Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Das Zerfallen der Haupttangentenkurven auf algebraischen Netzflächen

Von

Hans Neudorfer in Wien

(Mit 1 Textfigur)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. März 1927)

I.

Unter einem Strahlnetz oder einer linearen Strahlkongruenz versteht man die Gesamtheit aller Strahlen, die zwei windschiefe Gerade, die Leit- oder Brennlinien des Netzes schneiden; diese können auch unendlich benachbart sein, und man spricht dann von einem parabolischen Netz.

Regelflächen, deren Erzeugenden einem Netz angehören, bezeichnen wir nach Herrn Mohrmann[1] als Netzflächen. Wir nehmen dieselben immer als algebraisch an und setzen noch voraus, daß sie keinem parabolischen Netz angehören.

In einer in diesen Berichten erschienenen Abhandlung[2] hat der Verfasser eine Methode zur Bestimmung der Haupttangentenkurven von Netzflächen gegeben, die es auch gestattet, die Frage nach dem Zerfall derselben (bei algebraischen Flächen) zu behandeln. Bevor wir unsere Aufgabe beginnen, müssen wir noch einige dazu notwendige Hilfsmittel besprechen.

Zwischen einem (nicht parabolischen) Strahlnetz und einer (nicht singulären) Fläche zweiter Ordnung Φ besteht eine Art Dualität. Bezeichnet man nämlich die beiden Punktreihen auf den Leitlinien kurz als Punktscharen des Netzes, so gilt:

1. Eine Fläche zweiter Ordnung hat zwei Erzeugendenscharen.	1′ Ein Strahlnetz hat zwei Punktscharen.
2. Zwei Erzeugende verschiedener Scharen bestimmen einen Punkt der Fläche (durch Schnitt).	2′. Zwei Punkt verschiedener Scharen bestimmen einen Strahl des Netzes (durch Verbindung).

Bezieht man daher die Punktscharen des Netzes projektiv auf die Erzeugendenscharen der Fläche zweiter Ordnung Φ, so erhält

---

[1] H. Mohrmann, Über die Haupttangentenkurven auf den Netzflächen. Math. Ann., Bd. 73 (1913), p. 571 bis 595.

[2] H. Neudorfer, Konstruktion der Haupttangentenkurven auf Netzflächen. Sitzungsber. Wien, Abt. IIa, Bd. 134 (1925), p. 205 bis 214.

man eine ausnahmslos eineindeutige Abbildung der Strahlen des Netzes auf die Punkte von Φ.

Über diese Abbildung gelten nun folgende, leicht zu beweisende Sätze:

Satz 1: *Die stereographische Projektion der Bildfläche zweiter Ordnung aus einem ihrer Punkte auf eine beliebige Ebene ist zu jedem ebenen Schnitt des Netzes projektiv, der den Bildstrahl des Projektionszentrums enthält und umgekehrt.* (Mohrmann a. a. O.)

Satz 2: *Jedes stereographische Bild der Fläche zweiter Ordnung ist korrelativ zu einem Zentralbild des Netzes, sobald das Projektionszentrum dafür dem Bildstrahl des Zentrums der stereographischen Projektion angehört.*

Aus 1 und 2 ergibt sich:

Satz 3: *Der Schnitt eines Netzes mit einer Ebene ω ist zu jeder Projektion desselben aus einem Punkte o korrelativ, wenn ω und o mit dem gleichen Netzstrahl vereinigt liegen; den Schnittpunkten der Leitlinien mit ω entsprechen die Bilder der Leitlinien.*

Für Netzflächen folgt daraus:

Satz 4: *Für eine Netzfläche ist jeder scheinbare Umriß zu einem ebenen Schnitt korrelativ, sobald Projektionszentrum und schneidende Ebene den gleichen Netzstrahl gemein haben.*

Zufolge der besprochenen Abbildung eines Strahlnetzes wird einer Netzfläche eine Bildkurve auf Φ entsprechen; diese wird mit der Fläche gleichzeitig algebraisch oder transzendent sein. Die den Doppel-, Rückkehrpunkten usw. jener Kurve entsprechenden Erzeugenden bezeichnen wir als Doppel-, Rückkehrerzeugende usw. Jede Netzfläche kann, da wir ja nur algebraische in Betracht ziehen, durch eine (n_1, n_2) Korrespondenz zwischen den Leitlinien F_1, F_2 erzeugt werden, so daß durch jeden Punkt von F_1 (F_2) n_2 (n_1) Erzeugende gehen; wir bezeichnen sie dann als eine (n_1, n_2) Fläche. Die Bildkurve wird die Erzeugenden der ersten oder zweiten Schar von Φ in n_2, beziehungsweise n_1 Punkten schneiden.

Die von den Punkten einer Leitlinie ausgehenden Erzeugenden werden im allgemeinen getrennt sein, für gewisse Punkte können aber zwei oder mehrere Erzeugende benachbart werden; wir sprechen dann von Kuspidalpunkten erster, zweiter, Ordnung und bezeichnen solche Erzeugende als Torsallinien. Einer Torsallinie n-ter Ordnung wird auf der Bildkurve ein Punkt entsprechen, in dem eine Erzeugende von Φ die Kurve in n-ter Ordnung berührt und umgekehrt. Dies führt in Verbindung mit Satz 1 zu einer Konstruktion der Torsallinien:

Man schneide die Netzfläche mit einer Ebene ε und lege aus den Schnittpunkten der Leitlinien mit die Tangenten an die Schnittkurve; durch deren Berührungspunkte gehen die Torsallinien.[1]

Satz 1 zeigt ferner: Die Schnittkurve der Fläche mit ε trifft die Verbindungsgerade der Punkte $f_1 = [\varepsilon F_1]$, $f_2 = [\varepsilon F_2]$ (F_1, F_2 bedeuten in Hinkunft die Leitlinien) außer in f_1 und f_2 noch in so vielen Punkten, als die Multiplizität dieser Geraden beträgt.

Aus dem Vorstehenden und Satz 4 folgt noch: Bedeutet U den scheinbaren Umriß einer Netzfläche, F_1', F_2' die Bilder der Leitlinien, so sind jene Schnittpunkte von U mit F_1', F_2', in denen keine der beiden Geraden Tangente von U ist, die Bilder der Kuspidalpunkte; ein Kuspidalpunkt zweiter Ordnung bildet sich als gewöhnliche Spitze ab, fällt aber die Spitzentangente mit F_1' zusammen, so liegt ein gewöhnlicher Kuspidalpunkt vor usw.[2] Für Zweige von U, die durch $f' = [F_1' F_2']$ gehen, gilt das Bemerkte nicht. Wegen späterer Anwendung fassen wir noch zusammen:

Satz 5: *Die Schnittpunkte des scheinbaren Umrisses U einer Netzfläche mit F_1' und F_2' sind die Bilder der Kuspidalpunkte. Die Ordnung eines Kuspidalpunktes ist gerade (ungerade), wenn der entsprechende Zweig von U F_1', beziehungsweise F_2' mit gerader (ungerader) Multiplizität schneidet.*

Liegt das Projektionszentrum auf einer gewöhnlichen k-fachen Erzeugenden, so gehen aus f', abgesehen von F_1' und F_2', noch k Tangenten an den scheinbaren Umriß; wenn es hingegen auf einer gewöhnlichen Rückkehrerzeugenden liegt, erhält man einen durch f' gehenden Zweig von U. Allgemein gilt, wie leicht aus Satz 4 folgt:

Satz 6: *Eine Doppel-, beziehungsweise Rückkehrerzeugende bildet sich als Doppel-, beziehungsweise Wendetangente ab, und umgekehrt.*

Es mögen noch einige Bemerkungen über die charakteristischen Zahlen von Netzflächen gemacht werden. Aus Satz 1 erhält man unmittelbar (Mohrmann a. a. O.): Ordnung, Rang, Geschlecht einer Netzfläche, sind gleich den entsprechenden Zahlen der Bildkurve; insbesondere ist die Ordnung einer $(n_1, n_2): n = n_1 + n_2$. Es bezeichne künftig a den Rang der Netzfläche, t_1^k, t_2^k die Zahl der Kuspidalpunkte k-ter Ordnung, die auf F_1, beziehungsweise F_2

---

[1] Jene Berührungspunkte, welche Wendepunkte sind, entsprechen Torsallinien zweiter Ordnung usw.

[2] Ein etwa auf F_1' liegender Doppelpunkt von U stellt natürlich nicht einen höheren Kuspidalpunkt dar, sondern entsprechend den beiden Zweigen, einen gewöhnlichen, der aber gemeinsamer Kuspidalpunkt von zwei Torsallinien ist.

liegen. Aus der gegebenen Konstruktion der Kuspidalpunkte folgen die Formeln (Mohrmann a. a. O.):

$$t_1^1 + 2\,t_1^2 + 3\,t_1^3 + \quad . = a - 2\,n_1$$

$$t_2^1 + 2\,t_2^2 + 3\,t_2^3 + \quad . = a - 2\,n_2$$

und daraus, wenn $t_1^k + t_2^k = t^k$, $n = n_1 + n_2$ gesetzt wird:

$$t^1 + 2\,t^2 + 3\,t^3 + . \quad . = 2\,(a - n). \tag{1}$$

Von Wichtigkeit sind für uns noch jene Spitzen des scheinbaren Umrisses U, die nicht auf F_1' oder F_2' fallen. Sie rühren von jenen Haupttangenten der Fläche her, die durch das Projektionszentrum o gehen; ihre Anzahl r ist, wenn o nicht auf der Fläche liegt, gleich dem Grade M der Haupttangentenkongruenz (daß Ordnung und Klasse dieser Kongruenz gleich sind, geht unmittelbar aus Satz 4 hervor). Angenommen o liege auf einer gewöhnlichen k-fachen Erzeugenden; wie groß ist r?[1] Bezeichnet R die Zahl aller Spitzen von U, so gilt:

$$R = r + t^2 + 2\,t^3 + 3\,t^4 +$$

Dann ist die Ordnung von $U: a - 2\,k$ und $n - k$ die Klasse. Beträgt die Zahl der Doppelpunkte D, so ist:

$$n - k = (a - 2\,k)\;(a - 2\,k - 1) - 2\,D - 3\,R$$

$$2\,p = (a - 2\,k - 1)\,(a - 2\,k - 2) - 2\,D - 2\,R,$$

und daraus:

$$n - k - 2\,p = 2\,(a - 2\,k - 1) - R$$

$$R = 2\,p - 2 + 2\,(a - n) + n - 3\,k,$$

und wegen Formel (1):

$$R = 2\,p - 2 + t^1 + 2\,t^2 + 3\,t^3 + \qquad + n - 3\,k,$$

daher:

$$r = 2\,p - 2 + n + t^1 + t^2 + t^3 + \qquad - 3\,k.$$

Da für $k = 0$ $r = M$ wird, folgt:

$$M = 2\,p - 2 + n + \sum_{i=1} t^i \tag{2}$$

also allgemein:

$$r = M - 3\,k. \tag{3}$$

Wegen späterer Anwendung soll M für den Fall berechnet werden, daß die Fläche nur Torsallinien zweiter Ordnung besitzt. Wegen (1) ist zunächst:

[1] Der scheinbare Umriß hat in diesem Fall die Ordnung $a - 2\,k$.

$$a - n = t^2,$$

daher:

$$M = 2p - 2 + a. \tag{4}$$

Hat man in einer Ebene eine Kurve und ein Punktepaar f_1, f_2, so kann man dieses Gebilde als ebenen Schnitt einer Netzfläche betrachten, so daß f_1, f_2 die Schnittpunkte der Leitlinien mit der Ebene sind; es gibt unendlich viele solcher Flächen, die aber alle zueinander kollinear sind. Dual dazu: hat man in einer Ebene eine Kurve und ein Geradenpaar F'_1, F'_2, so kann man dieses Gebilde als scheinbaren Umriß einer Netzfläche ansehen, deren Leitlinien als die Geraden F'_1, F'_2 erscheinen; es gibt wieder unendlich viele zueinander projektive Flächen, welchen diese Eigenschaft zukommt.

Durch die beiden Figuren: Kurve und Punktepaar, Kurve und Geradenpaar, kann daher jede Netzfläche ersetzt werden, wenn es sich um die Untersuchung von projektiven Eigenschaften, wie Zerfall der Haupttangentenkurven, handelt.

