Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Beiträge zur Kenntnis der atmosphärischen Elektrizität

Nr. 68

Grundzüge einer Theorie des elektrischen Feldes der Erde II

Von

Hans Benndorf

w. M. d. Akad.

Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Graz Nr. 52

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. März 1927)

III. Abschnitt.

Beziehung zwischen Raumladung und Feldstärke im Erdfeld.

§ 10. Influenzierung einer leitenden Kugel durch Ladungen, die auf Kugelflächen verteilt sind.

Als Vorbereitung für den weiteren Ausbau der Theorie des Erdfeldes sollen im folgenden einige Beziehungen zwischen Raumladung und Feldstärke abgeleitet werden, die von grundlegender Bedeutung für das Verständnis des Erdfeldes sind.

I. Influenzierung einer leitenden Kugel durch eine gleichmäßig mit Ladung versehene Kugelkalotte.

Um diese Aufgabe zu lösen, gehen wir zunächst von der Betrachtung des wohlbekannten Falles der Influenzierung einer Kugel durch eine Punktladung aus. Es sei eine leitende, isolierte und ungeladene Kugel vom Radius r_0 der Einwirkung einer Punktladung e im Abstand r vom Mittelpunkt ausgesetzt. Das elektrische Feld außerhalb der Kugel ist dann bekanntlich gleich dem Felde, das sich durch Superposition der Felder dreier Punktladungen e, e', e'' ergibt, wobei die influenzierende Ladung im Abstand r, $e' = -e\frac{r_0}{r}$ im Abstand $r' = \frac{r_0^2}{r}$ das Bild von e ist und $e'' = -e' = e\frac{r_0}{r}$ im Mittelpunkt der Kugel befindlich ist. Das Feld, welches von e' stammt, entspricht dem Felde, herrührend von der Influenzladung erster Art auf der Kugel, während das Feld, welches von e'' stammt, dem Feld, herrührend von der Influenzladung zweiter Art, entspricht. Im folgenden soll die altmodische Bezeichnungsweise »Influenzladung erster und zweiter Art« beibehalten werden, weil sie sich sehr gut zu einer kurzen Ausdrucksweise eignet.

Um nun die Influenzwirkungen einer gleichmäßig mit Ladung e $\left(\text{Flächendichte } \eta = \frac{e}{f}\right)$ versehenen Kugelkalotte K vom Radius $r = r_0 + h$ und dem Öffnungswinkel 2θ auf eine Kugel vom Radius r_0 zu berechnen, denken wir uns die Kugelkalotte, deren Flächeninhalt

$$f = 2r^2\pi(1 - \cos\theta) = 4\pi r^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$$

beträgt, in so kleine Flächenelemente df zerlegt, daß die Ladung $de = \eta\, df$ eines solchen Flächenelementes als Punktladung angesehen werden und die obige Betrachtungsweise auf sie angewendet werden kann. Tut man dies, so ergibt sich, daß die Influenzwirkung der Kugelkalotte wieder durch die Summe der Felder dreier Ladungsverteilungen dargestellt werden kann. Erstens das Feld $\mathfrak{E}$, herrührend von der Ladung e auf K, zweitens das Feld $\mathfrak{E}'$, herrührend von einer Ladung $e' = -e\frac{r_0}{r}$ auf einer innerhalb der Kugel zu denkenden Kugelkalotte K', dem Bild von K mit dem Radius $r' = \frac{r_0^2}{r}$, und drittens das Feld $\mathfrak{E}''$ einer Punktladung $e'' = -e' = e\frac{r_0}{r}$ im Mittelpunkt der Kugel. Die Dichte der Influenzladung σ_i auf der Kugelfläche läßt sich dann ansehen als Summe der Influenzladungsdichten erster und zweiter Art $\sigma_i = \sigma_1 + \sigma_2$ und bestimmt sich aus den Werten des Feldes an der Kugeloberfläche $\mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}'_0 + \mathfrak{E}''_0$ nach den Gleichungen $4\pi\sigma_1 = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}'_0$ und $4\pi\sigma_2 = \mathfrak{E}''_0$.

