnenen Interpolationsverfahren untersucht werden. Es liegt nahe, eine Anwendung dieser Interpolationsverfahren zur direkten Lösung von Variationsproblemen, insbesondere von Randwertaufgaben, im Sinne des Ritz'schen Verfahrens zu versuchen. Indessen möge dies hier zunächst unerörtert bleiben. Die Darstellung beschränkt sich im folgenden auf den Fall von Funktionen zweier Variabeln, da hier bereits alles Wesentliche in Erscheinung tritt.

§ 1.

Wir können den Satz von Lebesgue für die Darstellung einer Funktion von zwei Variabeln $f(x,y)$ folgendermaßen[5] aussprechen: Es sei im Intervall $\bar{I}$

$$-l \leqq u \leqq +l, \quad -l \leqq v \leqq +l$$

eine Folge stetiger Funktionen $\varphi_n = \varphi(u, v, n)$ gegeben, von der wir gleich annehmen wollen, es sei

---

Über singuläre Integrale und Interpolationsverfahren, Bonn, Carl Georgi, 1921.

Sur les integrales singulières, Annales de Toulouse, série 3, t. *1*, 25 ff., 108 f.

L. c., Anmerkung 2, p. 70.

4 Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale. Denkschr. d. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Klasse, Bd. 93, 1913/14. (Im folgenden zitiert als Hahn 1.)

Vgl. dazu B. H. Camp, Amer. math. Soc. Trans. *14* (1913), 42 bis 64, wo die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für »einfach-unstetige« Funktionen mehrerer Variabeln und andere Klassen von Funktionen mehrerer Variabeln angegeben sind.

$$\lim_{> \infty} \varphi (u, v, n) = 0 \tag{1}$$

gleichmäßig in jedem den Punkt (0, 0) nicht enthaltenden Teilintervall

$$\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1, \; \alpha_2 \leqq v \leqq \beta_2$$

des gegebenen offenen Intervalls (I). Diese Funktionenfolge wird für die Darstellung einer im Intervall

$$a \leqq x \leqq a + l, \; b \leqq y \leqq b + l$$

gegebenen stetigen Funktion $f(x, y)$

$$f(x, y) = \lim_{n \to \infty} \int_a^{a+l} \int_b^{b+l} f(\xi, \eta) \, \varphi (\xi - x, \eta - y, n) \, d\xi \, d\eta \tag{2}$$

dann brauchbar sein, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

1. Es ist

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \varphi (u, v, n) \, du \, dv = 1 \tag{3}$$

für jedes den Punkt (0, 0) enthaltende Teilintervall

$$\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1, \; \alpha_2 \leqq v \leqq \beta_2$$

von

$$-l < u < +l, \; -l < v < +l.$$

2. Für jedes Teilintervall von

$$-l < u < +l, \; -l < v < +l$$

ist

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} |\varphi (u, v, n)| \, du \, dv < M \tag{4}$$

für alle n.

Dann gilt Formel (2) für jeden inneren Punkt von

$$a \leqq x \leqq a + l, \; b \leqq x \leqq b + l.$$

Ist $\psi (u, n)$ eine stetige Funktion, die den Lebesgue'schen Bedingungen für die Darstellung einer Funktion einer Variabeln genügt, ist nämlich

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \psi (u, n) \, du = 1 \tag{3 a}$$

für jedes den Nullpunkt enthaltende Intervall von $(-l, +l)$ und ist weiter für jedes Intervall von $(-l, +l)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\psi(u, n)|\, d u < M \tag{4a}$$

für alle n, so können wir offenbar setzen:

$$\varphi(u, v, n) = \psi(u, n)\, \psi(v, n), \tag{5}$$

vorausgesetzt, daß auch

$$\lim_{> \infty} \psi(u, n)\, \psi(v, n) = 0 \tag{6}$$

ist, und zwar gleichmäßig in jedem den Punkt (0, 0) nicht enthaltenden Intervall von

$$-l < u < +l, \quad -l < v < +l.$$

Die Verallgemeinerung des Hahn'schen Satzes[1] für Interpolationsverfahren können wir wiederum in folgender Form aussprechen: Für jedes n sei im Intervall

$$a \leqq \xi \leqq a + l, \quad b \leqq \eta \leqq b + l$$

eine Menge $\mathfrak{M}^{(n)}$ von k_n Punkten $P_i^{(n)}$ mit den Koordinaten $\xi_i^{(n)}$, $\eta_i^{(n)}$ gegeben, derart, daß die Vereinigung aller $\mathfrak{M}^{(n)}$ im Intervall dicht ist. Wenn die Funktionen $\varphi_i^{(n)}(x, y)$ folgenden zwei Bedingungen genügen:

1. Es ist

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{(\alpha_1\, \beta_1) \\ (\alpha_2\, \beta_2)}} \varphi_i^{(n)}(x, y) = 1, \tag{7}$$

falls die Summierung über alle Punkte $P_i^{(n)}$ der Menge $\mathfrak{M}^{(n)}$ erstreckt wird, die im Innern des Intervalls

$$\alpha_1 \leqq \xi \leqq \beta_1, \quad \alpha_2 \leqq \eta \leqq \beta_2$$

liegen und falls auch der Punkt P mit den Koordinaten x, y im Innern dieses Intervalls liegt.

2. Es ist

$$\sum_{i=1}^{k_n} \left|\varphi_i^{(n)}(x, y)\right| < M \tag{8}$$

für alle n, dann gilt für jede im Intervall

$$a \leqq \xi \leqq a + l, \quad b \leqq \eta \leqq b + l$$

Über das Interpolationsproblem. Math. Zeitschr., Bd. 1, 1918, 115 ff. (Im folgenden zitiert als Hahn 2.)

stetige Funktion $f(\xi, \eta)$ und jeden im Innern dieses Intervalls gelegenen Punkt $P(x,y)$ die Relation

$$f(x,y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x,y). \tag{9}$$

Es wird genügen, den Beweis für einen dieser beiden Sätze anzudeuten, der ganz wie im Fall einer Variabeln verläuft. Sei, um z. B. den Hahn'schen Satz zu beweisen, $f(\xi, \eta)$ eine im Intervall $\bar{I}$

$$a \leqq \xi \leqq a + l,\ b \leqq \eta \leqq b + l$$

stetige Funktion, so ist sie dort auch gleichmäßig stetig, d. h. wir können bei vorgegebenem ε das ganze Intervall durch Parallele zu den beiden Achsen in endlich viele Teilrechtecke

$$\alpha_1^{(h)} \leqq \xi \leqq \beta_1^{(h)},\ \alpha_2^{(h)} \leqq \eta \leqq \beta_2^{(h)}\ (h = 1, 2, \ldots N)$$

zerlegen, so daß

$$|f(\xi_1, \eta_1) - f(\xi_2, \eta_2)| < \varepsilon$$

ist, falls die Punkte (ξ_1, η_1) und (ξ_2, η_2) im Innern oder auf dem Rand desselben Teilrechtecks liegen. Da die Vereinigung aller $\mathfrak{M}^{(n)}$ abzählbar ist, können wir annehmen, daß auf keiner dieser Parallelen ein Punkt $P_i^{(n)}$ liege. (Dies ergibt sich durch Projektion der Vereinigungsmenge auf die ξ- oder η-Achse.) Ebenso wollen wir auch annehmen, der Punkt (x,y) liege im Innern eines solchen Teilrechtecks.