Es möge noch ein Beispiel folgen. Gegeben sei eine Kurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt und einer Spitze, als scheinbarer Umriß U einer Netzfläche; die Bilder der Leitlinien F'_1, F'_2 seien eine Doppeltangente und eine Gerade durch die Spitze, die aber U nicht berühren soll. Dann liegen auf der ersten Leitlinie keine Kuspidalpunkte, auf der zweiten zwei gewöhnliche und ein Kuspidalpunkt zweiter Ordnung. Da U von der Klasse 7 ist, besteht zwischen den Leitlinien eine (7, 5) Korrespondenz; die Fläche ist mithin von der zwölften Ordnung und vom Geschlecht $p = 1$. Das Projektionszentrum liegt auf einer fünffachen Flächenerzeugenden; denn aus $[F'_1 F'_2]$ sind noch fünf Tangenten an U möglich. Weiters haben wir $3.4.2 - 6 - 8 = 10$ Wendetangenten und daher 4 Doppeltangenten. Die Fäche hat also 10 Rückkehrerzeugende, 3 Doppelerzeugende und eine fünffache Erzeugende; da letztere für $\binom{5}{2} = 10$ Doppelerzeugende zählt, haben wir 23 singuläre Erzeugende. Wir berechnen noch zur Kontrolle das Geschlecht der Fläche; für dieses gilt (Mohrmann a. a. O.):

$$p = (n_1 - 1)\ (n_2 - 1) - d - r,\ (n_1 = 7,\ n_2 = 5),$$

wo d und r die Zahl der Doppel-, beziehungsweise Rückkehrerzeugenden ist, und erhalten $p = 1$.

II.

Die algebraischen Netzflächen sind dadurch ausgezeichnet, daß ihre Haupttangentenkurven algebraisch sind.

Für die Ermittlung dieser Kurven habe ich folgendes Verfahren angegeben (Neudorfer a. a. O.):

Um eine Haupttangentenkurve einer Netzfläche zu erhalten, ermittle man für einen beliebigen Punkt s (der aber auf keiner Leitlinie liegen darf) als Lichtquelle die Eigenschattengrenze und schneide die Fläche mit einer Ebene σ, die den Netzstrahl enthält, der durch s geht. Man bekommt dadurch auf jeder Erzeugenden ein Punktepaar, das mit dem durch die Leitlinien ausgeschnittenen Paar eine Involution bestimmt. Die Doppelpunkte aller dieser Involutionen erfüllen eine Haupttangentenkurve der Netzfläche und im allgemeinen eine einzige.

Unsere weitere Aufgabe soll nun sein zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine so erhaltene Haupttangentenkurve in zwei getrennte Teile zerfällt, deren jeder also die Erzeugenden der Fläche nur in einem Punkte schneidet. Ist dies einmal der Fall, so kann man aus einer solchen Kurve und den beiden Leitlinien, die ja auch Haupttangentenkurven sind, nach dem Satz von Serret[1] alle übrigen erhalten; daraus folgt, daß alle Haupttangentenkurven zerfallen.

Wir projizieren die Eigenschattengrenze aus s auf eine Ebene und erhalten einen scheinbaren Umriß U der Netzfläche; F'_1, F'_2 seien die Bilder der Leitlinien. Die Ebene σ erscheint, da sie ja denselben Netzstrahl wie s enthalten soll, als Gerade σ' durch den Punkt $[F'_1\, F'_2]$. Aus der gegebenen Konstruktion folgt nun: Ist E' eine Tangente von U mit dem Berührungspunkt e' und sind f'_1, f'_2, $\bar{\sigma}'$ ihre Schnittpunkte, beziehungsweise mit F'_1, F'_2, σ', so suche man die Doppelpunkte der durch die Paare e', $\bar{\sigma}'$; f'_1, f'_2 bestimmten Involution; diese durchlaufen das Bild einer Haupttangentenkurve.

Man kann auch dual verfahren: Es sei K der Schnitt der Fläche mit einer Ebene σ, $f_1 = [\sigma F_1]$, $f_2 = [\sigma F_2]$, s ein Punkt der Geraden $[f_1\, f_2]$, p ein Punkt von K und P seine Tangente. Von der durch die Geradenpaare P, $[p\, s]$; $[p\, f_1]$, $[p\, f_2]$ bestimmten Involution ermittle man die Doppelstrahlen; diese durchlaufen den Schnitt von σ mit der Torse einer Haupttangentenkurve.

Wir gehen zum Früheren zurück und wählen F'_1, F'_2 als X-, beziehungsweise Y-Achse eines inhomogenen projektiven Koordinatensystems. Bei geeigneter Wahl des Einheitspunktes kann die Gleichung von σ' als $Y = X$ angenommen werden. Es soll nun die Gleichung des Bildes H, der durch σ bestimmten Haupttangentenkurve aufgestellt werden. Die laufenden Koordinaten von H seien: X, Y, die von $U: x, y$; letztere denken wir uns als Funktionen

[1] Der Satz von Serret besagt, daß vier Haupttangentenkurven einer Regelfläche deren Erzeugenden unter konstantem Doppelverhältnis schneiden.

eines (etwa ortsuniformisierenden) Parameters t. Nun bestimmen wir die Doppelstrahlen der durch $X, Y; \sigma', [o\,e']$ $(o = [X\,Y])$ bestimmten Involution. Ihre Gleichungen müssen die Form haben:

$$\left.\begin{array}{l} Y + \lambda X = 0 \\ Y - \lambda X = 0 \end{array}\right\}. \qquad (1)$$

und da sie auch zu $Y - X = 0$ und $Yx - Xy = 0$ harmonisch sind, auch von der Form sein:

$$\left.\begin{array}{l} Yx - Xy + \mu(Y - X) = 0 \\ Yx - Xy - \mu(Y - X) = 0 \end{array}\right\}. \qquad (2)$$

Die Vergleichung von (1) und (2) gibt:

$$\lambda = -\frac{y+\mu}{x+\mu}, \quad \lambda = \frac{y-\mu}{x-\mu}$$

oder:

$$\frac{y+\mu}{x+\mu} + \frac{y-\mu}{x-\mu} = 0,$$

woraus:

$$\mu^2 = xy$$

folgt. Die Gleichungen der Doppelstrahlen lauten daher:

$$Y(x + \sqrt{xy}) - X(y + \sqrt{xy}) = 0,$$

wo für $\sqrt{xy}$ der gleiche Wert zu nehmen ist.

Schneiden wir die Doppelstrahlen mit der Tangente E' des Punktes e', deren Gleichung

$$(Y - y)\,x' - (X - x)\,y' = 0$$

ist, so erhält man die gesuchte Darstellung von H:

$$Y = \frac{(x'y - xy')\,(y + \sqrt{xy})}{x'y + x'\sqrt{xy} - xy' - y'\sqrt{xy}},$$

$$X = \frac{(x'y - xy')\,(x + \sqrt{xy})}{x'y + x'\sqrt{xy} - xy' - y'\sqrt{xy}},$$

oder wenn zur Abkürzung: $R = \dfrac{x' - y'}{x'y - xy'}$ gesetzt wird:

$$Y = \frac{y + \sqrt{xy}}{1 + R\sqrt{xy}}, \quad X = \frac{x + \sqrt{xy}}{1 + R\sqrt{xy}}.$$

Die beiden Werte von $\sqrt{xy}$ liefern auf jeder Tangente E' zwei Punkte von H.

Denken wir uns über der komplexen x-Ebene die zu U gehörige Riemann'sche Fläche $\mathfrak{F}$ ausgebreitet und für einen Punkt (x, y') $(x . y \neq 0)$ einen der Werte von $\sqrt{xy}$ festgesetzt. Nun setzen wir mit diesem Anfangswert $\sqrt{xy}$ über die ganze Fläche $\mathfrak{F}$ analytisch fort; dann erhalten wir eine Überlagerungsfläche $\mathfrak{F}^*$ der ursprünglichen, welche dieselbe, den zwei Werten von $\sqrt{xy}$ entsprechend, im allgemeinen zweiblätterig überdecken wird. Die Erzeugenden der Netzfläche sind eineindeutig auf die Punkte von $\mathfrak{F}$ bezogen; soll nun die Haupttangentenkurve H, deren Punkte eineindeutig auf $\mathfrak{F}^*$ bezogen sind,[1] zerfallen, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{F}^*$ zerfällt. Dies tritt aber nur dann ein, wenn die analytische Fortsetzung von $\sqrt{xy}$ immer zum Anfangswert zurückführt, also $\sqrt{xy}$ auf $\mathfrak{F}$ eindeutig ist, d. h. $\sqrt{xy}$ ist eine rationale Funktion von x und y:

Satz 7: *Für das Zerfallen der Haupttangentenkurven ist notwendig und hinreichend, daß die Gleichung eines (und damit jedes) scheinbaren Umrisses, bezogen auf die Bilder der Leitlinien als Koordinatenachsen, sich auf die Form bringen läßt:* $\sqrt{xy} =$ *Rationale Funktion von* x, y.

Angenommen, dies sei der Fall; deuten wir x, y als Linienkoordinaten u, v, so erhalten wir eine zur ursprünglichen Kurve U korrelative Kurve K, deren Gleichung auf die Form $\sqrt{uv} = R(u, v)$ gebracht werden kann. Den Koordinatenachsen entsprechen dann zwei Koordinateneckpunkte des Linienkoordinatensystems, dessen dritte Ecke der uneigentlichen Geraden des ersten Systems zugeordnet ist. Nach Satz 4 läßt sich aber K als Schnitt der Fläche mit einer Ebene ε ansehen, wobei die zuvorgenannten beiden Koordinateneckpunkte die Schnitte f_1, f_2 der Leitlinien mit ε sind. Hat man also einen ebenen Schnitt K einer Netzfläche und nimmt f_1, f_2 als Eckpunkte eines inhomogenen Linienkoordinatensystems, so ist für das Zerfallen der Haupttangentenkurven notwendig und hinreichend, daß die Gleichung von K in die Form $\sqrt{uv} = R(u, v)$ gebracht werden kann. Dies läßt sich auch noch anders aussprechen. Führt man nämlich in einem rechtwinkligen Cartesischen Koordinatensystem in bekannter Weise Plücker'sche Linienkoordinaten u, v ein, so hat dieses System die uneigentlichen Punkte der früheren Koordinatenachsen zu Koordinateneckpunkten und der Anfangspunkt wird zum uneigentlichen Punkt. Kann nun die Gleichung einer Kurve auf die Form $\sqrt{u^2 + v^2} = R(u\, v)$ gebracht werden, so bezeichnet man sie als

---

[1] Denn R wird bei Einführung von $t = x$ rational und y.

Laguerre'sche Richtungskurve.[1] Führt man $u+iv=u'$, $u-iv=v'$ als neue Linienkoordinaten ein, so hat das neue System die Kreispunkte zu Fundamentalpunkten und $\sqrt{u^2+v^2}=$ $=R(u,v)$ nimmt die Form $\sqrt{u'\,v'}=R'(u',v')$ an, also unsere obige Gestalt. Man kann also aussprechen:

Satz 8: *Für das Zerfallen der Haupttangentenkurven ist notwendig und hinreichend, daß irgendein ebener Schnitt der Fläche, eine projektiv verallgemeinerte Laguerre'sche Richtungskurve ist, wobei an Stelle der Kreispunkte die Schnittpunkte der Kurvenebene mit den Leitlinien treten.*

Über Laguerre'sche Richtungskurven sei noch folgendes bemerkt. Gewöhnlich findet man die Erklärung, es seien Kurven, deren Tangenten sich orientieren lassen; dies ist geeignet, Irrtümer zu veranlassen. Man muß vielmehr, und dies gilt auch für die projektive Verallgemeinerung, folgendermaßen vorgehen: Es sei in einer Ebene ein Punktepaar (als absolutes) gegeben, das wir zu Koordinatenecken eines inhomogenen Linienkoordinatensystems wählen; den Koordinaten u, v einer Geraden fügen wir als dritte $\sqrt{u\,v}$ hinzu und unterscheiden bei gegebenen u, v, den beiden Werten von $\sqrt{u\,v}$ entsprechend, zwei Gebilde, die wir nach Herrn Study als Speere bezeichnen. Durch ein Punktepaar ist also eine Speermannigfaltigkeit bestimmt. Nun ist unschwer zu erkennen, daß eine projektiv verallgemeinerte Laguerre'sche Richtungskurve als Einhüllende von Speeren betrachtet werden kann. Im folgenden wollen wir solche Kurven kurz als Laguerre'sche Kurven bezeichnen. Jede Laguerre'sche Kurve gehört also mindestens einer Speermannigfaltigkeit an; die beiden Punkte, durch welche letztere bestimmt ist, sollen die absoluten Punkte der Kurve heißen (die aber derselben nicht angehören müssen).