Im folgenden wird uns hauptsächlich der Fall interessieren, daß die Kugelkalotte K sehr nahe an der Kugelfläche liegt. Wir setzen daher $r = r_0 + h$, $r' = r_0 - h'$ und entwickeln nach Potenzen von $\frac{h}{r_0}$, vorläufig unter Beibehaltung der Glieder erster Ordnung. Es ergibt sich dann:

$$r' = r_0\left(1 - \frac{h}{r_0}\right) \text{ also } h' = h;\; e' = -e\left(1 - \frac{h}{r_0}\right);\; e'' = e\left(1 - \frac{h}{r_0}\right);$$

$$f = 2\pi r_0^2\left(1 + \frac{2h}{r_0}\right)(1 - \cos\theta) = 4\pi r_0^2\left(1 + \frac{2h}{r_0}\right)\sin^2\frac{\theta}{2};$$

$$f' = 2\pi r_0^2\left(1 - \frac{2h}{r_0}\right)(1 - \cos\theta) = 4\pi r_0^2\left(1 - \frac{2h}{r_0}\right)\sin^2\frac{\theta}{2};$$

$$\eta = \frac{e}{f} = \frac{e}{4\pi r_0^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}\left(1 - \frac{2h}{r_0}\right);$$

$$\eta' = \frac{e'}{f'} = -\frac{e}{4\pi r_0^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}\left(1+\frac{h}{r_0}\right);\ \eta'/\eta = -\left(1+3\frac{h}{r_0}\right).$$

Wir nehmen nun für das Folgende an, h sei so klein, daß $\frac{h}{r_0}$ gegen 1 zu vernachlässigen ist; es wird dann:

$$r = r' = r_0,\ e' = -e,\ e'' = e,\ f = 4\pi r_0^2 \sin^2\frac{\theta}{2} = f',$$

$$\eta' = -\eta = -\frac{e}{4\pi r_0^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Wir erhalten somit folgende Ladungsverteilung auf der Kugel: Die Influenzladung erster Art verteilt sich mit der Dichte $\sigma_1 = -\eta$ auf einen Flächenraum $f = 4 r_0^2 \pi \sin^2\frac{\theta}{2}$ der Kugel gleichmäßig und die Influenzladung zweiter Art gleichmäßig auf die ganze Kugel mit der Dichte

$$\sigma_2 = \frac{e''}{4\pi r_0^2} = \eta \sin^2\frac{\theta}{2};$$

es ist somit die Gesamtladungsdichte auf der Kugel unterhalb der influenzierenden Kalotte

$$\sigma_i = -\eta\left(1-\sin^2\frac{\theta}{2}\right) = -\eta\cos^2\frac{\theta}{2} \tag{70}$$

und auf dem übrigen Teil der Kugelfläche

$$\sigma_i' = \eta \sin^2\frac{\theta}{2}. \tag{71}$$

Zu demselben Resultat kommt man auch, wenn man das Problem nach der von Maxwell in seinem Treatise angegebenen Methode mit Kugelfunktionen streng löst. Es ergibt sich

$$\sigma_i = -\eta\cos^2\frac{\theta}{2} + R \text{ und } \sigma_i' = \eta\sin^2\frac{\theta}{2} + R',$$

wobei R und R' Glieder sind, die der Randstörung eines Plattenkondensators entsprechen und zu vernachlässigen sind, wenn $\frac{h}{r_0} \ll 1$ wird.

Die Voraussetzung, daß die Glieder von der Größe $\frac{h}{r_0}$ vernachlässigt werden können, setzt natürlich voraus, daß die Fläche der influenzierenden Kugelkalotte nicht zu klein ist, ihr Umfang $u = 2\pi r_0 \sin\theta$ muß groß gegen h sein, eine Voraussetzung, die im folgenden stets gemacht werden soll.