Dann können wir offenbar eine im Innern eines jeden Teilrechtecks konstante Funktion $f^*(\xi, \eta)$ bilden, derart, daß

$$|f(\xi, \eta) - f^*(\xi, \eta)| < \varepsilon \tag{10}$$

im Innern aller Teilrechtecke. Erteilen wir f^* auf den Rändern noch geeignete Werte, so ist es im ganzen Intervall $\bar{I}$ definiert, und es gilt (10) in ganz $\bar{I}$. Dann ist aber zufolge (8) und (10)

$$\left|\sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x,y) - \sum_{i=1}^{k_n} f^*(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x,y)\right| =$$

$$= \left|\sum_{h=1}^{N} \sum_{\substack{(\alpha_1^{(h)}, \beta_1^{(h)})\\(\alpha_2^{(h)}, \beta_2^{(h)})}} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x,y) - \sum_{h=1}^{N} \sum_{\substack{(\alpha_1^{(h)}, \beta_1^{(h)})\\(\alpha_2^{(h)}, \beta_2^{(h)})}} f^*(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x,y)\right| <$$

$$< \varepsilon M. \tag{11}$$

Nach der Definition von f^* ist

$$\sum_{i=1}^{k_n} f^*(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x,y) = \sum_{h=1}^{N} f^*(\bar{\xi}^{(h)}, \bar{\eta}^{(h)}) \sum_{\substack{(\alpha_1^{(h)},\, \beta_1^{(h)})\\ (\alpha_2^{(h)},\, \beta_2^{(h)})}} \varphi_i^{(n)}(x,y), \tag{12}$$

wobei $(\bar{\xi}^{(h)}, \bar{\eta}^{(h)})$ irgendein Punkt im Innern des h-ten Teilrechtecks ist. Befindet sich nun der Punkt (x,y), im j-ten Teilrechteck, so gilt zufolge (7)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{(\alpha_1^{(j)},\, \beta_1^{(j)})\\ (\alpha_2^{(j)},\, \beta_2^{(j)})}} \varphi_i^{(n)}(x,y) = 1. \tag{7a}$$

Für jedes andere, z. B. das k-te Teilrechteck, aber kann aus (7) gefolgert werden

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{(\alpha_1^{(k)},\, \beta_1^{(k)}),\\ (\alpha_2^{(k)},\, \beta_2^{(k)}).}} \varphi_i^{(n)}(x,y) = 0. \tag{13}$$

Denn sei z. B.

$$\alpha_1^{(k)} < \beta_1^{(k)} < x < \alpha_1^{(l)} \text{ und } \alpha_2^{(k)} < y < \beta_2^{(k)},$$

so ist

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{(\alpha_1^{(k)},\, \alpha_1^{(l)})\\ (\alpha_2^{(k)},\, \beta_2^{(k)})}} \varphi_i^{(n)}(x,y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{(\beta_1^{(k)},\, \alpha_1^{(l)})\\ (\alpha_2^{(k)},\, \beta_2^{(k)})}} \varphi_i^{(n)}(x,y) = 1$$

und daraus folgt (13). Ist anderseits

$$\alpha_1^{(k)} < \beta_1^{(k)} < x < \alpha_1^{(l)} \text{ und } \alpha_2^{(k)} < \beta_2^{(k)} < y < \alpha_2^{(l)},$$

so ist

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{(\alpha_1^{(k)},\, \alpha_1^{(l)})\\ (\alpha_2^{(k)},\, \alpha_2^{(l)})}} \varphi_i^{(n)}(x,y) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{(\beta_1^{(k)},\, \alpha_1^{(l)})\\ (\alpha_2^{(k)},\, \alpha_2^{(l)})}} \varphi_i^{(n)}(x,y) = 1$$

und zufolge dem eben bewiesenen

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{(\alpha_1^{(k)},\, \beta_1^{(k)})\\ (\beta_2^{(k)},\, \alpha_2^{(l)})}} \varphi_i^{(n)}(x,y) = 0,$$

woraus wieder (13) gefolgert werden kann.

Aus ($7a$), (13) und (12) aber folgt:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k_n} f^* (\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)}) \, \varphi_i^{(n)} (x,y) = f^* (x,y) \tag{14}$$

und aus (10), (11) und (14) kann zufolge der Willkürlichkeit von ε die Gleichung (9) gefolgert werden.

Wir gehen jetzt daran, aus einer Lebesgue'schen Integraldarstellung (2) ein den Hahn'schen Bedingungen (7), (8) genügendes Interpolationsverfahren herzuleiten. Dabei stützen wir uns auf die Tatsache, daß die im abgeschlossenen Intervall $\bar{I}$

$$-l \leqq u \leqq +l, \; -l \leqq v \leqq +l$$

stetigen Funktionen $\varphi\,(u, v, n)$ dort auch gleichmäßig stetig sind. Denken wir uns also eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ vorgegeben, so ist es möglich, das Intervall $\bar{I}$ in $4\,k_n$ Teilquadrate vom Flächeninhalt Δf_n ($\lim\limits_{n \to \infty} \Delta f_n = 0$) zu zerlegen, daß

$$|\varphi\,(u_1, v_1, n) - \varphi\,(u_2, v_2, n)| < \varepsilon_n \tag{15}$$

ist, falls die Punkte (u_1, v_1) und (u_2, v_2) im Innern oder auf dem Rande eines Teilquadrats liegen. Im Innern des Quadrats $\Delta f_n^{(i)}$ wählen wir den Punkt $(x_i^{(n)}, y_i^{(n)})$ beliebig. Sei dann ein den Punkt (0, 0) in seinem Innern enthaltende Intervall

$$\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1, \; \alpha_2 \leqq v \leqq \beta_2$$

beliebig gegeben, dann können wir schreiben

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2} \varphi\,(u, v, n)\, d\,u\, d\,v = \sum{}' \varphi\,(\rho_i^{(n)}, \sigma_i^{(n)}, n)\, \Delta f_n, \tag{16}$$

wobei die Summierung über alle in dieses Intervall fallende Teilquadrate zu erstrecken ist und durch Σ' angedeutet werden soll, daß am Rande des Intervalls statt der Teilquadrate Δf_n kleinere Teilrechtecke auftreten können. Der Punkt $(\rho_i^{(n)}, \sigma_i^{(n)})$ ist dabei ein nach dem Mittelwersatz passend gewählter Punkt im Teilquadrat $\Delta f_n^{(i)}$.

Wegen (15) aber ist

$$\left| \sum{}' \varphi\,(\rho_i^{(n)}, \sigma_i^{(n)}, n)\, \Delta f_n - \sum{}' \varphi\,(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}, n)\, \Delta f_n \right| <$$

$$< \varepsilon_n\, (\beta_1 - \alpha_1)\, (\beta_2 - \alpha_2), \tag{17}$$

daß wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\varphi(u,v,n)\,du\,dv=\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{(\alpha_1,\beta_1)\\(\alpha_2,\beta_2)}}{}^{'}\varphi\left(x_i^{(n)},y_i^{(n)},n\right)\Delta f_n.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\Delta f_n=0$ und (1) können wir statt der Teilrechtecke am Rande die vollen Teilquadrate nehmen, und aus denselben Gründen können wir uns auf jene Punkte $(x_i^{(n)},y_i^{(n)})$ beschränken, die im Innern des Intervalls

$$\alpha_1\leqq u\leqq\beta_1,\quad\alpha_2\leqq v\leqq\beta_2$$

liegen, so daß wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\varphi(u,v,n)\,du\,dv=\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{(\alpha_1,\beta_1)\\(\alpha_2,\beta_2)}}\varphi\left(x_i^{(n)},y_i^{(n)},n\right)\Delta f_n. \tag{18}$$

Sei nun das Intervall $\bar{I}$

$$a\leqq\xi\leqq a+l,\quad b\leqq\eta\leqq b+l$$

gegeben und im Innern dieses Intervalls der Punkt x,y.

Wir teilen dieses Intervall in k_n Teilquadrate Δf_n und wählen in jedem Teilquadrat einen Punkt $(\xi_i^{(n)},\eta_i^{(n)})$ beliebig. Setzen wir dann

$$x_i^{(n)}=\xi_i^{(n)}-x,\quad y_i^{(n)}=\eta_i^{(n)}-y$$

und

$$\varphi_i^{(n)}(x,y)=\varphi\left(\xi_i^{(n)}-x,\ \eta_i^{(n)}-y,\ n\right)\Delta f_n, \tag{19}$$

so folgt für diese Funktionen laut Gleichung (18) die Hahn'sche Bedingung (7) aus der Lebesgue'schen Bedingung (3) und wegen

$$\Big|\,|\varphi(u_1,v_1,n)|-|\varphi(u_2,v_2,n)|\,\Big|\leqq\big|\varphi(u_1,v_1,n)-\varphi(u_2,v_2,n)\big|$$

kann ebenso die Bedingung (8) aus der Bedingung (4) gefolgert werden. Es genügen also die Funktionen (19) den beiden Hahn'schen Bedingungen, und es ist daher

$$f(x,y)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n}f\left(\xi_i^{(n)},\eta_i^{(n)}\right)\varphi\left(\xi_i^{(n)}-x,\ \eta_i^{(n)}-y,\ n\right)\Delta f_n. \tag{20}$$

Eine den Bedingungen ($3a$) und ($4a$) genügende Integraldarstellung liefern nach Hahn[1] die Funktionen

---

[1] L. Hahn l., p. 43.

$$\psi(u, n) = \frac{p\,\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}\, n^{\frac{1}{p}} (\psi(u))^n. \tag{21}$$

Dabei ist $\psi(u)$ eine nicht-negative Funktion der Form

$$\psi(u) = 1 - \alpha|u|^p + \omega(u)\,.\,|u|^p \tag{22}$$
$$\alpha > 0, p > 1, \quad \lim_{u \to 0} \omega(u) = 0.$$

In jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Intervall $< \alpha, \beta >$ von $(-l, +l)$ sei die obere Grenze von $\psi(n)$ kleiner als 1. Außerdem wollen wir von $\psi(u)$ noch voraussetzen, es sei stetig und differenzierbar im Intervall

$$< -l, +l >$$

und es gebe eine Konstante A, so daß

$$|\psi'(u)| < A \tag{23}$$

in $< -l, +l >$ ist. Infolge unserer Voraussetzungen ist dann

$$\lim_{n \to \infty} \psi(u, n)\,.\,\psi(v, n) = 0, \tag{24}$$

und zwar gleichmäßig in jedem den Punkt $u = o, v = o$ nicht enthaltenden Intervall

$$\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1, \; \alpha_2 \leqq v \leqq \beta_2$$

des Intervalls

$$-l < u < +l, \; -l, < v < +l.$$

Nach (6) liefern dann

$$\varphi(u, v, n) = \psi(u, n) \quad \psi(v, n) \tag{25}$$

eine den Bedingungen (3), (4) genügende Integraldarstellung (2). Teilen wir jetzt das Intervall $< -l, +l >$ in $2\,k_n$ gleiche Teile von der Länge h_n, derart, daß in jedem solchen Teilintervall

$$|\varphi(u_1, n) - \varphi(u_2, n)| < \delta_n \tag{26}$$

ist, wobei δ_n eine ebenso wie h_n gegen Null konvergierende Folge sei. Nun ist, falls wir das Intervall $-l \leqq u \leqq +l, \; -l \leqq v \leqq +l$ in Quadrate Δf_n von der Seitenlänge h_n teilen, für zwei in einem solchen Quadrat befindliche Punkte (u_1, v_1) und (u_2, v_2)

$$\begin{aligned} |\varphi(u_1, v_1, n) - \varphi(u_2, v_2, n)| &\leqq |\varphi(u_1, v_1, n) - \varphi(u_2, v_1, n) + \\ &+ |\varphi(u_2, v_1, u) - \varphi(u_2, v_2, n)| \leqq \\ \leqq (|\psi(v_1, n) + \psi(u_2, n)|)\,\delta_n &\leqq C\varkappa_n\,\delta_n. \end{aligned} \tag{27}$$

Dabei ist C eine Konstante und $\varkappa_n$ das Maximum von $\psi(u, n)$ in $< -l, +l >$. Es ist also nach (15) h_n so zu wählen, daß

$$\lim_{n \to \infty} \varkappa_n \delta_n = 0 \tag{28}$$

ist. Nun ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung wegen

$$\psi'(u, n) = p \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} n^{\frac{1}{p}+1} (\psi(u))^{n-1} \psi'(u)$$

$$|\psi(u_1, n) - \varphi(u_2, n)| \leqq \frac{p\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} n^{\frac{1}{p}+1} A.h_n = C n^{\frac{1}{p}+1} h_n \tag{29}$$

Wegen $|\varkappa_n| < \bar{C}\, n^{\frac{1}{p}}$ genügt es also,

$$h_n = \frac{l}{n^3} \tag{30}$$

zu setzen, um ein Interpolationsverfahren nach (20) mit $\Delta f_n = h_n^2$ zu erhalten.

Als bekannte Spezialfälle der Integraldarstellung von (21), (22) seien die Funktionen $\varphi(u) = 1 - u^2$ und $l = 1$ (Landau[1]) sowie $\varphi(u) = \left(\cos \frac{u}{2}\right)^2$ und $l = 2\pi$ (Ch. J. de la Vallée-Poussin[2] erwähnt.

Entsprechende Interpolationsverfahren können wir auch aus der den Bedingungen (3 a) und (4 a) genügenden Integraldarstellung vom Poisson'schen Typus[3] gewinnen. Hier ist

$$\psi(u, n) = \frac{\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\Omega(p)} \frac{n^{\frac{1}{p}}}{1 + n\varphi(u)}, \tag{31}$$

wobei

$$\Omega(p) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + u^p} \tag{31 a}$$

und

---

[1] Landau, Rend. Pal., Bd. 25, p. 337, vgl. auch Tonelli, Rend. Pal. Bd. 29, p. 1 ff.

Ch. J. de la Vallée-Poussin, Acad. Bruxelles, Bull. Classe des Sciences, 1908, p. 193.

[3] l. c., Hahn l., p. 647.

$$\psi(u) = \alpha|u|^p + \omega(u).|u|^p \tag{31 b}$$
$$\alpha > 0; \lim_{u \to 0} \omega(u) = 0$$

ist. Die Funktion $\psi(u)$ sei als stetig und differenzierbar in $< -l, +l >$ angenommen, in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervall von $(-l, +l)$ sei die untere Grenze von $\psi(u)$ eine positive Zahl, und außerdem gebe es eine Konstante A, so daß

$$|\psi'(u)| < A \tag{31 d}$$

ist in $< -l, +l >$. Dann muß wegen (6) $p > 2$ angenommen werden, und es genügt, wie leicht nachzuweisen ist,

$$h_n = \frac{l}{n^2}, \; \Delta f_n = h_n^2$$

zu setzen, um aus den Funktionen

$$\varphi(u, v, n) = \psi(u, n)\, \psi(v, n) \tag{32}$$

ein Interpolationsverfahren abzuleiten.

Zum Schlusse sei noch bemerkt: die Interpolationsverfahren (20) konvergieren gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilintervall T:

$$a_1 \leqq x \leqq b_1; \; a_2 \leqq y \leqq b_2$$

des Intervalls

$$a < x < a + l; \; b < y < b + l.$$

Zu diesem Zwecke haben wir nur nötig, einen Satz von Hahn[1] für mehrere Veränderliche zu formulieren. Setzen wir

$$\chi_i^{(n)}(x, y, h) = 0 \text{ oder } = \varphi_i^{(n)}(x, y) \tag{33}$$

je nachdem, ob der Punkt $\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)}$ dem Intervall

$$x - h < \xi < x + h; \; y - h < \eta < y + h$$

angehört oder nicht, so ist für das Bestehen gleichmäßiger Konvergenz hinreichend, daß

1. für jedes Teilintervall $\alpha_1 < \xi < \beta_1$; $\alpha_2 < \eta < \beta_2$ und jedes $h > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{\alpha_1 < \xi < \beta_1 \\ \alpha_2 < \eta < \beta_2}} \chi_i^{(n)}(x, y\, h) = 0 \tag{34}$$

gleichmäßig in T ist,

---

[1] l. Hahn 2., p. 129.

2. daß für jedes $h > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{(x-h,\, x+h) \\ (y-h,\, y+h)}} \varphi_i^{(n)}(x,y) = 1 \tag{35}$$

gleichmäßig in T ist und

3. daß

$$\sum_{i=1}^{k_n} |\varphi_i^{(n)}(x,y)| < N \tag{36}$$

ist für fast alle n und alle (x,y) von T.

Der Beweis kann völlig gleichlautend dem Hahn'schen geführt werden und beruht im wesentlichen auf folgendem.

Schreiben wir

$$\sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x,y) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \chi_i^{(n)}(x,y,h) + \sum_{\substack{(x-h,\, x+h) \\ (y-h,\, y+h)}} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x,y) \tag{37}$$

so ist

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{k_n} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \chi_i^{(n)}(x,y,h) = 0 \tag{38}$$

gleichmäßig in T zufolge (34), (36) und (10). Ebenfalls wegen (34), (36) und (10) können wir h so wählen, daß gleichmäßig in T

$$\left| \sum_{\substack{(x-h,\, x+h) \\ (y-h,\, y+h)}} f(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x,y) - f(x,y) \sum_{\substack{(x-h,\, x+h) \\ (y-h,\, y+h)}} \varphi_i^{(n)}(x,y) \right| < \varepsilon N \tag{39}$$

ist. Dann aber folgt aus (35) die gleichmäßige Konvergenz in T für die Formel (9).