Für das Zerfallen der Haupttangentenkurven lassen sich leicht notwendige Bedingungen aufstellen; als notwendig und hinreichend dafür fanden wir das Zerfallen der Überlagerungsfläche $\mathfrak{F}^*$. Damit dies eintritt, ist sicher erforderlich, daß $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^*$ gleichverzweigt sind, also $\mathfrak{F}^*$ auf $\mathfrak{F}$ unverzweigt ist. Es fragt sich nun, ob letzteres auch hinreichend ist. Ein Satz der Topologie besagt nun: Jede n-blätterige Überlagerungsfläche einer Fläche vom Geschlechte Null, die auf dieser unverzweigt ist, zerfällt in n-Blätter.[2] Für $p>o$ gilt dies nicht, wie man sich leicht überzeugen kann; denn denkt man sich

---

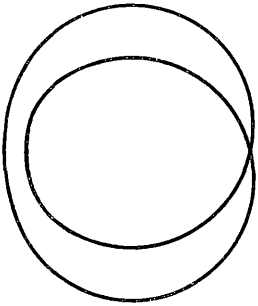
[1] Courbe de direction bei Laguerre Oeuvres II, p. 621.

Man vgl. auch Loria: Spez. algebr. und transz. ebene Kurven. Leipzig (1910), Bd. I, p. 436.

[2] Man sehe: Kerékjártó: Vorlesungen über Topologie. Bd. I, 4. Abschnitt, § 5.

über untenstehender Figur einen Zylinder errichtet und denselben torusförmig zusammengebogen, so erhält man eine zweiblätterige Überlagerungsfläche des Torus, die offenbar nicht zerfällt. Da das Geschlecht p von $\mathfrak{F}$ mit dem der Netzfläche übereinstimmt, ist die angegebene notwendige Bedingung, nur für rationale Netzflächen hinreichend; für $p > o$ können daher bloß topologische Hilfsmittel nicht ausreichen.

Es möge zunächst die Unverzweigtheit von $\sqrt{xy}$ auf $\mathfrak{F}$ untersucht und geometrisch gedeutet werden. $\sqrt{xy}$ kann auf $\mathfrak{F}$ nur dort verzweigt sein, wo $x.y$ gleich 0 oder ∞ wird. Angenommen, es sei $x = y = 0$; einen Zweig von U können wir dann mittels einer ortsuniformisierenden Veränderlichen t so darstellen:



$$y = a\, t^{\alpha} + \qquad (a \neq 0)$$
$$x = t^{\beta},$$

wo der Ausdruck für y eine in einer gewissen Umgebung von $t = 0$ konvergierende Potenzreihe ist und β eine positive ganze Zahl bedeutet; $x.y$ beginnt dann mit $t^{\alpha+\beta}$. Eine Umgebung der Stelle $x = y = 0$ auf $\mathfrak{F}$ wird mittels t auf einen schlichten Bereich der t-Ebene abgebildet; das Bild von $\mathfrak{F}^*$ muß dann über diesem Bereich in getrennten Blättern verlaufen, d. h. $\alpha + \beta \equiv 0\,(2)$ sein, also haben α und β gleichen Geradheitscharakter. α und β sind aber die Schnittmultiplizitäten des Zweiges mit der x-, beziehungsweise y-Achse: Die Zweige von U, welche durch den Ursprung gehen, müssen mit den Achsen mod. zwei kongruente Schnittmultiplizitäten haben.

Durch

$$y = a + b\, t^{\alpha} + \qquad (a \neq 0)$$
$$x = t^{\beta}$$

wird ein Zweig durch einen im Endlichen gelegenen Punkt der y-Achse dargestellt. Für die Unverzweigtheit von $\sqrt{xy}$ ist daher $\beta \equiv 0\,(2)$ erforderlich, d. h. die Schnittmultiplizität des Zweiges mit der y-Achse muß gerade sein; analog für Zweige, deren Ursprung auf Punkten der x-Achse liegt.

Ein Punkt der uneigentlichen Geraden, der auf keiner der Achsen liegt, geht durch die projektive Transformation:

$$x' = \frac{1}{x}, \quad y' = \frac{1}{y}$$

oder homogen:

$$x' : y' : z' = z : y : x$$

in einen nicht in den Ursprung fallenden und im Endlichen gelegenen Punkt der y'-Achse über, also müssen die Entwicklungen eines Zweiges durch einen solchen Punkt die Form haben:

$$y = a\,t^{-\alpha} + \qquad (a \neq 0 \text{ und } \alpha \text{ positiv ganz})$$

$$x = t^{-\alpha}.$$

Da $x.y$ mit einer geraden Potenz von t beginnt, hat $\sqrt{xy}$ keine Verzweigung.

Der uneigentliche Punkt der x-Achse kommt durch obige Transformation in den Ursprung und die x-Achse geht in sich über. Für einen entsprechenden Zweig gilt daher:

$$y = a\,t^{-\alpha} + \qquad (\text{wo } \alpha, \beta > 0 \text{ und } \beta - \alpha > 0)$$

$$x = t^{-\beta}.$$

Also muß $\alpha + \beta \equiv 0\,(2)$ sein; dann ist aber auch $\beta - \alpha \equiv 0\,(2)$ und dieses ist die Schnittmultiplizität des Zweiges mit der x-Achse. Man kann mithin sagen:

Satz 9: *Für die Unverzweigtheit von $\sqrt{xy}$ auf der Riemann'schen Fläche einer algebraischen Kurve ist notwendig und hinreichend, daß die Zweige der Kurve mit den Achsen gerade Schnittmultiplizitäten haben; für Zweige durch den Ursprung müssen sie bezüglich beider Achsen von gleichem Geradheitscharakter sein. Nur wenn $p = 0$ ist, sind diese Bedingungen auch für die Eindeutigkeit von $\sqrt{xy}$ hinreichend, sonst nur notwendig.*

Liegt z. B. ein Doppelpunkt von U auf einer Achse, aber nicht im Ursprung, so ist wohl die Schnittmultiplizität gerade, aber es ist zu bedenken, daß zu einem Doppelpunkt zwei Entwicklungen gehören, und mindestens einer der Zweige schneidet die Achse mit der Multiplizität eins.

Geht U nicht durch den Ursprung und beschränkt man sich auf den einfachsten Fall, so können die Schnittpunkte von U mit den Achsen entweder Spitzen sein, deren Tangenten aber mit diesen nicht zusammenfallen dürfen, oder Punkte, welche die Achsen zu gewöhnlichen Tangenten haben.[1]

Der zu Satz 9 duale Satz lautet:

Satz 10: *Damit eine Kurve K in bezug auf ein Punktepaar f_1, f_2 (als absolutes) Laguerre'sche Kurve sei, ist notwendig, daß jede durch f_1, beziehungsweise f_2 gehende Tangente von K für eine gerade Zahl gewöhnlicher benachbarter Tangenten zählt.*

[1] Wir wollen dann sagen, U biete den einfachen Fall dar.

Gibt es Tangenten, die mit $[f_1 f_2]$ zusammenfallen, so müssen die Ordnungen einer jeden in bezug auf f_1 und f_2 gleichen Geradheitscharakter besitzen. Nur für rationale Kurven sind diese Bedingungen auch hinreichend.

Es kann also beispielsweise f_1 keine Spitze von K sein, da die Spitzentangente für drei benachbarte Tangenten zählt, außer sie fällt mit $[f_1 f_2]$ zusammen; auch eine von $[f_1 f_2]$ verschiedene Doppeltangente etwa durch f_1 darf nicht vorkommen. (Man vergleiche das frühere Beispiel des Doppelpunktes.)

Ist $[f_1 f_2]$ nicht Tangente von K und beschränkt man sich wieder auf den einfachsten Fall, so sind f_1, f_2, beziehungsweise m-, n-fache Punkte mit getrennten und gewöhnlichen Tangenten; die weiteren durch f_1, beziehungsweise f_2 gehenden Tangenten sind Wendetangenten; dies hat bereits Humbert bemerkt.[1]

Es sei nun eine Netzfläche gegeben. Wir konstruieren einen scheinbaren Umriß U und können voraussetzen, daß U nicht durch $[F_1' F_2']$ geht (d. h. das Projektionszentrum darf keiner Rückkehrerzeugenden angehören; siehe p. 117).

Für das Zerfallen der Haupttangentenkurven fanden wir als notwendig (Satz 9), daß jeder Zweig von U die Bilder der Leitlinien mit geraden Multiplizitäten schneidet, was aber nach Satz 5 bedeutet:

Satz 11: *Für das Zerfallen der Haupttangentenkurven einer Netzfläche ist notwendig, daß dieselbe keine oder nur Torsallinien gerader Ordnung besitzt. Nur für rationale Flächen ist diese Bedingung auch hinreichend.*

Zu diesem Resultat ist auch Herr Mohrmann (a. a. O.) gelangt, indem er das Geschlecht der Haupttangentenkurven bestimmt. Dieses läßt sich auch leicht aus unseren Überlegungen ableiten; denn es stimmt mit dem Geschlecht der Überlagerungsfläche $\mathfrak{F}^*$ überein. Nun gilt für eine n-blätterige Überlagerungsfläche einer Fläche vom Geschlechte p die Formel von Hurwitz:[2]

$$P-1=n(p-1)+\frac{1}{2}\sum_i (n-c_i),$$

wo c_i die Ordnung des i-ten Verzweigungspunktes der Überlagerungsfläche bedeutet. In unserem Fall ist $n=2$, daher $c_i=1$ und ein Verzweigungspunkt entspricht immer einer Torsallinie ungerader

[1] G. Humbert: Sur le theorème d'Abel et quelques-unes de ses applications géométriques. Journal de Liouville sér. 4, Bd. 3 (1887), p. 373.

[2] Man sehe: Enzyklopädie d. math. Wissenschaften, Bd. III, AB 3, p. 220, oder:

Kerékjártó (a. O.), p. 160.

Ordnung. Wir erhalten somit:

$$P = 2p - 1 + \frac{1}{2} P(t^1 + t^3 + t^5 + \quad).$$

III.

Die für die Eindeutigkeit von $\sqrt{xy}$ gefundene notwendige Bedingung ist, wie wir gesehen haben, nur für $p = 0$ hinreichend. Wir nehmen im folgenden an, daß diese Bedingung stets erfüllt sei. Es drängt sich nun die Frage auf, wie kann man die Eindeutigkeit von $\sqrt{xy}$ untersuchen, wenn $p > 0$ ist.

Auf Grund der gemachten Annahme hat die rationale Funktion $x.y$ nur Nullstellen und Pole von gerader Ordnung. Ist die Ordnung einer solchen $2n$, so sind die entsprechenden zwei Stellen auf $\mathfrak{F}^*$ Nullstellen, beziehungsweise Pole n-ter Ordnung für $\sqrt{xy}$; wenn also $\sqrt{xy}$ rational sein soll, muß der den beiden Stellen zugeordnete Punkt auf $\mathfrak{F}$ Nullstelle, beziehungsweise Pol n-ter Ordnung einer rationalen Funktion sein. Die Nullstellen und Pole einer auf $\mathfrak{F}$ rationalen Funktion können für $p = 0$ beliebig vorgeschrieben werden; für $p > 0$ aber nicht, es bestehen dann vielmehr p Bedingungen zwischen ihnen, die in transzendenter Form durch das Abel'sche Theorem geliefert werden.[1] Die rationale Funktion ist dann bis auf einen konstanten Faktor bestimmt. Daraus ist wieder ersichtlich, daß für $p = 0$ außer den angegebenen Bedingungen keine weiteren mehr erforderlich sind. Gibt es umgekehrt eine rationale Funktion $R(x, y)$ der verlangten Beschaffenheit, so ist $\dfrac{\sqrt{xy}}{R(x,y)}$ auf $\mathfrak{F}^*$ eindeutig und hat dort weder Nullstellen noch Pole; eine auf einer Riemann'schen Fläche eindeutige Funktion ohne Nullstellen und Pole ist aber eine Konstante, d. h. $\sqrt{xy}$ ist rational. Damit $\sqrt{xy}$ rational sei, ist also notwendig und hinreichend, daß die Nullstellen und Pole von $x.y$ auch dann noch Nullstellen und Pole einer rationalen Funktion bleiben, wenn die betreffenden Ordnungen nur halb so groß genommen werden.