Bis jetzt war die Kugel als ungeladen angenommen, besitzt sie die Eigenladung e_0, so verteilt sich diese gleichmäßig über die ganze Kugeloberfläche mit der Flächendichte $\sigma_0 = \frac{e_0}{4\pi r_0^2}$, so daß sich für die gesamte Ladungsdichte unterhalb der influenzierenden Kugelkalotte, ich nenne diesen Teil der Kugelfläche kurz die »bedeckte Zone«,

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_i = \sigma_0 - \eta + \sigma_i' = \sigma_0 - \eta \cos^2 \frac{\theta}{2} \tag{72}$$

und für die Ladungsdichte σ' an den übrigen Stellen der Kugeloberfläche, auf der »freien Zone«,

$$\sigma' = \sigma_0 + \sigma_i' = \sigma_0 + \eta \sin^2 \frac{\theta}{2} \tag{73}$$

ergibt.

Bezeichnen wir den Flächeninhalt der bedeckten Zone wie oben mit $f = 4\pi r_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ und mit $f' = 4\pi r_0^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ den Flächeninhalt der freien Zone und mit $F = f + f' = 4\pi r_0^2$ die Oberfläche der Kugel, ferner die Flächenverhältnisse

$$\frac{f}{F} = \varepsilon = \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \frac{f'}{F} = \varepsilon' = \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

so erhalten wir:

$$\sigma = \sigma_0 - \eta\, \varepsilon' \text{ und} \tag{72'}$$

$$\sigma' = \sigma_0 + \eta\, \varepsilon; \tag{73'}$$

die Gesamtladung der Kugel wird dann $\sigma f + \sigma' f' = \sigma_0 F$, wie es sein muß; σ_i nimmt mit wachsendem f ab, während σ_i' zunimmt. Folgende Tabelle gibt Zahlenwerte, wenn $\sigma_0 = 0$ gesetzt wird:

θ	10°	30°	50°	70°	90°	110°	130°	150°	170°
	0·008	0·067	0·179	0·329	0·500	0·671	0·821	0·933	0·992
$-\sigma/\eta$	0·992	0·933	0·821	0·671	0·500	0·329	0·179	0·067	0·008
σ'/η ..	0·008	0·067	0·179	0·329	0·500	0·671	0·821	0·933	0·992

Als Resultat unserer bisherigen Betrachtungen läßt sich der Satz aussprechen: Wird eine isolierte leitende, mit der Ladung e_0 versehene Kugel von einer auf einer konzentrischen Kugelkalotte gleichmäßig verteilten Ladung e influenziert, dann verteilt sich die Eigenladung e_0 und die Influenzladung zweiter Art von der Größe e gleichmäßig über die ganze Kugelfläche, während die Influenzladung erster Art von dem Betrage $-e$ sich gleichmäßig auf der bedeckten

Zone ausbreitet. Vorausgesetzt ist dabei nur, daß die influenzierende Kugelkalotte in unmittelbarer Nachbarschaft der Kugelfläche liegt.

II. Influenzierung einer Kugel durch ein beliebig begrenztes Stück einer gleichmäßig mit Ladung belegten Kugelschale.

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß der oben ausgesprochene Satz auch gültig bleibt, wenn die influenzierende Raumladung nicht wie oben angenommen auf einer Kugelkalotte, sondern auf einem beliebig begrenzten Stück der Kugelfläche mit dem Radius r_0+h gleichmäßig verteilt ist; dabei wird nur vorausgesetzt, daß 1. $h \ll r_0$ und 2. $h \ll u$ ($u =$ Umfang des Flächenstückes) und das Flächenstück selbst nicht zu schmal ist.

Wir können daher sagen: Wird auf einer Kugelfläche, die der Bedingung 1 genügt, ein beliebiges Stück f so abgegrenzt, daß die Bedingung 2 erfüllt ist, und f dann gleichmäßig mit der Flächenladung e versehen, dann verteilt sich die Ladung $-e$ gleichmäßig auf der bedeckten Zone der Kugel und die Ladung $+e$ gleichmäßig auf der ganzen Kugelfläche.