Daß aber die Interpolationsverfahren (20) den Bedingungen (34), (35) und (36) genügen, kann aus der Beziehung (1), die die gleichmäßige Konvergenz von $\varphi(u, v, n)$ aussagt, geschlossen werden. Denn setzen wir wieder

$$\xi_i^{(n)} - x = x_i^{(n)};\ \eta_i^{(n)} - y = y_i^{(n)}$$

und

$$\sum_{\substack{(\alpha_1,\, \beta_1) \\ (\alpha_2,\, \beta_2)}} \chi(\xi_i^{(n)} - x, \eta_i^{(n)} - y, n, h) = \sum_{\substack{(\alpha_1 - x,\, \beta_1 - x) \\ (\alpha_2 - y,\, \beta_2 - y)}} \chi(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}, n, h)$$

und beachten, daß für alle (x,y) von T das Intervall

$$\alpha_1 - x \leqq \xi \leqq \beta_1 - x;\ \alpha_2 - y \leqq \eta \leqq \beta_2 - y$$

ganz im Intervall

$$\alpha_1 - b_1 \leqq \xi \leqq \beta_1 - a_1;\ \alpha_2 - b_2 \leqq \eta \leqq \beta_2 - a_2$$

liegt, das seinerseits im Intervall

$$-l < \xi < +l;\ -l < \eta < +l$$

liegt, so folgt aus dem gleichmäßigen Bestehen von

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{(\alpha_1 - b_1,\ \beta_1 - a_1) \\ (\alpha_2 - b_2,\ \beta_1 - a_2)}} |\chi(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}, n, h)| \Delta f_n = 0 \tag{40}$$

in T die Formel (34). Formel (40) aber kann aus (1) gefolgert werden. Um (35) zu beweisen gehen wir von (17) aus und bemerken: es ist

$$\left| \overline{\sum_{\substack{(-h,\, +h) \\ (-h,\, +h)}}} \varphi(\rho_i^{(n)}, \sigma_i^{(n)}, n) \Delta f_n - \overline{\sum} \varphi(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}, n) \Delta f_n \right| < \varepsilon_n . 4 h^2, \tag{41}$$

wobei durch $\overline{\Sigma}$ angedeutet werde, daß bei der Summierung sämtliche Teilrechtecke am Rande weggelassen werden mögen. Der hiedurch begangene Fehler kann durch Wahl von $n \geqq n_0$ unter jede beliebig vorgegebene Größe heruntergedrückt werden, und zwar gleichmäßig in T, ebenso wie auch (41) gleichmäßig in T gilt. Da

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-h}^{+h} \int_{-h}^{+h} \varphi(u, v, n)\, du\, dv = 1$$

unabhängig von der Wahl des Punktes (x,y) besteht, ist damit (35) bewiesen. Wegen

$$\sum_{i=1}^{kn} \left| \varphi(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}, n) \right| \Delta f_n = \overline{\sum_{i=1}^{kn}} \left| \chi(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}, n, h) \right| \Delta f_n +$$

$$+ \sum_{\substack{(-h,\, +h \\ (-h,\, +h)}} \left| \varphi(x_i^{(n)}, y_i^{(n)}, n) \right| \Delta f_n, \tag{42}$$

kann (36) ebenso bewiesen werden wie (34) und (35).

§ 2.

Wir wollen nun die Frage nach der Differenzierbarkeit der Interpolationsverfahren behandeln und damit beginnen, die Darstellung der partiellen Ableitungen einer im Intervall

$$a \leqq \xi \leqq a + l,\ b \leqq \eta \leqq b + l$$

stetiger Funktion $f(\xi, \eta)$ durch singuläre Integrale zu untersuchen. Von dieser Funktion wollen wir annehmen, sie besitze in einer Umgebung des Punktes (x,y) stetige partielle Ableitungen $f_{i,l}$ bis zur m-ten Ordnung und lasse eine Entwicklung in folgender Form zu:

$$f(\xi, \eta) = f(x,y) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\varkappa=0}^{i} \frac{1}{\varkappa!\,(i-\varkappa)!} (\xi - x)^{\varkappa} (\eta - y)^{i-\varkappa} f_{\varkappa,\, i-\varkappa}(x,y) +$$
$$+ \sum_{\varkappa=0}^{m} (\xi - \varkappa)^{\varkappa} (\eta - y)^{m-\varkappa}\, \omega_{\varkappa,\, m-\varkappa}(\xi, \eta) \tag{1}$$

wobei

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \eta \to y}} \omega_{\varkappa,\, m-\varkappa}(\xi, \eta) = \omega_{\varkappa,\, m-\varkappa}(x,y) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots m) \tag{2}$$

ist. Wir wollen nun beweisen: Es ist

$$f_{h,\, m-h}(x,y) = \lim_{n \to \infty} \int_{a}^{a+l} \int_{b}^{b+l} f(\xi, \eta)\, \chi(\xi - x, \eta - y, n)\, d\xi\, d\eta \tag{3}$$

für den Punkt (x,y) im Innern von

$$a \leqq x \leqq a + l,\ b \leqq y \leqq b + l,$$

wenn die Funktionen $\chi(u, v, n)$ folgenden Bedingungen genügen:

1. Zu jedem Teilintervall

$$\alpha_1 \leqq \xi \leqq \beta_1,\ \alpha_2 \leqq \eta \leqq \beta_2$$

von

$$a \leqq \xi \leqq a + l,\ b \leqq \eta \leqq b + l,$$

das den Punkt x,y nicht enthält, gibt es eine Konstante M, so daß

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \chi(\xi - x, \eta - y, n)\, d\xi\, d\eta < M \tag{4}$$

ist für alle n.

2. Für alle Teilintervalle der Bedingung 1 ist

$$\lim_{n->\infty}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\chi(\xi-x,\eta-y,n)\,d\xi\,d\eta=0 \tag{5}$$

3. Es gibt eine Konstante N, so daß

$$\int_a^{a+l}\int_b^{b+l}|(\xi-x)^\varkappa(\eta-y)^{m-\varkappa}\chi(\xi-x,\eta-y,n)|\,d\xi\,d\eta<N \tag{6}$$

$$(\varkappa=0,1,2.\quad..m)$$

ist für alle n.

4. Es ist

$$\lim_{n->\infty}\int_a^{a+l}\int_b^{b+l}(\xi-x)^\varkappa(\eta-y)^{i-\varkappa}\chi(\xi-x,\eta-y,n)\,d\xi\,d\eta=0 \tag{7}$$

für $i<m,\varkappa\leqq i$ und für $i=m,\varkappa\neq h,\varkappa\leqq m$.

Es ist

$$\lim_{n->\infty}\int_a^{a+l}\int_b^{b+l}(\xi-x)^h(\eta-y)^{m-h}\chi(\xi-x,\eta-y,n)\,d\xi\,d\eta=h!\,(m-h)! \tag{8}$$

Setzen wir die Entwicklung (1) in das Integral

$$\int_a^{a+l}\int_b^{b+l}f(\xi,\eta)\,\chi(\xi-x,\eta-y,n)\,d\xi\,d\eta$$

ein, so ergibt sich aus den Bedingungen (7), (8): Formel (3) wird dann gelten, wenn die folgende Gleichung besteht:

$$\lim_{n->\infty}\int_a^{a+l}\int_b^{b+l}\sum_{\varkappa=0}^{m}(\xi-x)^\varkappa(\eta-y)^{m-\varkappa}\omega_{\varkappa,\,m-\varkappa}(\xi,\eta)\cdot$$

$$\cdot\chi(\xi-x,\eta-y,n)\,d\xi\,d\eta=0 \tag{9}$$

Um diese Gleichung zu beweisen, wollen wir zunächst beweisen, daß diese Integrale mit wachsendem n gegen Null konvergieren, falls sie über ein den Punkt (x,y) nicht enthaltendes Teilintervall

$$\alpha_1\leqq\xi\leqq\beta_1,\alpha_2\leqq\eta\leqq\beta_2$$

von

$$a\leqq\xi\leqq a+l,\ b\leqq\eta\leqq b+l$$

erstreckt werden. Da zugleich mit $f(\xi, \eta)$ auch die Funktion

$$g(\xi, \eta) = \sum_{\varkappa=0}^{m} (\xi - x)^{\varkappa} (\eta - y)^{m-\varkappa} \omega_{\varkappa, m-\varkappa}(\xi \eta)$$

im Intervall

$$a \leqq \xi \leqq a + l, \; b \leqq \eta \leqq b + l$$

stetig, also auch gleichmäßig stetig ist, kann dieses Teilintervall durch endlich viele Parallele zur ξ- und η-Achse derart in Teilrechtecke geteilt werden, daß in jedem solchen Teilrechteck die Schwankung von $g(\xi, \eta)$ kleiner als eine vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$ wird. Also läßt sich $g(\xi, \eta)$ durch eine in jedem Teilrechteck konstante Funktion $g^*(\xi, \eta)$ ersetzen, derart, daß

$$|g(\xi, \eta) - g^*(\xi, \eta)| < \varepsilon$$

in

$$\alpha_1 \leqq \xi \leqq \beta_1 \; \alpha_2 \leqq \eta \leqq \beta_2$$

ist. Infolge Gleichung (4) ist dann

$$\left| \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g(\xi, \eta) \chi(\xi - x, \eta - y, n) \, d\xi \, d\eta - \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \int_{\alpha_2}^{\beta_2} g^*(\xi, \eta) \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \chi(\xi - x, \eta - y, n) \, d\xi \, d\eta \right| < \varepsilon M.$$