Wir nehmen nun an, U biete den einfachen Fall (siehe Fußnote p. 125) und gehe nicht durch den Ursprung; die Ordnung von U ist dann gerade. Es sei nun $\sqrt{xy}$ rational, also:

$$\sqrt{xy} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)},$$

wo M und N ganze rationale und teilerfremde Funktionen in x, y, beziehungsweise von den Geraden m und n sind. Wir können

---

[1] Stahl: Theorie der Abel'schen Funktionen (1896), p. 151 (IV).

annehmen, daß $m - n = 1$ sei; denn ist dies nicht der Fall, so führen wir statt der uneigentlichen Geraden ω eine neue ω' ein, wobei ω' keiner der Kurven $M = 0$, $N = 0$ als Teil angehöre. Sind x', y' die neuen Koordinaten, so gelten Transformationsformeln von der Form:

$$x = \frac{\alpha\, x'}{\omega}, \; y = \frac{\beta\, y'}{\omega},$$

wo α, β Konstante bedeuten, $\omega = a\,x' + b\,y' + c$ und $\omega = 0$ die Gleichung der ursprüglichen uneigentlichen Geraden ist. Setzt man die Ausdrücke ein, so erhält man wegen der über ω' gemachten Annahme die gewünschte Form. Ferner kann man auf die gleiche Art erreichen, daß die Punkte $x = 0$, $\omega = 0$ und $y = 0$, $\omega = 0$ U nicht angehören. Für die uneigentlichen Punkte von U gelten dann folgende Entwicklungen (p. 125):

$$\begin{aligned} y &= a\,t^{-\alpha} + \qquad (a \neq 0) \\ x &= t^{-\alpha} \end{aligned}$$

$\sqrt{x\,y}$ hat hier einen Pol von der Ordnung α und umgekehrt erhält man so alle Pole. Die Nullstellen von $\sqrt{x\,y}$ entsprechen den Schnittpunkten von U mit den Achsen. Für diese gilt die Darstellung:

$$\begin{aligned} y &= a + b\,t + c\,t^2 + \\ x &= t^2, \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} x &= a + b\,t + c\,t^2 + \\ y &= t^2 \end{aligned}$$

mit $a \neq 0$ und man hat die beiden Fälle: 1. $b \neq 0$, d. h. eine Achse ist Tangente, 2. $b = 0$ $c \neq 0$ Spitze. In beiden Fällen hat $\sqrt{x\,y}$ eine einfache Nullstelle.

Die Nullstellen und die Pole einer rationalen Funktion können stets als Punktgruppen einer linearen Schar der Kurve U angesehen werden; in unserem Falle beispielsweise der Schar, die durch das Büschel $M(x, y) - \lambda\, N(x, y) = 0$ ausgeschnitten wird. Eine lineare Schar gehört aber einer einzigen Vollschar an[1] und letztere ist durch eine ihrer Gruppen G bestimmt; man konstruiert die Vollschar, indem man durch G eine adjungierte Kurve beliebiger Ordnung l legt, die aus der Kurve außer G und den in die mehrfachen Punkte fallenden Schnittpunkten noch die Punktgruppe G' ausschneidet; alle durch G' gehenden adjungierten Kurven l-ter Ordnung erzeugen die durch G bestimmte Vollschar. Nun sei $f(x, y) = 0$ die Gleichung und $n = 2m$ die Ordnung von U. Wegen $p > 0$ gibt es (mindestens eine) adjungierte

[1] Vgl. Severi-Löffler, Vorlesungen über algebraische Geometrie (1921), p. 69.

Kurven von der n-3. Ordnung und $A_{n-3} = 0$ sei eine. Die uneigentliche Gerade ω und $A_{n-3} = 0$ bilden zusammen eine adjugierte Kurve n-2. Ordnung, die einerseits (durch ω) die Gruppe G der Pole von $\sqrt{xy}$ ausscheidet, anderseits noch eine Gruppe G' von $2p - 2$ Punkten. Da alle durch G' gehenden Adjungierten n-2. Ordnung die durch G bestimmte Vollschar ausschneiden, muß es unter ihnen eine geben, etwa $A_{n-2} = 0$, welche die Gruppe der Nullstellen von $\sqrt{xy}$ ausschneidet. Dabei ist noch zu beachten: Fallen einige der Nullstellen in Spitzen von U, so geht natürlich $A_{n-2} = 0$ durch diese, muß aber außerdem die Spitzentangenten berühren.

Berechnen wir die Anzahl der der Kurve $A_{n-2} = 0$ auferlegten Bedingungen; t bezeichne die Zahl der auf den Achsen liegenden Spitzen von U. Nun geht $A_{n-2} = 0$: 1. durch die $2p - 2$ Schnittpunkte von $A_{n-3} = 0$ mit U; 2. durch die t Spitzen und berührt dort die Tangenten, was $2t$ Bedingungen gibt; 3. durch die $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - t - p$ weiteren singulären Punkte von U und 4. durch die $n - t$ Berührungspunkte von U mit den Achsen. Dies gibt zusammen:

$$2p - 2 + 2t + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - t - p + n - t =$$
$$= p + \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

Da eine Kurve n-2. Ordnung durch $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ lineare Bedingungen bestimmt ist, beträgt die gesuchte Zahl p. Natürlich kann es sein, daß diese p Bedingungen voneinander abhängig sind. Umgekehrt gibt es eine solche Adjungierte $A_{n-2} = 0$, so ist, wie leicht zu sehen, $\sqrt{xy}$ rational, die p Bedingungen werden daher jenen, die in anderer Form durch das Abel'sche Theorem geliefert werden, äquivalent sein; denn betrachten wir die Funktion $R(x, y) = \frac{A_{n-2}}{A_{n-3}}$ als rationale Funktion auf U. Wir können die uneigentliche Gerade ω so wählen, daß die uneigentlichen Punkte der Achsen U nicht angehören und ω durch keinen der Schnittpunkte von U mit $A_{n-3} = 0$ und $A_{n-2} = 0$ geht. Dann gelten im Unendlichen Entwicklungen von der Form:

$$y = a\,t^{-\alpha} + \qquad (a \neq 0)$$
$$x = t^{-\alpha}.$$

Es sei nach Gliedern gleicher Dimension geordnet:

$$A_{n-2} \equiv a_0 y^{n-2} + a_1 y^{n-3} x + \qquad + a_{n-2} x^{n-2} +$$

Setzt man die vorigen Ausdrücke für x und y ein, so wird:

$$A_{n-2} = (a_0\, a^{n-2} + a_1\, a^{n-3} + \qquad + a_{n-2})\, t^{-(n-2)\alpha} +$$

wo die angeschriebene Potenz von t die niedrigste ist; denn ist

$$a_0\, a^{n-2} + \qquad + a_{n-2} = 0,$$

so üben wir die Projektivität:

$$x' = \frac{1}{x},\; y' = \frac{y}{x}$$

aus, durch die unser Zweig in einen solchen durch $x' = 0$, $y' = a$ transformiert wird und ω in $x' = 0$. Für den Schnitt der transformierten Kurve von $A_{n-2} = 0$ mit $x' = 0$ ergibt sich:

$$a_0\, y'^{\,n-2} + a_1\, y'^{\,n-3} + \qquad + a_{n-2} = 0$$

und $y' = a$ wäre ja eine Wurzel; dies bedeutet, daß ein Schnittpunkt von U mit $A_{n-2} = 0$ auf ω liegt, was gegen die Voraussetzung. Da Gleiches für $A_{n-3} = 0$ gilt, beginnt $R(x, y)$ mit $t^{-\alpha}$ und es hat daher $R(x,y)$ einen Pol von der Ordnung α ebenso wie $\sqrt{xy}$ und da die Nullstellen beider auch übereinstimmen, ist die rationale Funktion:

$$\left(\frac{\sqrt{xy}}{R(x, y)}\right)^2$$

konstant (da sie weder Nullstellen, noch Pole hat), d. h. $\sqrt{xy}$ ist rational. Bezeichnet man die durch alle Adjungierten n-3. Ordnung ausgeschnittene Schar als kanonische Schar (nach Segre), so kann man sagen:

Satz 12: *Damit $\sqrt{xy}$ eine auf U rationale Funktion sei, ist notwendig und hinreichend, daß eine beliebige Gruppe der kanonischen Schar, mit den auf den Achsen liegenden Punkten von U (Berührungspunkte und Spitzen), auf einer Adjungierten n-2. Ordnung liegt, die aber, falls sich unter diesen Punkten Spitzen befinden, die zugehörigen Tangenten berühren muß.*

Besonders einfach wird das Kriterium für $p = 1$, da in diesem Fall nur eine Adjungierte n-3. Ordnung vorhanden ist, welche die Grundkurve, außer in den singulären Punkten, nicht mehr schneidet.

Die gefundenen Bedingungen lassen auch eine andere Deutung zu. Ist nämlich $A_{n-3} = 0$ irgend eine adjungierte Kurve n-3. Ordnung, so sind die Kurven

$$x \,.\, A_{n-3} = 0,\; y \,.\, A_{n-3} = 0$$

sogenannte adjungierte Berührungskurven. Man bezeichnet nämlich adjungierte Kurven $A_k = 0$, die durch eine feste Gruppe G der Grundkurve gehen und dieselbe in den weiteren Schnittpunkten berühren, als adjungierte Berührungskurven; diese bilden, falls $k > n - 3$ ist, Systeme, und zwar 2^{2p} an der Zahl, so daß nämlich Kurven eines Systems stetig ineinander übergeführt werden können, Kurven verschiedener Systeme aber nicht. Sind $A_k = 0$ und $B_k = 0$ zwei solcher Kurven durch die Gruppe Q, so gehören sie dann und nur dann zum gleichen System, wenn $\sqrt{A_k B_k}$ rational ist. Für unseren speziellen Fall bedeutet dies: $\sqrt{xy}$ ist rational, wenn die Berührungskurven $x . A_{n-3} = 0$ und $y . A_{n-3} = 0$ dem gleichen System angehören, sonst nicht. Durch eine Berührungskurve ist das zugehörige System bestimmt: Legt man nämlich durch die Gruppe Q und durch die Berührungspunkte eine Adjungierte gleicher Ordnung, so schneidet dieselbe außer den singulären Punkten noch eine Gruppe aus der Grundkurve, welche aus Berührungspunkten einer adjungierten Berührungskurve des gleichen Systems besteht und man erhält auf auf diese Art das ganze System.[1] Diese Konstruktion gibt unmittelbar die zuvor gefundene Bedingung für die Eindeutigkeit von $\sqrt{xy}$, wenn man noch bedenkt, daß die Kurve $x . A_{n-3} = 0$ (beziehungsweise $y A_{n-3} = 0$) sich in jeder auf $x = 0$ (beziehungsweise $y = 0$) liegenden Spitze nicht nur adjungiert verhält, sondern auch die Grundkurve berührt.

Es sei also die Kurve U von der Ordnung $n = 2m$ in der Form darstellbar:

$$\sqrt{xy} = \frac{A_k(x, y)}{A_{k-1}(x, y)},$$

wo die Indizes die Grade der betreffenden Polynome bedeuten. Das durch

$$F \equiv A_k^2 - A_{k-1}^2 xy = 0$$

dargestellte Gebilde wird, wenn $k > m$ ist, zerfallen und U als Teil enthalten. Es sei x_0, y_0 ein Schnittpunkt der Kurven $A_k = 0$, $A_{k-1} = 0$, der für beide einfacher Punkt sein möge; dann gilt:

$$A_k = f_1 + f_2 +$$
$$A_{k-1} = f_1' + f_2' +$$

wo
$$f_1 = a_0(x - x_0) + a_1(y - y_0),$$
$$f_2 = b_0(x - x_0)^2 + b_1(x - x_0)(y - y_0) + b_2(y - y_0)^2, \ldots$$

und analog für f_1', f_2', Mithin wird:

$$F \equiv A_k^2 - A_{k-1}^2 xy \equiv f_1^2 - x_0 y_0 f_1'^2 + 2 f_1 f_2 - 2 f_1' f_2' x_0 y_0 - f_1'^2 [y_0(x_0 - x_0) + x_0(y - y_0)] + \ldots$$

[1] Vgl. Weiß: Über eine algebraische Theorie der Scharen nichtadjungierter Berührungskurven, welche zu einer algebraischen Kurve gehören. Sitzungsber. Wien, Abt. IIa, Bd. 99, p. 302.