Wir können nunmehr gleich zu einer Verallgemeinerung übergehen. Denken wir uns eine Kugelfläche, die der Bedingung 1 genügt, in n Gebiete $f_1, f_2 \ldots f_n$ so eingeteilt, daß für jedes Gebiet die Voraussetzung 2 gilt und dann jedes Gebiet gleichmäßig mit der Flächenladung $e_1, e_2 \ldots e_n$ belegt, dann wird unter jeder Flächenladung e_k auf der Kugel die Influenzladung $-e_k$ sitzen und außerdem wird die Ladung $e_0+e_1+e_2 \ldots e_n = e_0+e$ gleichmäßig über die Kugel verteilt sein.

Führen wir noch folgende Abkürzungen ein

$$\varepsilon_k = \frac{f_k}{F}, \quad \eta_k = \frac{e_k}{f_k}$$

und das Oberflächenmittel der Dichte der influenzierenden Ladungen

$$\widehat{\eta} = \frac{e_1+e_2 \ldots +e_n}{F},$$

dann ergibt sich aus obigem:

$$\sigma_k = \sigma_0 + \widehat{\eta} - \eta_k = \frac{e_0+e}{F} - \eta_k \tag{74}$$

in Worten ausgedrückt: Die Flächendichte im k Gebiet der influenzierten Kugel können wir berechnen, indem wir die gesamte influenzierende Elektrizitätsmenge e auf der mit der Eigenladung e_0 versehenen Kugel kondensiert denken und von der sich so ergebenden Flächendichte $\sigma = \sigma_0 + \widehat{\eta}$ die Flächendichte η_k abziehen.

Schreiben wir die Gleichung (74)

$$\sigma_k + \eta_k = \sigma_0 + \widehat{\eta} = \frac{e_0 + e}{F}, \tag{74'}$$

so läßt sich der Satz aussprechen: Die Summe der Flächenladungsdichte σ_K und Dichte der influenzierenden Ladung η_K ist für jedes k, d. h. alle Punkte der Kugeloberfläche konstant.

III. Verallgemeinerung für den Fall, daß die Ladungen räumlich verteilt sind. Das Feld um die Kugel.

Wir wollen nun den Fall betrachten, daß die influenzierenden Ladungen nicht flächenhaft auf einer Kugelfläche mit dem Radius $r_0 + h$, sondern räumlich zwischen den Kugelflächen mit den Radien r_0 und $r_0 + H$ verteilt sind, und zwar so, daß die Raumladungsdichte innerhalb jedes der n-Gebiete auf einer mit der Kugel konzentrischen Kugelfläche konstant ist, wobei auch H noch sehr klein gegen r_0 angenommen werden soll. Es ist einleuchtend, daß die früheren Betrachtungen unmittelbar auf diesen Fall übertragen werden können und die Gleichungen (74) ihre Gültigkeit behalten, wenn wir unter e_k die gesamte Raumladung im k-Gebiet und unter $\eta_k = \frac{e_k}{f_k}$ die Raumladung innerhalb einer Säule vom Querschnitt 1 verstehen.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_H$ die Feldstärken an der Oberfläche der Kugel, im Abstand h $(0 < h < H)$, und im Abstand H von ihr, die Raumladungen in einer Säule vom Querschnitt 1 und der Höhe h, beziehungsweise H mit η, beziehungsweise η_H, so ergibt sich nach dem Gauss'schen Satz, angewendet auf eine Kraftröhre vom Querschnitt 1

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = 4\pi\eta \tag{75}$$

$$\mathfrak{E}_H - \mathfrak{E}_0 = 4\pi\eta_H \tag{76}$$

$$\mathfrak{E}_0 = 4\pi\sigma \tag{77}$$

gültig für jedes der n-Gebiete.