Die Integrale

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_1} \int_{\beta_2}^{\beta_2} g^*(\xi, \eta) \chi(\xi - x, \eta - y, n) \, d\xi \, d\eta$$

gehen aber zufolge (5) mit wachsendem n gegen Null. Um endlich für passend gewähltes δ

$$\left| \int_{x-\delta}^{x+\delta} \int_{y-\delta}^{y+\delta} g(\xi, \eta) \chi(\xi - x, \eta - y, n) \, d\xi \, d\eta \right| < \eta \tag{10}$$

zu beweisen, bemerken wir: Für jedes n sind diese Integrale nicht größer als

$$\sum_{\varkappa=0}^{m} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \int_{y-\delta}^{y+\delta} \left| (\xi - x)^{\varkappa} (\eta - y)^{m-\varkappa} \omega_{\varkappa, m-\varkappa}(\xi, \eta) \right.$$
$$\left. \cdot \chi(\xi - x, \eta - y, n) \right| d\xi \, d\eta. \tag{11}$$

Nun können wir wegen (2) h so wählen, daß im Integrationsintervall

$$|\omega_{\varkappa, m-\varkappa}(\xi, \eta)| < \varepsilon \qquad (\varkappa = 0, 1, 2 \ldots m) \tag{12}$$

ist, und dann sind zufolge (6) die Ausdrücke (11) kleiner als $(m+1)\varepsilon N$ für alle n, womit (10) bewiesen ist. Aus (10) und der Konvergenz für den Punkt (x, y) nicht einschließende Integrationsintervalle aber kann (9) gefolgert werden.

Es sei jetzt $\psi(u, n)$ eine Funktionenfolge, die folgenden Bedingungen genügt:

1. In jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervall von $(-l, +l)$ ist

$$\lim_{n \to \infty} \psi^{(i)}(u, n) = 0 \qquad i = 0, 1, 2, \ldots m. \tag{13}$$

$\psi^{(i)}(u, n)$ sei dabei die i-te Ableitung von $\psi(u, n)$, das als m-mal stetig differenzierbar in $(-l, +l)$ angenommen werde. Weiter sei in jedem derartigen Teilintervall Formel $(4a)$ von § 1 für $\psi^{(m)}(u, n)$ erfüllt.

2. Für jedes Teilintervall $<\alpha, \beta>$ von Bedingung 1 gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \psi(u, n)\, du = 0 \tag{14}$$

3. Es gibt ein N und ein δ, so daß

$$\int_{-\delta}^{+\delta} |u^m \psi^{(m)}(u, n)|\, du < N \tag{15}$$

für alle n ist.

4. Es gibt ein δ, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\delta}^{+\delta} \psi(u, n)\, du = 1 \tag{16}$$

Nach einem Satze von H. Hahn[1] gelten dann für diese $\psi(u, n)$ folgende Relationen.

1. Es gibt ein $M(i)$, so daß für jedes den Nullpunkt nicht enthaltende Teilintervall von $(-l, +l)$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\psi^{(i)}(u, n)|\, du < M(i) \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots m) \tag{14a}$$

für alle n ist.

[1] l. c. Hahn 1., p. 615.

2. Es gibt ein $N(i)$ und ein δ, so daß

$$\int_{-\delta}^{+\delta} |u^{(i)}\, \psi^{(i)}(u, n)|\, d\, u < N(i) \tag{15a}$$

$$(i = 0, 1, 2, \quad m)$$

für alle n ist.

3. Es gibt ein δ, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\delta}^{+\delta} u^j\, \psi^{(i)}(u, n)\, d\, u = 0 \tag{16a}$$

$$(0 \leqq j < i \leqq m)$$

und

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\delta}^{+\delta} u^i\, \psi^{(i)}(u, n)\, d\, u = (-1)^i\, i! \tag{16b}$$

$$(0 \leqq i \leqq m)$$

ist. Wir wollen endlich annehmen, für diese Funktionenfolge $\psi(u, n)$ gälten noch folgende zwei Bedingungen:

a) Es ist

$$\lim_{n \to \infty} \psi^{(\varkappa)}(u, n)\, \psi^{(i-\varkappa)}(u, n) = 0 \tag{17}$$

$$(i \leqq m, \ \varkappa \leqq i)$$

gleichmäßig in jedem den Punkt $(0, 0)$ nicht enthaltenden Teilintervall

$$\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1, \ \alpha_2 \leqq v \leqq \beta_2$$

von

$$-l < u < +l, \ -l < v < +l.$$

b) Es gibt ein N, so daß für alle n

$$\int_{-\delta}^{+\delta} |u^{\varkappa}\, \psi^{(s)}(u, n)|\, d\, u \,.\, \int_{-\delta}^{+\delta} |v^{i-\varkappa}\, \psi^{(i-s)}(v, n)|\, d\, v < N \tag{18}$$

$$(i \leqq m; \ \varkappa, s \leqq i) \text{ ist.}$$

Für diese $\psi(u, n)$ gelten dann die Relationen

$$\frac{\partial^i f(x, y)}{\partial y^s\, \partial y^{i-s}} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_a^{a+l} \int_b^{b+l} f(\xi, \eta)\, \frac{\partial^s\, \psi(\xi - x, n)}{\partial x^s}\, \frac{\partial^{i-s}\, \psi(\eta - y, n)}{\partial y^{i-s}}\, d\,\xi\, d\,\eta \tag{19}$$

$$(i \leqq m, \ s \leqq i).$$

Um die Gleichungen (19) z. B. für $i = m$, $s = h$ zu beweisen, haben wir zu zeigen, daß die Funktionen

$$\frac{\partial^h \psi(\xi - x, n)}{\partial x^h} \cdot \frac{\partial^{(m-h)} \psi(\eta - y, n)}{\partial y^{m-h}}$$

den Bedingungen (4) bis (8) für $\chi(\xi - x, \eta - y, n)$ genügen. Die Bedingungen (4) und (5) aber sind infolge (17) erfüllt, und wieder wegen (17) wird es genügen, die Bedingungen (6), (7) und (8) für das Integrationsintervall

$$x - \delta \leqq \xi \leqq x + \delta,\ y - \delta \leqq \eta \leqq y + \delta$$

als erfüllt nachzuweisen. Dann aber folgen die Gleichungen (6) aus den Gleichungen (18). Zum Beweise der Gleichungen (7) bemerken wir: Ist in

$$\int_{-\delta}^{+\delta} u^{\varkappa} \psi^{(h)}(u, n)\, d\, n \,.\int_{-\delta}^{+\delta} v^{i-\varkappa} \psi^{(m-h)}(v, n)\, d\, v \qquad (20)$$

$$\varkappa \leqq i$$

der Index $i < m$, so ist entweder $\varkappa < h$ oder $i - \varkappa < m - h$. Sei z. B. $\varkappa < h$, so geht das erste Integral mit wachsendem n wegen (16a) gegen Null. Das zweite geht für $i \quad \varkappa < m - h$ ebenfalls gegen Null; ist hingegen $i - \varkappa \geqq m - h$, z. B. gleich $m - h + j\ (j \geqq 0)$, so bleibt das zweite Integral wegen (15a) und

$$\left|\int_{-\delta}^{+\delta} v^{m-h+j} \psi^{(m-h)}(v, n)\, v\, d\right| \leqq \int_{-\delta}^{+\delta} v^{m-h+j} \psi^{(m-h)}(v, n) \,|\, d\, v \leqq$$

$$\leqq \delta^j \int_{-\delta}^{+\delta} |v^{m-h} \psi^{(m-h)}(v, n)|\, d\, v < \delta^j N(m-h) \qquad (21)$$

zwischen endlichen Grenzen. Es geht also der Ausdruck (20) für $i < m$ bei wachsendem n gegen Null und genau ebenso ist dasselbe für $i = m$, $\varkappa \neq h$ zu beweisen. Die Gleichungen

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\delta}^{+\delta} u^h \psi^{(h)}(u, n)\, d\, u \,.\int_{-\delta}^{+\delta} v^{(m-h)} \psi^{(m-h)}(v, n)\, d\, v =$$

$$(-1)^m h!\, (m - h)! \qquad (22)$$

aber folgen aus (16b), und damit ist auch (8) bewiesen.