Ist etwa $x_0 = 0\, y_0 \neq 0$, so hat F ein Spitze, wenn sich die Kurven nicht berühren und die Spitzentangente fällt mit der Tangente von $A_k = 0$ zusammen. Sind x_0, y_0 beide von Null verschieden, so hat F einen Doppelpunkt, dessen Tangenten nebenbei zu jenen von $A_k = 0$ und $A_{k-1} = 0$ harmonisch sind. Soll eine Spitze (außerhalb der Achsen) entstehen, so muß notwendig $f_1' = C . f_1$ sein; allein dies ist nicht hinreichend, da dann die Glieder dritter Dimension durch f_1 teilbar werden und man im allgemeinen einen Selbstberührungspunkt erhält. Es ist vielmehr erforderlich, daß die Glieder zweiter Dimension wegfallen und der durch f_1 geteilte Term dritter Dimension das Quadrat eines linearen Ausdruckes wird. F muß also in diesem Fall zerfallen, also $k > m$ sein. Jedenfalls gilt allgemein: Schneiden sich die Kurven $A_k = 0$ und $A_{k-1} = 0$ in einer Spitze von U, so muß dort ihre Schnittmultiplizität mindestens zwei sein. Zu bemerken ist noch, schneidet die Kurve $A_k = 0$ eine Achse mit der Multiplizität r, ohne daß aber $A_{k-1} = 0$ hindurchgeht, so ist der Punkt einfacher Punkt von F und die Achse ist dort Tangente von der Ordnung $2r - 1$.

Wir beweisen nun folgenden

Hilfssatz: *Die Kurve U (sie kann auch zerfallen) sei von der Ordnung $n = 2m$ und ihre Gleichung lasse sich auf die Form bringen:*

$$\sqrt{xy} = \frac{A_k(x, y)}{A_{k-1}(x, y)},$$

wo $k > m$. Wir setzen voraus, daß die Kurven $A_k = 0$ und $A_{k-1} = 0$ sich einfach schneiden, daß auch $A_k = 0$ die Achsen einfach schneide und $A_k(0, 0) \neq 0$ sei. Dann sind unter den $k(k-1)$ Schnittpunkten der beiden Kurven mindestens $m(m-1)$ Doppelpunkte von U vorhanden.

Unter diesen Doppelpunkten sind die auf den Achsen eventuell vorhandenen Spitzen immer mitinbegriffen; die anderen Schnittpunkte sind auf Grund der Annahme Doppelpunkte.

Zum Beweis dieses Satzes brauchen wir den Noether'schen Fundamentalsatz. Dieser gibt bekantlich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit ein Polynom F in x, y in die Form gebracht werden kann:

$$F = A . f + B . g,$$

wo f, g gegebene Polynome und A, B zu bestimmende Polynome in x, y sind. Die Bedingung dafür lautet: Für jeden Schnittpunkt x_0, y_0 der Kurven $A = 0$, $B = 0$ müssen sich zwei Potenzreihen a, b in $x - x_0$ und $y - y_0$ so finden lassen, daß die Identität:

$$F = a . f + b . g$$

in einer gewissen Umgebung von x_0, y_0 stattfindet.[1] Ordnet man links und rechts nach Gliedern gleicher Dimension (in $x - x_0$, $y - y_0$), so genügt die Übereinstimmung bis zu den Gliedern einer genügend hohen Dimension: Hat etwa f einen r-fachen, g einen s-fachen Punkt in x_0, y_0 und ist hier die Schnittmultiplizität der beiden Kurven $k\ (\geqq r\,s)$, so genügt die Übereinstimmung bis zu den Gliedern $k - rs + r + s - 2$. Dimension einschließlich.[2]

Wir besprechen einige Fälle:

1. Der sogenannte einfache Fall: Der Schnittpunkt sei für die Kurven wieder r-, beziehungsweise s-facher Punkt, ohne daß aber beide Kurven daselbst Tangenten gemein haben. Dann ist $k = r.s$ und es genügt, wenn der Punkt für F mindestens $r + s - 1$-fach ist.[1] (Man vgl. auch Severi-Löffler a. a. O., p. 109 ff.)

2. f habe eine Spitze, g gehe einfach durch sie und berühre die Spitzentangente; F soll zweifach hindurchgehen. Wir legen den Punkt in den Ursprung und nehmen die Spitzentangente als x-Achse; dann wird, nach Gliedern gleicher Dimension geordnet:

$$f = a y^2 + \qquad a = a_0 + a_1 + .$$

$$g = b y \ + \qquad b = b_0 + b_1 + .$$

$$F = F_2 +$$

In $F = af + bg$ genügt die Übereinstimmung bis zu den Gliedern zweiter Dimension. Daher ist

$$b_0 = 0 \text{ und } F_2 = a_0\, a y^2 + b_1\, b y,$$

also muß F_2 durch y teilbar sein. Es genügt daher, wenn ein Zweig von F die Spitzentangente berührt.

3. Der Schnittpunkt sei für f zweifach, für g einfach, g berühre aber keine der Doppelpunktstangenten und F habe einen einfachen Punkt. Es genügt die Übereinstimmung bis zu den Gliedern erster Dimension und wie leicht zu ersehen, genügt es, wenn F und g sich berühren.

Wir gehen nun zum Beweis unseres Hilfssatzes. Angenommen, der Satz sei für Kurven, deren Ordnung gerade und kleiner als $n = 2m$ ist, richtig, dann zeigen wir, daß er auch für n gilt.

Es bezeichne d die Zahl jener Doppelpunkte und Spitzen auf den Achsen, die unter den Schnittpunkten von $A_k = 0$ und $A_{k-1} = 0$ auftreten.

Würde der Satz für $n = 2m$ nicht mehr gelten, d. h. $d < m(m-1)$ sein, so können wir $k < 2m$ voraussetzen;

---

[1] Voß: Über einen Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Funktionen. Math. Ann., Bd. 27, p. 527 bis 536.

Bertini: Zum Fundamentalsatz aus der Theorie der algebraischen Funktionen. Math. Ann., Bd. 34, p. 447 bis 449.

denn falls $k > 2m$ ist, legen wir durch jene d Doppelpunkte von U eine Kurve $B_{2m-2} = 0$ von der Ordnung $2m - 2$; dies ist möglich, denn eine solche Kurve ist durch

$$\frac{(2m-2)\,(2m+1)}{2} = (m-1)(2m+1) > (m-1)\,m > d \text{ Punkte}$$

bestimmt und es gibt deren mindestens ∞^2. Nun geht die Kurve $A_k . B_{2m-2} = 0$ durch alle Schnittpunkte von U und $A_{k-1} = 0$; durch jeden dieser Punkte geht aber auch $A_k = 0$ und sie sind, nach Voraussetzung, für $A_k = 0$ und $A_{k-1} = 0$ einfache Punkte. Die Bedingungen des Noether'schen Satzes sind für $A_k . B_{2m-2} = 0$ erfüllt (Fall 1); es gibt daher zwei Polynome B_{2m-1} und U', so daß gilt:

$$A_k\, B_{n-2} = B_{n-1} . A_{k-1} + U' . U.$$

wo $n - 1$ als Grad von B_{n-1} genommen werden kann,[1] und der Grad von U' deshalb höchstens $k - 2$ beträgt. Daraus folgt weiter, daß die beiden Polynome dann eindeutig bestimmt sind. Denn aus einer Beziehung von der Form

$$B_{n-1}\, A_{k-1} + U'_{k-2} . U = B'_{n-1}\, A_{k-1} + U'_{k-2} . U$$

würde folgen, daß A_{k-1} mit U zumindest einen Teiler gemein hätte; aus der zufolge $U = 0$ bestehenden Gleichung

$$A_k^2 - xy\, A_{k-1}^2 = 0$$

ergibt sich dann weiter, daß der Teiler von A_{k-1} auch ein Teiler von A_k wäre, also A_k und A_{k-1} nicht relativ prim sind, was gegen die Voraussetzung.

Jeder Kurve $B_{n-2} = 0$ von obiger Beschaffenheit, ist daher eindeutig eine Kurve $B_{n-1} = 0$ zugeordnet, aber auch umgekehrt; denn man kann durch jene d Doppelpunkte und die Berührungspunkte von U mit den Achsen, eine Kurve $B_{n-1} = 0$ legen, die, falls sich unter diesen Berührungspunkten Spitzen befinden, natürlich die Spitzentangenten berühren muß. Der Kurve $B_{n-1} = 0$ sind $d + 2m$ Bedingungen auferlegt und es ist

$$d + 2m < m(m-1) + 2m = m(m+1);$$

anderseits ist eine Kurve von der Ordnung $n - 1 = 2m - 1$ durch $(2m-1)\,(m+1) > d + m$ Bedingungen bestimmt. Nun genügt $B_{n-1} . A_{k-1} = 0$ den Bedingungen des Noether'schen Satzes in

---

[1] Denn in der Identität

$$B . A_{k-1} + U'\, U = (B - P . U)\, A_k + (U' + P\, A_k)\, U$$

kann das willkürliche Polynom P so bestimmt werden, daß $B - P . U$ höchstens vom $n - 1$. Grade wird.

bezug auf $A_k = 0$ und U (wenn U Spitzen auf den Achsen hat, gilt Fall 2), daher:

$$B_{n-1} A_{k-1} = A_k . B_{n-2} + U'' . U$$

und $B_{n-2} = 0$, ist daher eindeutig bestimmt.

Daraus ist ferner zu ersehen, daß das System der Kurven B_{n-1} außer den d Doppelpunkten und den Schnittpunkten von U mit den Achsen keine Basispunkte besitzt; das System der Kurven B_{n-2} hat nur erstere zu Basispunkten.

Wir können sicher Paare entsprechender Kurven: $B_{n-1} = 0$, $B_{n-2} = 0$ finden, die sich wenigstens in den d Basispunkten, welche beide Systeme gemein haben, einfach schneiden; dazu ist hinreichend, daß die Kurve $B_{n-2} = 0$ in jenen Basispunkten einfache Punkte hat und die Grundkurve dort nicht berührt. Nun sei $B'_{n-1} = 0$, $B'_{n-2} = 0$ ein zweites Paar. Man kann voraussetzen, daß die Schnittpunkte der Kurven $B_{n-1} = 0$, $B'_{n-1} = 0$, die nicht in die erwähnten d Basispunkte fallen, von den übrigen Schnittpunkten der beiden Kurven $B_{n-2} = 0$ und $B'_{n-2} = 0$ verschieden sind; dies folgt aus den Bemerkungen über die Basispunkte der zwei Kurvensysteme. Nun betrachten wir das Kurvenbüschel

$$B_{n-2} + \lambda B'_{n-1} = 0.$$

Die entsprechenden Kurven werden ein dazu projektives Büschel beschreiben. In jedem Büschel gibt es nur eine endliche Zahl von Kurven mit Doppelpunkten außerhalb der Basispunkte; ferner können sich in projektiven Büscheln nicht alle entsprechenden Kurven berühren, denn die durch beide Büschel erzeugte Kurve hat in einem solchen Berührungspunkt mit den beiden Kurven die Tangente gemein; daher müßten die Büschel eine gemeinsame Einhüllende haben, was nicht der Fall ist. Wir können also sicher entsprechende Kurven finden, die sich überall einfach schneiden.

Von solcher Beschaffenheit seien die Kurven $B_{n-1} = 0$, $B_{n-2} = 0$, deren Gleichungspolynome in der Identität:

$$A_k B_{n-2} = B_{n-1} A_{k-1} + U' U$$

auftreten, außerdem kann noch vorausgesetzt werden, daß $B_{n-1} = 0$ nicht durch den Ursprung geht. Für $U = 0$ folgt wegen:

$$\sqrt{x y} = \frac{A_k}{A_{k-1}}$$

die weitere Darstellung von U:

$$\sqrt{x y} = \frac{B_{n-1}}{B_{n-2}}.$$

Aus diesen Überlegungen folgt:

Ist der Hilfssatz für $n = 2m$ nicht mehr richtig, so kann in der Gleichung

$$\sqrt{xy} = \frac{A_k}{A_{k-1}}$$

k kleiner als n vorausgesetzt werden.