Multiplizieren wir (74) mit 4π und lassen den Index k fort, so ergibt sich, unter Berücksichtigung von (76)

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{e_0 + e}{r_0^2} - \mathfrak{E}_H + \mathfrak{E}_0$$

daher:

$$\mathfrak{E}_H = \frac{e_0 + e}{r_0^2}, \tag{78}$$

d. h. die Feldstärke im Abstand H von der Kugel ist nur abhängig von der Eigenladung der Kugel und der gesamten Raumladung und daher in jedem der n-Gebiete gleich groß, und zwar so groß, als wenn die gesamte Ladung $e_0 + e$ im Mittelpunkt der Kugel vereinigt wäre.

Auf den ersten Blick hat es etwas Überraschendes, daß eine Kugel, die in der Nähe ihrer Oberfläche von beliebig verschiedenen Raumladungen umgeben ist, nach außen wie eine gleichmäßig geladene Kugel wirkt; es wird aber verständlich, wenn man bedenkt, daß die Raumladung und die Influenzladung erster Art, die gleiche Größe und entgegengesetztes Vorzeichen besitzen, sich wegen ihrer räumlichen Nähe in der Wirkung nach außen aufheben und das Feld nur herrührt von den Influenzladungen zweiter Art, die sich gleichmäßig über die Kugel verteilen.[1]

Ferner ergibt sich aus (74) und (78)

$$\mathfrak{E}_0 = \frac{e_0 + e}{r_0^2} - 4\pi\eta_H = \mathfrak{E}_H - 4\pi\eta_H, \tag{79}$$

d. h. die Feldstärke an der Kugeloberfläche in einem Gebiete k hängt nur ab von $e_0 + e$ und der Raumladung im k-Gebiet.

Schließlich erhalten wir für die Feldstärke in der Höhe h:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + 4\pi\eta = \frac{e_0 + e}{r_0^2} - 4\pi(\eta_H - \eta) =$$

$$= \frac{e_0 + e}{r_0^2} - 4\pi\eta_r = \mathfrak{E}_H - 4\pi\eta_r, \tag{80}$$

wobei $\eta_r = \eta_H - \eta$ die Raumladung oberhalb der Höhe h zwischen h und H bezeichnet. Man kann daher sagen: Die Feldstärke an irgendeiner Stelle in der Höhe h im k-Gebiet hängt nur ab von der Gesamtladung $e_0 + e$ und den Raumladungen, die in diesem Gebiet oberhalb der betreffenden Stelle liegen.[2]

Nunmehr können wir die gefundenen Gesetzmäßigkeiten auf das Erdfeld anwenden.

§ 11. Anwendungen auf das elektrische Feld der Erde.

Wenn wir annehmen dürfen, daß merkliche Raumladungen nur in einer relativ dünnen Schichte der Atmosphäre in der Nähe des Erdbodens vorhanden sind, lassen sich die Betrachtungen des vorigen Paragraphen unmittelbar auf das Erdfeld anwenden. Überlegen wir nun, was wir über die Raumladungsverteilung in der Atmosphäre aussagen können.

---

[1] Daraus folgt, daß man bei einem metallischen Konduktor, der lackiert und an einer Stelle z. B. durch Reiben elektrisiert ist, durch Messungen im Außenraum, auch wenn man ganz nahe an den Konduktor herangeht, nicht entscheiden kann, an welcher Stelle er elektrisiert ist.

[2] Es muß hervorgehoben werden, daß die in Gleichung (79) und (80) ausgesprochenen Beziehungen zwischen Feldstärke und Raumladung schon vor mehr als 30 Jahren in einer sehr beachtenswerten, aber wenig beachteten Arbeit von W. Trabert, Wien, Ber., IIa, *103*, 1023, 1894, aufgestellt sind, allerdings in einer nicht ganz korrekten Allgemeinheit.