Um nun festzustellen, ob die Funktionen (21), (22) von § 1

$$\psi(u, n) = \frac{p\,\alpha^{\frac{1}{p}}}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}\, n^{\frac{1}{p}} \left(\psi(u)\right)^{n} \tag{23}$$

$$\psi(u) = 1 - \alpha |u|^{p} + \omega(u)|u|^{p};\ \alpha > 0;\quad p > 1,$$
$$\psi(u) \geqq 0;\ \lim_{u \to 0} \omega(u) = \omega(0) = 0 \tag{23a}$$

m-fach differenzierbare Darstellungen (19) liefern, wollen wir zunächst annehmen, die Funktion $\psi(u)$ genüge außer der Bedingung, in jedem den Nullpunkt nicht enthaltenden Teilintervall von $(-l, +l)$ eine obere Schranke < 1 zu besitzen, auch noch den folgenden zwei Bedingungen:

1. Es ist $\psi(u)$ m-mal stetig differenzierbar in $< -l, +l >$.

2. Es ist $|\psi^{(i)}(u)| < A|u|^{p-i}$ in jedem Teilintervall von $(-l, +l)$ für

$$i = 1, 2, \ldots i_p;\ \text{wobei}\ i_p < p;\ i_p + 1 \geqq p \tag{24}$$

Dann sind nach einem Satz von H. Hahn[1]) die Bedingungen (13), (14), (14a), (15a), (16a) und (16b) erfüllt und wir haben nur noch das Erfülltsein der Relationen (17), (18) nachzuweisen. Für (17) ist dies selbstverständlich; um (18) nachzuweisen, bemerken wir: es setzt sich

$$\frac{d^{s}}{d u^{s}} \left(\psi(u)\right)^{n}$$

aus einer endlichen Zahl von Summanden der Form

$$P(n)\,(\psi(u))^{n-j}\,(\psi'(u))^{j_1}\,(\psi''(u))^{j_2} \ldots (\psi(u))^{j_s}.$$

zusammen. Da wir zu vorgegebenem $h > 0$ ein δ wählen könen, so daß

$$\psi(u) \leqq 1 - (\alpha - h)\,(u)^{p} \tag{25}$$

ist in $< -\delta, +\delta >$, so sind demnach die Summanden von

$$\int_{-\delta}^{+\delta} |u^{\varkappa}\,\psi^{(s)}(u, n)|\, d u$$

jeweils kleiner als

$$B \, . \, n^{\frac{1}{p}}\, P(n) \int_{0}^{\delta} u^{\varkappa + j_1 (p-1) + j_2 (p-2) + \quad + j_{i_p} (p - i_p)} (1 - \beta u^{p})^{n-j}\, d u.$$

---

[1] l. c. Hahn 1., p. 633.

Ist r der Grad des Polynoms $P(n)$, so verhalten sich diese Ausdrücke wieder nach einer Bemerkung von Hahn[1] bei wachsendem n so wie

$$n^{r-\frac{1}{p}(\varkappa+j_1(p-1)+\quad+j_{i_p}(p-i_p))}$$

und sind kleiner als

$$C\,n^{r-\frac{1}{p}(\varkappa+j_1(p-1)+\quad+j_s(p-s))}$$

Nun bestehen für

$$\frac{d^s}{du^s}(\psi(u))^n$$

die Relationen[1]

$$j_1+2j_2+\quad+sj_s=s,$$

$$j_1+j_2+\quad+j_s=r,$$

die sich durch Schluß von s auf $s+1$ beweisen lassen, da sie für $s=1$ gelten. Daraus aber folgt:

$$\int_{-\delta}^{+\delta}|u^{\varkappa}\,\psi^{(s)}(u,n)|\,du<C_1\,n^{\frac{s-\varkappa}{p}} \tag{26}$$

und da ebenso

$$\int_{-\delta}^{+\delta}|u^{i-\varkappa}\,\psi^{(i-s)}(u,n)|\,du<C_2\,n^{\frac{\varkappa-s}{p}} \tag{26a}$$

ist, so ist damit (18) bewiesen.

§ 3.

Entsprechend unseren Sätzen für die Integraldarstellung der Ableitungen von Funktionen der in § 2 (1) angegebenen Art lauten nunmehr die Sätze über ihre Darstellung durch Interpolationsverfahren. Unter den Gültigkeitsbedingungen der Formel (3) von § 2 gilt die Formel

$$f_{h,\,m-h}(x,y)'=\lim_{n\,->\,\infty}\sum_{j=1}^{k_n}f(\xi_j^{(n)},\,\eta_j^{(n)})\,\chi_i^{(n)}(x,y), \tag{1}$$

wenn die Funktionen $\chi_j^{(n)}(x,y)$ folgenden Bedingungen genügen.

1. Für jedes den Punkt x, y nicht enthaltende Teilintervall

$$\alpha_1<\xi<\beta_1,\ \ \alpha_2<\eta<\beta_2$$

[1] l. Hahn l., p. 632.

von
$$a \leqq \xi \leqq a + l, \; b \leqq \eta \leqq b + l$$
gibt es ein M, so daß
$$\sum_{\substack{\alpha_1 < \xi < \beta_1 \\ \alpha_2 < \eta < \beta_2}} \left| \chi_j^{(n)} (x, y) \right| < M \tag{2}$$
ist für alle n.

2. Für jedes solche Teilintervall ist
$$\lim_{n -> \infty} \sum_{\substack{\alpha_1 < \xi < \beta_1 \\ \alpha_2 < \eta < \beta_2}} \chi_j^{(n)} (x, y) = 0. \tag{3}$$

3. Es gibt eine Konstante N, so daß
$$\sum_{j=1}^{k_n} \left| (\xi_j^{(n)} - x)^\varkappa \, (\eta_j^{(n)} - y)^{m-\varkappa} \, \chi_j^{(n)} (x, y) \right| < N \tag{4}$$
$$(\varkappa = 0, 1, 2, \ldots m)$$
ist für alle n.

4. Es ist
$$\lim_{n -> \infty} \sum_{j=1}^{k_n} (\xi_j^{(n)} - x)^\varkappa \, (\eta_j^{(n)} - y)^{i-k} \, \chi_j^{(n)} (x, y) = 0, \tag{5}$$
für $i < m$, $\varkappa \leqq i$ und $i = m$, $\varkappa \leqq m$, $\varkappa \neq h$.

Es ist
$$\lim_{n -> \infty} \sum_{j=1}^{k_n} (\xi_j^{(n)} - x)^h \, (\eta_j^{(n)} - y)^{m-h} \, \chi_j^{(n)} (x, y) = h! \, (m - h)! \tag{6}$$

Dabei sind, wie bei Formel (9) von § 1 die Punkte $P_j^{(n)}$ mit den Koordinaten $\xi_j^{(n)}$, $\eta_j^{(n)}$ Punkte einer Menge $\mathfrak{M}^{(n)}$ von k_n Punkten, und die Vereinigungsmenge aller $\mathfrak{M}^{(n)}$ ist als im Intervall
$$a \leqq \xi \leqq a + l, \; b \leqq \eta \leqq b + l$$
dicht angenommen.

Der Beweis dieses Satzes ist offenbar ganz analog dem Beweis der Formel (3) von § 2.

Es sei nun eine Interpolationsdarstellung nach Formel (20) von § 1 gegeben:
$$f(x, y) = \lim_{n -> \infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_j^{(n)}, \eta_j^{(n)}) \, \varphi \, (\xi_j^{(n)} - x, \, \eta_j^{(n)} - y, n) \, \Delta f_n. \tag{7}$$

Die Funktionen $\varphi(u, v, n)$ mögen folgenden Bedingungen genügen.

1. Alle

$$\varphi_{\varkappa, i-\varkappa}(u, v, n) \quad (i \leqq m:\ \varkappa \leqq i)$$

sind stetig in

$$-l \leqq u \leqq +l, \quad -l \leqq v \leqq +l.$$

2. Es ist

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_{\varkappa, i-\varkappa}(u, v, n) = 0 \tag{8}$$

$$i \leqq m;\ \varkappa \leqq i$$

gleichmäßig in jedem den Punkt (0, 0) nicht enthaltenden Teilintervall

$$\alpha_1 \leqq u \leqq \beta_1;\ \alpha_2 \leqq v \leqq \beta_2$$

von

$$-l < u < +l, \quad -l < v + l.$$

3. Es gibt ein δ und ein N, so daß

$$\sum_{\substack{x-\delta < \xi < x+\delta \\ x-\delta < \eta < x+\delta}} \left| \left(x_j^{(n)}\right)^{\varkappa} \left(y_j^{(n)}\right)^{i-\varkappa} \varphi_{s, i-s}\left(x_j^{(n)}, y_j^{(n)}, n\right) \Delta f_n \right| < N \tag{9}$$

$$(i \leqq m;\ \varkappa \leqq i;\ s \leqq i$$

ist für alle n. Dabei ist $\xi_j^{(n)} - x = x_j^{(n)}$ und $\eta_j^{(n)} - y = y_j^{(n)}$ gesetzt.