Das durch $A_k^2 - xy\, A_{k-1}^2 = 0$ dargestellte Gebilde besteht aus U und einer zweiten Kurve U'_{2k-2m}. Für U' gilt ebenfalls die Darstellung $\sqrt{xy} = A_k : A_{k-1}$. Da aber wegen $k < 2m$ die Ordnung von U' $2k - 2m$ kleiner als $2m$ ist, gilt nach Voraussetzung der Hilfssatz für diese Kurve, d. h. die Zahl d' jener Doppelpunkte von U', die unter den Schnittpunkten von $A_k = 0$ und $A_{k-1} = 0$ auftreten, ist $\geqq (k-m)\,(k-m-1)$. Es bezeichne analog d die Zahl der Doppelpunkte von U, welche sich unter den Schnittpunkten von $A_k = 0$ und $A_{k-1} = 0$ befinden. Die Kurven $A_{k-1} = 0$ und $U = 0$ schneiden sich außer in den d erwähnten Punkten noch in $2m(k-1) - 2d$ Punkten,[1] durch welche auch $A_k = 0$ geht; $A_k = 0$ und $A_{k-1} = 0$ haben $k(k-1)$ Schnittpunkte, von denen

$$d + \big(2m(k-1) - 2d\big) = 2m(k-1) - d$$

der Kurve U angehören; die übrigen müssen jene d' Doppelpunkte von U' sein, daher:

$$d' = k(k-1) - 2m(k-1) + d = (k-2m)\,(k-1) + d$$

oder

$$d = d' - (k-2m)\,(k-1).$$

Da $d' \geqq (k-m)\,(k-m-1)$ ist, so ergibt sich weiter:

$$d \geqq (k-m)\,(k-m-1) - (k-2m)\,(k-1) = m(m-1),$$

mithin $d \geqq m(m-1)$, also ein Widerspruch zur Voraussetzung $d < m(m-1)$.

Nun ist unser Hilfssatz für $m = 1$ trivial, also richtig und daher allgemein bewiesen.

Wir wenden nun den Hilfssatz auf Kurven U_{2m} an, für die $\sqrt{xy}$ rational ist. Es wird vorausgesetzt, daß U nur gewöhnliche Singularitäten besitzt und die Berührungen mit den Achsen gewöhnliche sind, ferner daß $p > 0$ ist. Dann gilt nach Früherem die Darstellung:

$$\sqrt{xy} = \frac{A_{2m-2}}{A_{2m-3}}.$$

Die Kurve $A_{2m-3} = 0$ kann so gewählt werden, daß sie in den singulären Punkten von U die Schnittmultiplizität zwei hat. (Für $p = 1$ gibt es überhaupt nur eine Kurve $A_{2m-3} = 0$, die aber die verlangte Eigenschaft bereits besitzt.) Ist $A_{2m-3} = 0$ so gewählt,

[1] Da erstere nach Voraussetzung ja Doppelpunkte sind.

dann gilt von selbst das gleiche für $A_{2m-2}=0$. Die beiden Kurven können sich aber in einem singulären Punkt von U (beispielsweise in einer Spitze) berühren. Nun legen wir durch jene singulären Punkte von U, wo sich die beiden Kurven A nicht berühren (dazu gehören sicher die auf den Achsen liegenden Spitzen) eine Kurve $B_{k-1}=0$ beliebigen Grades $k-1$. Die Kurve $A_{2m-2}.B_{k-1}=0$ geht durch alle Schnittpunkte von $U=0$ und $A_{2m-3}=0$. Die Bedingungen des Noether'schen Fundamentalsatzes sind erfüllt; falls sich die beiden Kurven A in einem singulären Punkt von U berühren, gilt Fall 3 (p. 133), daher:

$$A_{2m-2}.B_{k-1}=A_{2m-3}.B_k+U'.U,$$

woraus sich für $U=0$ ergibt:

$$\sqrt{xy}=\frac{B_k}{B_{k-1}}.$$

Durch eine ähnliche Überlegung wie früher zeigt man, daß die Kurven B so gewählt werden können, daß sie sich einfach schneiden. Nun können wir den Hilfssatz anwenden; es bezeichne nun d die Zahl aller Doppelpunkte von U, t die Zahl der auf den Achsen liegenden Spitzen und r die der übrigen Spitzen. Der Hilfssatz behauptet dann, daß $d+t\geqq m(m-1)$ ist und wir erhalten für das Geschlecht von U:

$$p=(2m-1)\ (m-1)-(d+t)-r\leqq(m-1)^2-r$$

oder:

$$r\leqq(m-1)^2-p.$$

Wegen $r\geqq 0$ ergibt sich weiter:

$$p\leqq(m-1)^2.$$

Satz 13: *Ist $\sqrt{xy}$ auf einer Kurve von der Ordnung $2m$ rational, so ist die Anzahl der nicht auf den Achsen liegenden Spitzen nie größer als $(m-1)^2-p$ und das Geschlecht der Kurve höchstens $(m-1)^2$.*

Daß die für p gegebene Schranke immer erreicht werden kann, ist leicht einzusehen; denn schneiden sich die beiden (beliebigen) Kurven $A_m=0$, $A_{m-1}=0$ einfach, so wird durch $\sqrt{xy}=\lambda\ \frac{A_m}{A_{m-1}}$ oder $\lambda^2A_m^2-xyA_{m-1}^2=0$ ein Büschel von Kurven $2m$-ter Ordnung dargestellt. Eine allgemeine Büschelkurve ist, wenn A_m und A_{m-1} relativ prim sind, irreduzibel und hat, da es nur endlich viele Kurven mit singulären Punkten außerhalb der Basispunkte gibt, das Geschlecht

$$p=(2m-1)\ (m-1)-m(m-1)=(m-1)^2.$$

$$xy' = \mu.(xy' + y' - x - 3)^2$$

bringen; für $x = -1$, $y' = 2$ ergibt sich $\mu = -\frac{1}{2}$.

Man hat hier Beispiele von zwei Netzflächen mit gleichen charakteristischen Zahlen, deren Hauptangentenkurven aber nichtsdestoweniger ganz verschiedenes Verhalten zeigen.

Man kann also nicht einmal bei elliptischen Kurven vierter Ordnung, selbst wenn die notwendigen Bedingungen von Satz 9 und $r = 0$ erfüllt sind, die Eindeutigkeit von $\sqrt{xy}$ unmittelbar entscheiden. Nur ein Fall macht eine bemerkenswerte Ausnahme, der nämlich bei der Kurve mit zwei Spitzen auftritt. Es sei $D = 0$ die Gleichung der (einzigen) Doppeltangente, $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ die Gleichungen der drei von einer der Spitzen ausgehenden Tangenten und $S = 0$ stelle die Verbindungsgerade der beiden Spitzen dar. Die vier Geradenpaare: $S^2 = 0$, $S\,T_1 = 0$, $S\,T_2 = 0$, $S\,T_3 = 0$ sind Berührungskurven, die verschiedenen Systemen angehören müssen, denn sonst wären $\sqrt{\frac{S^2}{S\,T_1}} = \sqrt{\frac{S}{T_1}}$ und alle ähnlichen Ausdrücke rationale Funktionen (vgl. p. 131), und zwar von erster Ordnung; solche können aber auf Gebilden mit $p > 0$ nicht existieren. Die Berührungskurve $S.D = 0$ muß in einem der vier Systeme enthalten sein (da die Zahl derselben $2^{2r} = 4$ beträgt). Würde sie einem der durch $S\,T_i\,(i = 1, 2, 3)$ bestimmten Systeme angehören, so müßte $\sqrt{S^2\,D\,T_i}$, d. h. $\sqrt{D\,T_i}$ rational sein, oder wenn man $D = 0$, $T_i = 0$ zu neuen Koordinatenachsen macht, $\sqrt{xy}$ wäre rational, was aber unmöglich, da $r = 1$ ist. Deshalb gehört $S.D = 0$ dem durch $S^2 = 0$ bestimmten System an, oder $\sqrt{S\,D.S^2}$, d. h. $\sqrt{S\,D}$ ist rational. Nimmt man $S = 0$ und $D = 0$ als Koordinatenachsen, so wird $\sqrt{xy}$ rational, deshalb (Satz 12) gibt es bei einer Kurve vierter Ordnung mit zwei Spitzen einen Kegelschnitt durch diese, der beide Spitzentangenten berührt und außerdem die Berührungspunkte der Doppeltangente ausschneidet.

Unserer Figur entspricht eine elliptische Netzfläche (4, 6) mit einer vierfachen Erzeugenden, acht Rückkehrerzeugenden und zwei Torsallinien zweiter Ordnung. Die Fläche ist von zehnter Ordnung, vom Rang zwölf und hat die Besonderheit, daß ihre Haupttangentenkurven immer zerfallen.

IV.

Um zu untersuchen, ob eine Kurve Laguerre'sche Kurve bezüglich eines Punktepaares ist, braucht man nur die für die Eindeutigkeit von $\sqrt{xy}$ gegebenen Kriterien zu dualisieren.

Man kann aber auch anders vorgehen. Wir legen ein inhomogenes projektives Punktkoordinatensystem zugrunde, dessen Achsen durch das absolute Punktepaar gehen und dessen uneigentliche Gerade die Verbindungslinie des Paares ist. Bedeutet $f(x, y) = 0$ die Gleichung der Kurve, so stellt:

$$Y - X \frac{dy}{dx} = y - x \frac{dy}{dx}$$

die Gleichung der Tangente des Punktes x, y dar. Führt man die Größen:

$$u = \frac{\frac{dy}{dx}}{y - x \frac{dy}{dx}}, \quad v = -\frac{1}{y - x \frac{dy}{dx}}$$

als inhomogene Linienkoordinaten ein, so liegen die Koordinatenecken in den absoluten Punkten und wir haben bereits gefunden (p. 122), daß $\sqrt{uv}$ eine rationale Funktion des Kurvenpunktes sein muß, wenn $f(x, y) = 0$ eine Laguerre'sche Kurve sein soll, oder anders ausgedrückt: $\sqrt{\frac{dy}{dx}}$ muß rational sein, und dies ist auch hinreichend.

Genau wie früher ist einzusehen, daß die Nullstellen und Pole von $\sqrt{\frac{dy}{dx}}$ Nullstellen und Pole einer rationalen Funktion sein müssen.

Wir nehmen nun an, $f(x, y) = 0$ habe den einen absoluten Punkt als r-fachen, den anderen als s-fachen Punkt mit getrennten gewöhnlichen Tangenten, ferner soll die uneigentliche Gerade nicht Tangente sein. Die zu den Achsen parallelen Kurventangenten sind, wenn wir uns auf den einfachsten Fall beschränken, Wendetangenten; für Punkte, wo dieselben zur x-Achse parallel sind, gilt:

$$y = a + a' t^3 + \qquad (a' \neq 0)$$

$$x = b + t$$

und $\sqrt{\frac{dy}{dx}}$ hat daher eine einfache Nullstelle. Für einen Zweig durch den uneigentlichen Punkt der x-Achse wird:

$$y = a + bt + \qquad (b \neq 0, \text{ da sonst ein Wendepunkt zustande kommt}).$$

$$x = t^{-1}.$$

Dies gibt wieder eine Nullstelle für $\sqrt{\frac{dy}{dx}}$. Analoges gilt für die Pole. Für einen unendlichfernen Zweig, der durch keinen absoluten Punkt geht, ist:

Soll $\sqrt{xy}$ für eine Kurve vierter Ordnung rational sein, so kann dies nur dann eintreten, wenn dieselbe rational oder elliptisch ist. Daher gibt eine Kurve vierter Ordnung vom Geschlechte 2 oder 3 samt zwei ihrer Doppeltangenten den scheinbaren Umriß einer Netzfläche, deren Haupttangentenkurven unter keinen Umständen zerfallen.