I. Sitz der Raumladungen in der Atmosphäre.

Zunächst sei vorausgeschickt, daß wir uns hier nur mit der normalen Raumladungsverteilung bei ungestörtem Erdfeld beschäftigen wollen; ausgeschlossen sind daher alle rein lokalen Raumladungen, wie sie etwa durch Staub- und Schneestürme und Gewitter hervorgerufen werden. Dann dürfen wir wie üblich annehmen, daß die Potentialniveauflächen des Erdfeldes mit der Erdoberfläche konzentrische Kugelflächen sind, die für kleine Flächenräume genügend genau als horizontale Ebenen betrachtet werden können. Die Leitfähigkeit der Luft nimmt rasch mit der Höhe zu; an der Erdoberfläche ist sie von der Größenordnung $\Lambda_0 = 10^{-4}\,\mathrm{sec}^{-1}$, in 20 *km* Höhe beträgt sie vermutlich mindestens das Hundertfache $\Lambda_{20} = 10^{-2}\,\mathrm{sec}^{-1}$ und in 100 *km* Höhe dürfte sie etwa das 10^{10}-fache, also $\Lambda_{100} = 10^{6}\,\mathrm{sec}^{-1}$ betragen.

Infolge des Vorhandenseins dieser Leitfähigkeit sind die Kraftröhren des Erdfeldes auch gleichzeitig Stromröhren; die Stromdichte des vertikalen Leitungsstromes hat die Größenordnung $10^{-6}\,\mathrm{Aes}/cm^2 = 3\times 10^{-16}\,\mathrm{Aes}/cm^2$. Herrscht in einer solchen Röhre der stationäre Zustand, dann muß $j = \Lambda\,\mathfrak{E} = j_0$ in allen Höhen konstant sein. Die vertikale Feldverteilung ist in diesem Fall also gegeben durch $\mathfrak{E} = j_0/\Lambda = j_0\,\mathrm{P}$ ($\mathrm{P} = 1/\Lambda$ spezifischer Widerstand der Luft) und die Raumladungsdichte ist gegeben durch:

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial h} = -\frac{j_0}{4\pi}\,\frac{1}{\Lambda^2}\,\frac{\partial\Lambda}{\partial h} = \frac{j_0}{4\pi}\,\frac{\partial\mathrm{P}}{\partial h}; \tag{81}$$

die gesamte in einer Säule von der Höhe h, beziehungsweise H und dem Querschnitt 1 enthaltene Raumladung ist:

$$\eta = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0) = \frac{j_0}{4\pi}\left(\frac{1}{\Lambda} - \frac{1}{\Lambda_0}\right) = \frac{j_0}{4\pi}(\mathrm{P} - \mathrm{P}_0) \tag{82}$$

$$\eta_H = \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E}_H - \mathfrak{E}_0) = \frac{j_0}{4\pi}\left(\frac{1}{\Lambda_H} - \frac{1}{\Lambda_0}\right) = \frac{j_0}{4\pi}(\mathrm{P}_H - \mathrm{P}_0) \tag{83}$$

$$\eta_r = \eta_H - \eta = \frac{j_0}{4\pi}\left(\frac{1}{\Lambda_H} - \frac{1}{\Lambda}\right) = \frac{j_0}{4\pi}(\mathrm{P}_H - \mathrm{P}). \tag{84}$$

Setzen wir nun in diese Gleichungen, um eine ungefähre Vorstellung davon zu bekommen, wie hoch merkbare Raumladungen in die Atmosphäre hinaufreichen, für die Höhen 0, 20 und 100 *km* die oben angeführten Werte für Λ ein, so ergibt sich:

$$\frac{\eta_{100} - \eta_{20}}{\eta_{20}} = \frac{10^2 - 10^{-6}}{10^4 - 10^2} = 0\cdot 01,$$

d. h. zwischen 20 und 100 *km* ist nur mehr 1/100 der Raumladung zwischen Erdboden und 20 *km* Höhe vorhanden, praktisch genommen liegt also die gesamte Raumladung innerhalb der untersten 20 *km*. Dies gilt unter der Voraussetzung der stationären Stromverteilung in einer Stromröhre.