4. Es gibt ein δ, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{x-\delta < \xi < x+\delta \\ x-\delta < \eta < x+\delta}} \left(x_j^{(n)}\right)^{\varkappa} \left(y_j^{(n)}\right)^{r-\varkappa} \varphi_{s, i-s}\left(x_j^{(n)}, y_j^{(n)}, n\right) \Delta f_n = 0 \tag{10}$$

$$(i \leqq m;\ s \leqq i \text{ und } r < i;\ \varkappa \leqq r \text{ oder } r = i;\ \varkappa \leqq r;\ \varkappa \neq s).$$

Es gibt ein δ, so daß

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{x-\delta < \xi < x+\delta \\ x-\delta < \eta < x+\delta}} \left(x_j^{(n)}\right)^{s} \left(y_j^{(n)}\right)^{i-s} \varphi_{s, i-s}\left(x_j^{(n)}, y_j^{(n)}, n\right) \Delta f_n = \\ = (-1)^i s!\,(i-s)! \tag{11}$$

$$(i \leqq m;\ s \leqq i).$$

Dann ist

$$\frac{\partial^i f(x, y)}{\partial x^s \partial y^{i-s}} = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{k_n} f\left(\xi_j^{(n)}, \eta_j^{(n)}\right) \varphi_{s, i-s}\left(\xi_j^{(n)} - x, \eta_j^{(n)} - y, n\right) \Delta f_n \tag{12}$$

$$(i \leqq m;\ s \leqq i).$$

Dies folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Satz, wenn wir $i = m$, $s = h$ setzen, da sich dessen erste und zweite Bedingung aus unserer zweiten Bedingung ohne weiteres ergeben.

Es sei nun $\varphi(u, v, n)$ eine Funktionenfolge, die den Bedingungen 1 und 2 von Formel (12) genügt und außerdem zwei weiteren Bedingungen $3a$ und $4a$, die aus unseren Bedingungen 3 und 4 [Formel (9) bis (11)] sich ergeben, wenn darin die Ausdrücke

$$\sum_{\substack{x-\delta<\xi<x+\delta \\ x-\delta<\eta<x+\delta}} \left(x_j^{(n)}\right)^p \left(y_j^{(n)}\right)^q \varphi_{r,s-r}\left(x_j^{(n)}, y_j^{(n)}, n\right) \Delta f^n$$

durch die Ausdrücke

$$\int_{-\delta}^{+\delta}\int_{-\delta}^{+\delta} u^p v^q \varphi_{r,s-r}(u, v, n)\, d u\, d v$$

ersetzt werden. Für diese $\varphi(u, v, n)$ gilt offenbar die Formel

$$\frac{\partial^i f(x, y)}{\partial x^s\, \partial y^{i-s}} = \lim_{n \to \infty} \int_a^{a+l}\int_b^{b+l} f(\xi, \eta)\, \varphi_{s,i-s}(\xi - x, \eta - y, n)\, d\xi\, d\eta \tag{13}$$

$$(i \leqq m;\ s \leqq i).$$

Wir fragen nun, wie müssen die Δf_n gewählt werden, damit für diese $\varphi(u, v, n)$ die Formel (12) gelte. Das wird offenbar dann der Fall sein, wenn wir aus den Bedingungen $3a$ und $4a$ die Bedingungen 3. und 4. von Formel (12_1) folgern können; und dazu wird es genügen, $\Delta f_n = h_n^2$ so klein zu wählen, daß, wenn ε_n eine gegen Null konvergierende Folge positiver Zahlen ist,

$$1. \qquad |\varphi_{\varkappa,i-\varkappa}(u_1, v_1, n) - \varphi_{\varkappa,i-\varkappa}(u_2, v_2, n)| < \varepsilon_n \tag{14}$$

$$(i \leqq m;\ \varkappa \leqq i)$$

ist, falls sich die Punkte (u_1, v_1) und (u_2, v_2) im Innern oder auf dem Rand eines Teilquadrats Δf_n befinden (eine solche Wahl von Δf_n ist immer möglich, wie aus der gleichmäßigen Stetigkeit der

$$\varphi_{\varkappa,i-\varkappa}(u, v, n) \text{ in } -l \leqq u \leqq +l,\ -l \leqq v \leqq l$$

folgt), sowie daß

$$\lim_{n \to \infty} h_n \int_{-\delta}^{+\delta}\int_{-\delta}^{+\delta} |\varphi_{\varkappa,i-\varkappa}(u, v, n)\, d u\, d v = 0 \tag{15}$$

$$\left((i \leqq m;\ \varkappa \leqq i;\ \delta \leqq \frac{1}{2}\right)$$

ist. Sind diese beiden Bedingungen erfüllt, so lassen sich die Bedingungen 3, 4 von Formel (12) aus den Bedingungen $3a$, $4a$ von Formel (13) in folgender Weise ableiten. Um zu beweisen, daß

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\delta}^{+\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} u^r v^s \varphi_{\varkappa, i-\varkappa}(u, v, n)\, du\, dv =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{\substack{x-\delta<\xi<x+\delta \\ x-\delta<\eta<x+\delta}} \left(x_j^{(n)}\right)^r \left(y_j^{(n)}\right)^s \varphi_{\varkappa, i-\varkappa}\left(x_j^{(n)}, y_j^{(n)}, n\right) \Delta f_n, \tag{16}$$

$$(i \leqq m;\ \varkappa \leqq i)$$

ist, bemerken wir: In jedem der Teilquadrate $\Delta f_n^{(j)}$ von

$$-\delta \leqq u \leqq +\delta, \quad -\delta \leqq v \leqq +\delta$$

können wir einen Punkt $(\rho_j^{(n)}, \sigma_j^{(n)})$ wählen, so daß

$$\int_{-\delta}^{+\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} u^r y^s \varphi_{\varkappa, i-\varkappa}(u, v, n)\, du\, dv =$$

$$= \sum{}' \left(\rho_j^{(n)}\right)^r \left(\sigma_j^{(n)}\right)^s \varphi_{\varkappa, i-\varkappa}\left(\rho_j^{(n)}, \sigma_j^{(n)}, n\right) \Delta f_n \tag{17}$$

ist, wobei die Summierung über alle Teilquadrate von

$$-\delta \leqq u \leqq +\delta, \quad -\delta \leqq v \leqq +\delta$$

zu erstrecken ist und durch Σ' angedeutet sei, daß am Rande eventuell nicht mit dem Inhalt Δf_n der Teilquadrate, sondern mit dem Inhalt kleinerer Rechtecke zu multiplizieren ist. Nun ist weiter

$$\Big| \sum{}' \left(\rho_j^{(n)}\right)^r \left(\sigma_j^{(n)}\right)^s \varphi_{\varkappa, i-\varkappa}\left(\rho_j^{(n)}, \sigma_j^{(n)}, n\right) \Delta f_n -$$

$$- \sum{}' \left(x_j^{(n)}\right)^r \left(y_j^{(n)}\right)^s \varphi_{\varkappa, i-k}\left(x_j^{(n)}, y_j^{(n)}, n\right) \Delta f_n \Big| \leqq$$

$$\leqq \Big| \sum{}' \left(\rho_j^{(n)}\right)^r \left(\sigma_j^{(n)}\right)^s \varphi_{\varkappa, i-\varkappa}\left(\rho_j^{(n)}, \sigma_j^{(n)}, n\right) \Delta f_n -$$

$$- \sum{}' \left(x_j^{(n)}\right)^r \left(y_j^{(n)}\right)^s \varphi_{\varkappa, i-\varkappa}\left(\rho_j^{(n)}, \sigma_j^{(n)}, n\right) \Delta f_n \Big| +$$

$$+ \Big| \sum{}' \left(x_j^{(n)}\right)^r \left(y_j^{(n)}\right) \varphi_{\varkappa, i-\varkappa}\left(\rho_j^{(n)}, \sigma_j^{(n)}, n\right) \Delta f_n -$$

$$- \sum{}' \left(x_j^{(n)}\right)^r \left(y_j^{(n)}\right) \varphi_{\varkappa, i-\varkappa}\left(x_j^{(n)}, y_j^{(n)}, n\right) \Delta f_n \Big|. \tag{18}$$