Für $m = 2$, $p = 1$ wird $r = 0$, d. h.: Hat eine elliptische Kurve vierter Ordnung außer den Achsen eine Spitze, so kann $\sqrt{xy}$ niemals rational sein. Man erhält damit Beispiele von Netzflächen, deren Haupttangentenkurven nie zerfallen können, trotzdem die Fläche die in Satz 11 ausgesprochenen notwendigen Bedingungen erfüllt. Herr Mohrmann gibt (a. a. O.) ebenfalls ein Beispiel einer solchen Fläche; es ist dies eine (3, 3) mit einer Doppel- und zwei Rückkehrerzeugenden sowie zweimal zwei Torsallinien zweiter Ordnung. Die Fläche ist elliptisch und vom Rang $a = 10$; der Grad ihrer Haupttangentenkongruenz mithin ((4) p. 119) $M = 10$. Der scheinbare Umriß der Fläche aus einem Punkt ihrer Doppelerzeugenden wird eine elliptische Kurve sechster Ordnung (vgl. Fußnote 1, p. 118), für die $r = 4$ ist ((3), p. 118) während für $m = 3$, $p = 1$, $r \leqq 3$ sein muß, wenn die Haupttangentenkurven zerfallen sollen. Es gilt überhaupt:

Für das Zerfallen der Haupttangentenkurven elliptischer Netzflächen ist notwendig, daß der Rang der Fläche mindestens zwölf beträgt.

Hat nämlich die Fläche den Rang 10 (der Rang ist, da die Bedingungen von Satz 11 vorausgesetzt werden, gerade), so muß mindestens eine Doppelerzeugende vorhanden sein; denn wäre $d = 0$, so folgt wegen:

$$a = 2n_1 n_2 - 2d - 3r, \quad p = (n_1 - 1)(n_2 - 1) - d - r:$$[1]

$$10 = 2n_1 n_2 - 3r,$$

$$0 = n_1 n_2 - n_1 - n_2 - r,$$

und daraus:

$$-10 = n_1 n_2 - 3n_1 - 3n_2,$$

oder:

$$-1 = (n_1 - 3)(n_2 - 3),$$

d. h.:

$$n_1 = 2,\ n_2 = 4 \text{ und } r = 2.$$

Ein ebener Schnitt der Fläche hätte die Ordnung $2 + 4 = 6$ und die Klasse 10. Die Schnittpunkte mit den Leitgeraden sind zwei-, beziehungsweise vierfache Punkte der Schnittkurve. Von dem letzten der beiden Punkte gehen noch zwei Tangenten an die Kurve;

[1] Mohrmann a. a. O. bezeichnet jetzt die Anzahl der Rückkehrerzeugenden.

diese müssen sich in eine Wendetangente vereinigen (Satz 10), welche aber in sieben Punkten schneiden würde. Daher gibt es mindestens eine Doppelerzeugende und wir können nun genau wie vorhin verfahren. Wenn $a = 8$ ist, genügt es, die Fläche aus einem ihrer Punkte zu projizieren; es wird dann $m = 3$, $r = 5$, während $r \leq 3$ sein muß; $a \lesssim 6$ kommt nicht mehr in Betracht. Anderseits gibt es elliptische Netzflächen vom Rang zwölf, deren Hauptangentenkurven zerfallen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Es sei eine Kurve vierter Ordnung als scheinbarer Umriß einer Netzfläche gegeben durch die Gleichung:

$$y^2 . (x+1)^2 + 2y(x^2 + x - 1) + (x+1)^2 = 0.$$

Die unendlich fernen Punkte der Achsen sind Spitzen mit den Tangenten $y = -1$, beziehungsweise $x = -1$. Von den Spitzen gehen noch je drei weitere Tangenten aus:

$$y = 0,\ y = -\frac{1}{2},\ y = -2 \text{ und } x = 0,\ x = -\frac{3}{2},\ x = -2.$$

Die Kurve ist daher von der Klasse 6 und somit elliptisch. Da vom Ursprung außer den Achsen noch 4 Tangenten an die Kurve gehen, liegt das Projektionszentrum auf einer vierfachen Erzeugenden (vgl. p. 117) und der Rang der Fläche ist deshalb zwölf (Fußnote 1, p. 118).

Nun untersuchen wir, ob $\sqrt{xy}$ rational ist. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn ein Kegelschnitt mit den Asymptoten $x = -1$, $y = -1$ existiert, der durch die Berührungspunkte von $x = 0$ ($y = 1$) und $y = 0$ ($x = -1$) geht; seine Gleichung müßte die Form haben:

$$(x+1)\ (y+1) = \lambda,$$

woraus $\lambda = 2$, beziehungsweise $\lambda = 0$ folgen würde. Es gibt daher keinen solchen Kegelschnitt.

Wir wählen nun die Tangenten $x = 0$ und $y = -2$ zu neuen Achsen, also $x = x'$, $y = y' - 2$ und erhalten als Kurvengleichung:

$$y'^2\ (x+1)^2 - 2y'\ (x^2 + 3x + 3) + (x+3)^2 = 0.$$

Die Spitzentangenten sind $x = -1$, $y' = +1$ und die Achsen berühren in $x = 0$, $y' = 3$ und $x = -3$, $y' = 0$. Die Gleichung des Kegelschnittes hat die Form:

$$(x+1)\ (y' - 1) = \lambda$$

und man erhält für beide Berührungspunkte $\lambda = 2$; also ist $\sqrt{xy}$ rational. Da die Verbindungsgerade beider Spitzen unendlich ferne ist, kann man die Gleichung der Kurve auf die Gestalt:

$$y = a t^{-\alpha} + \qquad (a \neq 0)$$
$$x = t^{-\alpha}$$

und $\sqrt{\frac{dy}{dx}}$ hat hier weder Nullstelle noch Pol.

Man gelangt, durch ganz ähnliche Betrachtungen wie früher, zu folgendem Kriterium:

Satz 14: *Um zu untersuchen, ob eine Kurve Laguerre'sche Kurve bezüglich zweier Punkte ist, die für dieselbe r-, beziehungsweise s-fach sind, lege man eine adjungierte Kurve, die den ersten der beiden Punkte zum r-fachen hat und durch jene Wendepunkte geht, deren Tangenten diesen Punkt enthalten. Die Adjungierte schneidet außer jenen Wendepunkten und den in die vielfachen Punkte fallenden Schnittpunkten noch eine Punktgruppe aus, durch die eine zweite Adjungierte derselben Ordnung gehen muß, welche den anderen der Punkte zum s-fachen hat und durch jene Wendepunkte geht, deren Tangenten diesen Punkt enthalten.*

Wir betrachten als Beispiel dazu eine Netzfläche (3, 3) mit drei Doppelerzeugenden und zweimal drei Torsallinien zweiter Ordnung, welche Herr Mohrmann (a. a. O.) als Beispiel einer elliptischen Netzfläche erwähnt, deren Haupttangentenkurven zerfallen können. Mittels Satz 14 ist nun leicht zu zeigen, daß die Haupttangentenkurven der Fläche immer zerfallen.

Zunächst sollen die drei Doppelerzeugenden zu einer dreifachen Erzeugenden zusammenrücken. Da die Fläche von sechster Ordnung ist, liefert ein ebener Schnitt ε durch die dreifache Erzeugende eine Kurve dritter Ordnung, von der je drei Wendetangenten durch die Schnittpunkte f_1, f_2 der Leitgeraden mit ε gehen. Die erste Polare, etwa von f_1, muß die Kurve in den drei Wendepunkten berühren; und da auch die zugehörigen Wendetangenten die Polare berühren, besteht dieselbe aus einer doppelt gezählten Geraden, d. h. je drei Wendepunkte liegen in einer Geraden. Die Bedingungen des Kriteriums sind erfüllt; mithin zerfallen die Haupttangentenkurven der Fläche. Anderseits gibt es auch wirklich Kurven dritter Ordnung von obiger Beschaffenheit, man bezeichnet sie als äquianharmonisch. Die drei übrigen Wendetangenten schneiden sich dann ebenfalls in einem Punkt und es folgt beiläufig:

Jede äquianharmonische Kurve dritter Ordnung ist auf dreifache Weise Laguerre'sche Kurve.

Die Gleichung einer solchen Kurve läßt sich etwa in folgender Form annehmen:

$$x^3 + y^3 + 1 = 0$$

und es wird $\sqrt{-\frac{dy}{dx}} = \frac{x}{y}$, also rational.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Ein ebener Schnitt durch eine der Doppelerzeugenden ist eine Kurve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, die durch f_1 und f_2 einfach geht. In f_1, f_2 schneiden sich je drei Wendetangenten. Nun üben wir auf die Kurve eine quadratische Transformation aus, deren Fundamentalpunkte die beiden Doppelpunkte und etwa f_1 sind. Wir erhalten eine Kurve dritter Ordnung, von der sich drei Wendetangenten in einem Punkt schneiden; dann liegen die drei zugehörigen Wendepunkte, wie wir gesehen haben, in einer Geraden. Durch Ausführung der inversen Transformation, geht dieselbe in einen Kegelschnitt durch f_1 und die beiden Doppelpunkte über, der außerdem die drei zu f_1 gehörigen Wendepunkte enthält; der Kegelschnitt trifft die Kurve vierter Ordnung weiter nicht. Da Analoges für f_2 gilt, sind die Bedingungen von Satz 14 erfüllt und damit das Zerfallen der Haupttangentenkurven auch in diesem Fall gezeigt.

Bemerkenswert ist die aus dem vorstehenden und einem früheren Beispiel (p. 140) folgende Existenz elliptischer Netzflächen, deren Haupttangentenkurven unter allen Umständen zerfallen, also bloß auf Grund besonderer Eigenschaften der charakteristischen Zahlen der Fläche. Ob es analoge Fälle von Netzflächen höheren Geschlechtes gibt, ist mir nicht bekannt.

V.

Wir wollen nun Erzeugungsarten von Laguerre'schen Kurven besprechen.

Es sei eine ebene Kurve und ein Punktepaar i_1, i_2 gegeben; wann ist die Kurve eine Laguerre'sche Kurve, die das Punktepaar als absolutes besitzt? Um diese Frage zu untersuchen, legen wir durch i_1, i_2 einen Kegelschnitt K, dessen Ebene aber nicht mit der Kurvenebene zusammenfallen soll. Durch i_1 und i_2 legen wir die X-, beziehungsweise Y-Achse eines räumlichen Punktkoordinatensystems, dessen uneigentliche Ebene die von K sei, so daß die Gleichung des K aus dem Ursprung projizierenden Kegels als $XY = Z^2$ angenommen werden kann. Sind u, v die gewöhnlichen Linienkoordinaten eines Punktes von K, so lautet die Gleichung der Kurventangente in laufenden Punktkoordinaten X, Y

$$Xu + Yv + 1 = 0.$$

Durch die Tangente legen wir eine der beiden Ebenen, die den unendlichfernen Kegelschnitt K berühren; ihre Gleichung wird die Form haben:

$$Xu + Yv + Z\alpha + 1 = 0,$$

wo sich für α ergibt: $\alpha = 2\sqrt{uv}$. Wir denken uns einen der Werte von $\sqrt{uv}$ festgelegt und setzen die Ebene stetig längs der

Kurve fort, so daß sie immer K berührt und lassen den Kurvenpunkt (im Komplexen) geschlossene Wege beschreiben; wann wird dabei die Ebene in ihre Anfangslage zurückkehren? Offenbar dann, und nur dann, wenn $\sqrt{u\,v}$ eine eindeutige Funktion des Kurvenpunktes ist, d. h. die gegebene Kurve eine Laguerre'sche Kurve ist, sonst wird die Ebene erst bei doppelter Durchlaufung jedes geschlossenen Weges ihre Anfangslage einnehmen.