Ist dagegen durch irgendwelche Einflüsse, z. B. durch plötzliche Herabsetzung der Leitfähigkeit infolge von Nebelbildung, an einer Stelle der Luftsäule der stationäre Stromzustand gestört, so wird durch den Vertikalstrom selbst in kurzer Zeit der stationäre Zustand wieder hergestellt, so daß man im allgemeinen ruhig annehmen darf, daß durch alle Querschnitte einer Stromröhre derselbe Strom fließt. Daß sich der stationäre Zustand, wenn er gestört wird, wirklich so rasch wieder herstellt, ergibt sich aus folgender Rechnung unter Berücksichtigung der Leitfähigkeitswerte der Luft.

Die zeitliche Änderung der Raumladungsdichte an einer Stelle ist durch die Divergenz des Leitungsstromes gegeben; es ist daher $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial h}$ und wenn wir für den Wert aus (81) einsetzen

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial h}\right) = -\frac{\partial j}{\partial h};$$

hieraus folgt durch Integration

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + j = C,$$

wo C nur Funktion von t ist. Führen wir nun für $\mathfrak{E}$, j/Λ ein, so ergibt sich:

$$\frac{\partial j}{\partial t} + 4\pi\left(\Lambda - \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}\right)j = 4\pi\Lambda C$$

als Differentialgleichung für j. Im allgemeinen ist sowohl der Faktor von j als auch C als vorgegebene Funktion der Zeit zu betrachten. Da sich jedoch herausstellen wird, daß die Zeit bis zum Eintritt des stationären Zustandes klein ist, können wir Λ sowohl wie C, dessen physikalische Bedeutung weiter unten hervortreten wird, während dieser kurzen Zeit als zeitlich konstant betrachten. Es resultiert dann eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten: $\frac{\partial j}{\partial t} + 4\pi\Lambda j = 4\pi\Lambda C$, deren Integral lautet: $j = (j^0 - C)\,e^{-4\pi\Lambda t} + C$; j^0 bedeutet den Wert von j zur Zeit 0 und C ist offenbar der stationäre Endwert von j, den wir mit j^∞ bezeichnen wollen. Es wird dann $j - j^\infty = (j^0 - j^\infty)\,e^{-4\pi\Lambda t}$; bezeichnen wir mit $\Delta j = j - j^\infty$ die jeweilig vorhandene Abweichung vom stationären Endzustand und die Relaxationszeit mit $\tau = \frac{1}{4\pi\Lambda}$, so können wir auch schreiben $\Delta j = \Delta j^0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ und sehen daraus, daß die Zeit τ, nach der die Abweichung auf den $e$ten Teil gesunken ist, nur von Λ abhängt; nach der Zeit

$$T_c = \tau \ln 100 = \frac{4 \cdot 6\, t}{4 \pi \Lambda} = \frac{0 \cdot 37\, t}{\Lambda}$$

beträgt die Abweichung nur mehr 1/100 ihres Anfangswertes.

Für verschiedene Λ ergeben sich dann folgende Zahlenwerte:

h......	0	20	100 *km*
Λ	10^{-4}	10^{-2}	10^{6} sec^{-1}
T_c	3700	37	37×10^{-4} sec

Aus diesen Daten ist zu entnehmen, daß oberhalb von 20 *km* die Einstellung des stationären Zustandes, wenn einmal eine plötzliche Störung hervorgerufen worden ist, so rasch erfolgt, daß wir sagen können, oberhalb von 20 *km* befindet sich der Leitungsstrom praktisch genommen immer dauernd im stationären Zustand. Die Kleinheit der Zeiten T_c rechtfertigt nunmehr nachträglich auch die obige Annahme der zeitlichen Konstanz von Λ und C.