Für

$$\rho_j^{(n)} < \frac{1}{2}, \ \sigma_j^{(n)} < \frac{1}{2}, \ x_j^{(n)} < \frac{1}{2}, \ y_j^{(n)} < \frac{1}{2}$$

aber ist

$$\left|\left(\rho_j^{(n)}\right)^r\left(\sigma_j^{(n)}\right)^s-\left(x_j^{(n)}\right)^r\left(y_j^{(n)}\right)^s\right|\leqq\left|\left(\rho_j^{(n)}\right)^r\left(\sigma_j^{(n)}\right)^s-\left(x_j^{(n)}\right)^r\left(\sigma_j^{(n)}\right)^s\right|+$$

$$+\left|\left(x_j^{(n)}\right)^r\left(\sigma_j^{(n)}\right)^s-\left(x_j^{(n)}\right)^r\left(y_j^{(n)}\right)^s\right|\leqq 2\,h_n, \qquad (19)$$

da ja

$$\left|\rho_j^{(n)}-x_j^{(n)}\right|\leqq h_n,\quad\left|\sigma_j^{(n)}-y_j^{(n)}\right|\leqq h_n$$

und für

$$\rho<\frac{1}{2}, x<\frac{1}{2}\ \text{auch}\ \left|\rho^r-x^r\right|\leqq\left|\rho-x\right|\ \text{ist.}$$

Also ist nach (18) weiter

$$\Big|\sum{}'\left(\rho_j^{(n)}\right)^r\left(\sigma_j^{(n)}\right)^s\varphi_{\varkappa,\,i-\varkappa}\left(\rho_j^{(n)},\sigma_j^{(n)},n\right)\Delta f_n-$$

$$-\sum{}'\left(x_j^{(n)}\right)^r\left(y_j^{(n)}\right)^s\varphi_{\varkappa,\,i-\varkappa}\left(x_j^{(n)},y_j^{(n)},n\right)\Delta f_n\Big|\leqq$$

$$\leqq 2\,h_n\sum{}'\left|\varphi_{\varkappa,\,i-\varkappa}\left(\rho_j^{(n)},\sigma_j^{(n)},n\right)\right|\Delta f_n+4\,\varepsilon_n\,\delta^{r+s+2} \qquad (20)$$

Nun folgt aus (14) und (15)

$$\lim_{>\infty} h_n\sum{}'\left|\varphi_{\varkappa,\,i-\varkappa}\left(\rho_j^{(n)},\sigma_j^{(n)},n\right)\right|\Delta f_n=0 \qquad (21)$$

und damit

$$\lim_{n->\infty}\int_{-\delta}^{+\delta}\int_{-\delta}^{+\delta}u^r v^s\varphi_{\varkappa,\,i-\varkappa}(u,v,n)\,d\,u\,d\,v=$$

$$=\lim_{n->\infty}\sum{}'\left(x_j^{(n)}\right)^r\left(y_j^{(n)}\right)^s\varphi_{\varkappa,\,i-\varkappa}\left(x_j^{(n)},y_j^{(n)},n\right)\Delta f_n. \qquad (22)$$

Wegen (8) und $\lim\limits_{n->\infty}\Delta f_n=0$ können wir nun bei der Summierung auch am Rande mit dem Inhalt Δf_n der Teilquadrate multiplizieren und können diejenigen Punkte $\left(x_j^{(n)},y_j^{(n)}\right)$ weglassen, die auf dem Rande liegen, ohne das Bestehen der Relation (12) zu ändern. Damit aber ist (16) bewiesen und wir können aus den Bedingungen $4a$ von Formel (13) die Bedingungen 4 von Formel (12) folgern. Wegen

$$\Big|\left|\psi(u_1,v_1,n)\right|-\left|\psi(u_2,v_2,n)\right|\Big|\leqq\left|\psi(u_1,v_1,n)-\psi(u_2,v_2,n)\right|$$

können wir aber ebenso aus den Bedingungen $3a$ die Bedingungen 3 von Formel (12) folgern.

Wir wollen nun annehmen, es sei

$$\varphi(u,v,n)=\psi(u,n)\,\psi(v,n), \qquad (23)$$

wobei $\psi(u,n)$ eine Funktionenfolge nach Formel (23), (23a) von § 2 sei, die den Bedingungen (24) von § 2 genüge. Außerdem genüge $\psi(u)$ noch folgenden zwei Bedingungen:

1. Es ist $\psi^{(m)}(u)$ differenzierbar in $< -l, +l >$.
2. Es ist $|\psi^{(m+1)}(u)| < A$ in $< -l, +l >$. (24)

Dann ist

$$|\psi^{(h)}(u, n)| < C_h n^{\frac{1}{p}+h}, \; h = 0, 1, 2, \ldots, (m+1), \tag{25}$$

wobei C_h eine Konstante bedeutet. Daraus folgt unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Differentialrechung

$$|\varphi_{\varkappa, i-\varkappa}(u_1, v_1, n) - \varphi_{\varkappa, i-\varkappa}(u_2, v_2, n)| \leqq$$

$$\leqq |\psi^{(\varkappa)}(u_1, n)\,(\psi^{(i-\varkappa)}(v_1, n) - \psi^{(i-\varkappa)}(v_2, n))| +$$

$$+ |\psi^{(i-\varkappa)}(v_2, n)\,(\psi^{(\varkappa)}(u_1, n) - \psi^{(\varkappa)}(u_2\, n))| \leqq$$

$$\leqq C_\varkappa n^{\frac{1}{p}+\varkappa}\, C_{i-\varkappa+1} n^{\frac{1}{p}+i-\varkappa+1}\, h_n + C_{i-\varkappa}\, n^{\frac{1}{p}+i-\varkappa}\, C_{\varkappa+1}\, n^{\frac{1}{p}+\varkappa+1}\, h_n =$$

$$= C n^{\frac{2}{p}+i+1}\, h_n, \tag{26}$$

wenn (u_1, v_1) und (u_2, v_2) Punkte im selben Teilquadrat $\Delta f_n = h_n^2$ sind. Ebenso folgt aus (25)

$$h_n \int_{-\delta}^{+\delta} \int_{-\delta}^{+\delta} \left| \varphi_{\varkappa, i-\varkappa}(u, v, n) \right| d\,u\,d\,v \leqq C_\varkappa n^{\frac{1}{p}+\varkappa}\, C_{i-\varkappa}\, n^{\frac{1}{p}+i-\varkappa}\, h_n . 4\,\delta^2 =$$

$$= C n^{p\;+i}\, h_n. \tag{27}$$

Die Ungleichungen (26), (27) gelten für $i \leqq m$; $\varkappa \leqq i$. Es genügt also

$$\Delta f_n = h_n^2;\; h_n = \frac{l}{n^{m+3}} \tag{28}$$

zu setzen, um aus (26), (27) die Formeln (14), (15) und also auch (12) zu entnehmen.

Für die Fälle von Landau[1]

$$\psi(u) = 1 - u^2;\; l = 1$$

und Ch.-J. de la Vallée-Poussin[2]

$$\psi(u) = \left(\cos \frac{u}{2}\right)^2;\; l = 2\pi$$

sind die Bedingungen (24) von § 2 und 3 selbstverständlich erfüllt.

Zum Schlusse sei noch bemerkt: Für die gleichmäßige Konvergenz der Interpolationsverfahren (12) gilt ein entsprechender

---

[1] l. p. 9.
[2] l. p. 9.

Satz, wie der in § 1 abgeleitete: Ist $f(x, y)$ m-mal stetig differenzierbar in

$$a_1 \leqq x \leqq b_1; \quad a_2 \leqq y \leqq b_2,$$

so ist in jedem Teilintervall

$$\bar{a}_1 \leqq x \leqq \bar{b}_1; \quad \bar{a}_2 \leqq y \leqq \bar{b}_2$$

von

$$a_1 < x < b_1; \quad a_2 < y < b_2$$

die Konvergenz des Interpolationsverfahrens (12) eine gleichmäßige. Denn in jedem solchen Teilintervall läßt sich zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, so daß

$$|\omega_{s,\, i-s}(\xi, \eta, x, y)| < \varepsilon \tag{29}$$

$$(i \leqq m; \; s \leqq i)$$

ist für alle

$$|\xi - x| < \delta; \quad |\eta - y| < \delta.$$

Dann aber kann aus dem gleichmäßigen Bestehen von (2), (3), (4), (5) und (6) für

$$m = i; \; s = h$$

und

$$\chi_i^{(n)}(x, y) = \varphi_{s,\, i-s}(\xi_i^{(n)} - x, \eta_i^{(n)} - y, n)\, \Delta f_n$$

die gleichmäßige Konvergenz von (12) analog wie in § 1 gefolgert werden. Daß aber die Formeln (2) bis (6) gleichmäßig gelten, folgt wieder aus der gleichmäßigen Konvergenz

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_{s,\, i-s}(u, v, n) = 0 \tag{30}$$

$$(i \leqq m; \; s \leqq i)$$

in jedem Teilintervall von

$$-l < u < +l; \quad -l < v < +l$$

wie in § 1.