Wir haben also dem Kegelschnitt K, den wir als absoluten Kegelschnitt bezeichnen wollen, und der gegebenen Kurve eine Torse umschrieben, die wir Minimaltorse nennen. Im Falle die Kurve eine Laguerre'sche ist, wird sie einfache Kurve der Torse sein, sonst der Doppelkurve angehören, da in diesem Fall durch jede Kurventangente zwei den absoluten Kegelschnitt berührende Ebenen gehen, oder anders ausgedrückt, einer Laguerre'schen Kurve kann man zwei Minimaltorsen umschreiben. Die Gratlinie einer Minimaltorse hat die Eigenschaft, daß ihre Tangenten den festen Kegelschnitt K schneiden; wir wollen eine solche Kurve als Minimalkurve bezeichnen. Nun können wir sagen:

Satz 15a: *Schneidet man eine einem Kegelschnitte umschriebene Torse mit einer denselben nicht berührenden Ebene, so erhält man eine Laguerre'sche Kurve, deren absolutes Punktepaar die Schnittpunkte der Ebene mit dem Kegelschnitt sind; nur wenn der Schnitt der Doppelkurve der Torse angehört, entsteht keine Laguerre'sche Kurve.*

Analog stellen wir noch folgende Betrachtung an. Es sei eine Kurve U als scheinbarer Umriß einer Netzfläche gegeben. Wir betrachten die Bilder F'_1, F'_2 der Leitlinien als Erzeugende eines Kegels zweiter Ordnung und nehmen F'_1, F'_2, beziehungsweise als x- und y-Achsen eines räumlichen Punktkoordinatensystems; zu dessen xz- und yz-Ebenen wählen wir die Tangentialebenen des Kegels längs F'_1 und F'_2. Die Gleichung des Kegels kann nun als $z^2 = xy$ angenommen werden. Die Kurve U sehen wir jetzt als Projektion einer auf dem Kegel liegenden Kurve aus einem Punkt u der z-Achse an; u machen wir zum uneigentlichen Punkt dieser Achse. Es sei p' ein beliebiger Punkt von U mit den Koordinaten x, y; projizieren wir ihn auf den Kegel nach p, so ergibt als dritte Koordinate von $p: z = \sqrt{x\,y}$, wobei wir einen der Werte von $\sqrt{x\,y}$ festsetzen. Beschreibt p' geschlossene Wege, so wird p in seine Anfangslage zurückkehren, wenn $\sqrt{x\,y}$ eindeutig ist, d. h.:

Satz 15b: *Die Projektion einer auf einem Kegel zweiter Ordnung liegenden Kurve kann samt dem scheinbaren Umriß des Kegels immer dann als Bild einer Netzfläche mit zerfallenden*

Haupttangentenkurven angesehen werden, wenn sie keine Doppelüberdeckung ist.[1]

Man kann jetzt leicht zu einer einfachen Darstellung der Laguerre'schen Kurven in Punktkoordinaten gelangen, indem man sich zunächst die Gleichungen einer Minimalkurve aufstellt. Bedeutet x einen Parameter, und führt man in der uneigentlichen Ebene homogene Koordinaten ein, so lautet die Gleichung des absoluten Kegelschnittes $K \equiv XY - Z^2 = 0$ oder:

$$\rho X = x$$
$$\rho Y = \frac{1}{x}$$
$$\rho Z = 1,$$

wo ρ einem Proportionalitätsfaktor bezeichnet. Die Gleichung einer Tangente von K ist dann, wegen

$$K_X : K_Y : K_Z = Y : X : -2Z = 1 : x^2 : -2x,$$
$$X + x^2 Y - 2xZ = 0$$

und daher die einer Minimalebene:

$$X + x^2 Y - 2xZ = 2\alpha.$$

Denken wir uns α als algebraische Funktion von $x, \alpha = f(x)$, so wird durch:

$$X + x^2 Y - 2xZ = 2f(x)$$

die allgemeinste algebraische Minimaltorse dargestellt. Für die zugehörige Gratlinie ergeben sich noch die zwei weiteren Gleichungen:

$$xY - Z = f'(x)$$
$$Y = f''(x)$$

und erhalten daher als Parameterdarstellung einer Minimalkurve:

$$X = x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x)$$
$$Y = f''(x)$$
$$Z = xf''(x) - f'(x),$$

welche der Differentialgleichung $dZ^2 = dX . dY$ genügen müssen. Die Gleichung einer Kurventangente lautet dann ($\overline{X}$, usw. bedeuten die laufenden Koordinaten):

$$\frac{\overline{X} - X}{X'} = \frac{\overline{Y} - Y}{Y'} = \frac{\overline{Z} - Z}{Z'}.$$

---

[1] D. h. nicht alle Projektionsstrahlen Bisekanten der auf dem Kegel liegenden Kurve sind.

Für ihren Schnitt mit $\overline{Z} = 0$ ergibt sich

$$\overline{X} = X - X' \frac{Z}{Z'}, \quad \overline{Y} = Y - Y' \frac{Z}{Z'}$$

oder wegen $X' = x^2 f'''(x)$, $Y' = f'''(x)$, $Z' = x f'''(x)$ (statt $\overline{X}$ schreiben wir X usw.):

$$X = 2 . f(x) - x . f'(x)$$

$$Y = \frac{1}{x} . f'(x).$$

Setzen wir $y = f(x)$, so läßt sich also jede Laguerre'sche Kurve darstellen durch:

$$X = 2y - x \frac{dy}{dx}$$

$$Y = \frac{1}{x} \frac{dy}{dx}.$$

Wir deuten nun die algebraische Funktion $y = f(x)$ als Kurve im Koordinatensystem XY und fragen, wie muß diese Kurve beschaffen sein, damit die durch die beiden vorigen Gleichungen dargestellte Kurve eine Laguerre'sche ist.

Durch jedes Wertepaar x_1, y_1 $(= f(x_1))$ ist eine Erzeugende der Minimaltorse bestimmt; wenn der Schnitt derselben mit $Z = 0$ keine Laguerre'sche Kurve ist, so gehört er der Doppelkurve der Torse an, d. h. zu *jedem* Wertepaar x_1, y_1 gehört ein zweites, welches für X, Y denselben Wert liefert. Damit dies eintritt, ist sicher notwendig, daß für ein solches Paar auch $\frac{dY}{dX}$ den gleichen Wert annimmt. Es ergibt sich:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{-\frac{1}{x^2} y' + \frac{1}{x} y''}{2y' - xy'' - y'} = \frac{xy'' - y'}{-x^2 (xy'' - y')} = -\frac{1}{x^2},$$

denn wäre identisch $xy'' - y' = 0$, so ergäbe sich $y = ax^2 + b$ und unsere Formeln würden für diesen Fall keine Kurve, sondern den *Punkt* $X = 2b$, $Y = 2a$ ergeben. Damit also zwei Punkten x_1, y_1 und x_2, y_2 der gleiche Punkt X, Y entspricht, muß notwendig $x_1^2 = x_2^2$ sein. Aus unseren Formeln folgt nun weiter: $y_1' = x_1 . Y$, dies in die andere eingesetzt, $X = 2y_1 - x_1^2 Y$ und analog $X = 2y_2 - x_2^2 Y$, also $2(y_1 - y_2) = (x_1^2 - x_2^2) Y = 0$, daher $y_1 = y_2$; mithin kann nur $x_1 = -x_2$ sein, d. h.:

Satz 16: *Bedeutet (x, y) eine algebraische Kurve, die nicht symmetrisch zur Y-Achse ist, so stellen die Gleichungen:*

$$X = 2y - x\frac{dy}{dx},$$

$$Y = \frac{1}{x}\ \frac{dy}{dx}$$

immer eine Laguerre'sche Kurve dar; sonst eine Doppelüberdeckung, die keine Laguerre'sche Kurve ist. Auszuschließen ist nur der Fall $y = ax^2 + b$, der einen Punkt liefert.

Im ersten Fall sind die Kurven (x, y) und (X, Y) eindeutig aufeinander bezogen und haben daher gleiches Geschlecht. In obigen Formeln hat man also ein einfaches Mittel, um Laguerre'sche Kurven beliebigen Geschlechtes zu ermitteln.

Die gewonnenen Formeln gelten natürlich auch für Laguerre'sche Richtungskurven, d. h. deren absolutes Punktepaar mit den Kreispunkten zusammenfällt. Will man aber reelle Darstellungen, so kann man folgendermaßen vorgehen. Die Gleichung des absoluten Kegelschnittes kann in gewöhnlichen rechtwinkeligen Koordinaten als $X^2 + Y^2 = Z^2$ oder in Parameterform

$$X : Y : Z = (x^2 - 1)\ 2x : (x^2 + 1)$$

angenommen werden. Durch

$$X.(x^2 - 1) + Y.2x - Z(x^2 + 1) + f(x) = 0$$

wird eine dem Kegelschnitt umschriebene Torse dargestellt, deren Gratlinie durch:

$$X = \frac{1}{2}f - \frac{x}{2}f' + \frac{x^2 - 1}{4}f'',$$

$$Y = -\frac{1}{2}f' + \frac{x}{2}f'',$$

$$Z = \frac{1}{2}f - \frac{x}{2}f' + \frac{x^2 + 1}{4}f''$$

gegeben wird.[1] Für die Schnittkurve der Torse mit $Z = 0$ ergibt sich, wenn $y = f(x)$ gesetzt wird:

$$X = \frac{y - xy'}{x^2 + 1}$$

$$Y = \frac{-xy + \frac{x^2 - 1}{2}y'}{x^2 + 1}.$$

[1] Diese Formeln sind das Analogon zu den Weierstraß'schen Formeln der gewöhnlichen Minimalkurven. Man vgl. Weierstraß: Monatsber. Berlin 1866, p. 619.

Diese Gleichungen stellen im allgemeinen eine Laguerre'sche Richtungskurve dar. Um zu untersuchen, wann dies nicht der Fall ist, bilden wir:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1-x^2}{2x},$$

dabei kürzt sich der Ausdruck $y - xy' + \frac{x^2+1}{2} y''$, der für $y = ax^2 + 2bx - a$ identisch verschwindet;[1] für solche Kurven geben aber obige Formeln einen Punkt: $X = -a$, $Y = -b$. Nun überlegen wir genau wie früher; aus $\frac{1-x_1^2}{2x_1} = \frac{1-x_2^2}{2x_2}$ folgt: $(x_1 x_2 + 1)(x_1 - x_2) = 0$, also $x_2 = -\frac{1}{x_1}$ oder $x_1 = x_2$. Daher, wenn zunächst $x_2 = -\frac{1}{x_1}$ angenommen wird:

$$X = \frac{y_2 - x_2 y_2'}{x_2^2 + 1} = \frac{y_2 + \frac{1}{x_1} y_2'}{\frac{1}{x_1^2} + 1} = \frac{x_1^2 y_2 + x_1 y_2'}{1 + x_2^2}$$

und:

$$X = \frac{y_1 - x_1 y_1'}{x_1^2 + 1}.$$

Mithin:

$$x_1^2 y_2 - y_1 + x_1 (y_2' + y_1') = 0.$$

Analog ergibt sich aus der Formel für Y:

$$x_1 (y_2 + y_1) + \frac{1-x_1^2}{2} (y_2' + y_1') = 0$$

und durch Elimination von $y_2' + y_1'$ aus den beiden Gleichungen:

$$x_1^2 y_2 + y_1 = 0.$$

Die Kurve (x, y) geht also durch die Transformation:

$$x_2 = -\frac{1}{x_1}, \quad y_2 = -\frac{y_1}{x_1^2}$$

in sich über; dieselbe ist eine involutorische quadratische Transformation. Der noch mögliche Fall $x_1 = x_2$ ist auf die

---

[1] Durch Differenzierung der Gleichung $y - xy' + \frac{x^2+1}{2} y'' = 0$ erhält man $\frac{x^2+1}{2} y''' = 0$, woraus sich $y = ax^2 + 2bx - a$ als Lösung ergibt.

gleiche Art zu behandeln und kommt nicht in Betracht, da sich $x_1^2+1=0$ ergibt. Wir können sagen:

Satz 17: *Durch die Formeln:*

$$X=\frac{y-xy'}{x^2+1},\quad Y=\frac{-xy+\dfrac{x^2-1}{2}y'}{x^2+1}$$

wird jeder algebraischen Kurve (x,y), die nicht durch die quadratische Transformation $x_2=-\dfrac{1}{x_1}$, $y_2=-\dfrac{y_1}{x_1^2}$ in sich übergeht, eine Laguerre'sche Richtungskurve zugeordnet. Auszuschließen sind nur die Kurven $y=ax^2+2bx-a$, da ihnen Punkte entsprechen.

Berichtigung zu:

H. Neudorfer: Konstruktion der Haupttangentenkurven auf Netzflächen (Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. Wien, Bd. 134, Abt. IIa, p. 205 bis 214).

Auf p. 210 ff. wird ein quadratisches Kegelschnittsystem untersucht. Im vorletzten Absatz von Nr. II, auf p. 211, wird behauptet, daß es zu jedem Kegelschnitt des Systems einen zweiten gäbe, der ihn in t hyperoskuliert. Dieser Kegelschnitt ist jedoch immer die doppelt gezählte Gerade T, so daß die Aussage des letzten Absatzes von II damit hinfällig wird.