Als Schlußresultat ergibt sich nunmehr die Feststellung, daß die Raumladungen in der Atmosphäre sich knapp an der Erdoberfläche befinden, so daß eine Niveaufläche in 20 *km* Seehöhe 99% der Raumladung einschließt, womit die Möglichkeit gegeben erscheint, die Ausführung des vorigen Paragraphen auf die Atmosphäre anzuwenden.

II. Die Raumladung an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche.

Da die Raumladung in der Atmosphäre auf das innigste mit der Änderung der Leitfähigkeit mit der Höhe verknüpft ist, werden wir von vornherein zu erwarten haben, daß sie über verschiedenen Teilen der Erdoberfläche verschieden ist. Die Leitfähigkeit hängt ab vom Emanationsgehalt der Luft, der Kernzahl, dem Staubgehalt usw. und hat daher über Land andere Werte als über Wasser, im Sommer andere als im Winter. Im allgemeinen wird man also, wenn man von rein lokalen Unterschieden absieht und die Verhältnisse im großen betrachtet, annehmen dürfen, daß, ähnliche Bodenbeschaffenheit vorausgesetzt, unter ähnlichen meteorologischen und klimatischen Verhältnissen ähnliche Beträge der Leitfähigkeit und damit auch der Raumladung zu erwarten sind. Wir können daher auf der Erdoberfläche Gebiete abgrenzen, innerhalb deren wir gleiche Raumladungen voraussetzen können. Es hängt ganz vom Genauigkeitsgrad unserer Untersuchungen ab, wie groß diese Gebiete gewählt werden können. Will man die Verhältnisse nur in ganz großen Zügen studieren, wird es genügen, zwei Gebiete zu wählen, Land und Wasser. Für eingehendere Untersuchungen wird man das Landgebiet unterteilen, etwa in tropische, gemäßigte und polare Zonen usw.

Für die folgenden Betrachtungen denken wir uns die Erdoberfläche in n-Gebiete eingeteilt, von denen aber jedes einzelne noch so ausgedehnt sein soll, daß sein Umfang groß ist gegen die Höhe von 20 *km*, also in Gebiete, die einige 100 *km* im Durchmesser haben. Auf diese Gebiete lassen sich dann die Betrachtungen des vorigen Paragraphen anwenden.

Wenn wir dann von Feldstärken, Leitungsstrom usw. in einem solchen Gebiet sprechen, sind darunter Werte gemeint, die als Oberflächenmittelwerte der in dem betreffenden Gebiet wirklich zu beobachtenden Größe anzusehen sind. Im übrigen soll der weitere Ausbau dieser Theorie dazu führen, auch in kleinen Gebieten die Veränderung des Feldes angeben zu können.

III. Das elektrische Feld und der vertikale Leitungsstrom in der Stratosphäre.

Nachdem wir jetzt also festgestellt haben, daß und wie weit die in § 10 aufgestellte Theorie auf das Erdfeld angewendet werden kann, wollen wir dazu übergehen, das elektrische Feld in der Atmosphäre in Höhen oberhalb der Raumladung, also oberhalb von etwa 20 *km* zu betrachten; wir wollen dafür kurz sagen, das Feld in der Stratosphäre. Wir fanden, daß dieses Feld in der Höhe H über allen Orten der Erde zu einer bestimmten Zeit nur von der Eigenladung der Erde und der gesamten Raumladung abhängt und nach (78) den Wert $\mathfrak{E}_H = \frac{e_0 + e}{r_0^2}$ besitzt.

Eine Änderung des Feldes mit der Zeit kann nur eintreten, falls sich $e_0 + e$ ändert; Austausch von Elektrizität zwischen Erde und Atmosphäre ist ohne jeden Einfluß. Im Rahmen unserer Voraussetzungen kann eine Änderung von $e_0 + e$ nur bewirkt werden durch den unbekannten Zustrom und den Leitungsstrom durch die Kugelfläche S in der Höhe H. Dabei sei daran erinnert, daß vorausgesetzt ist, daß der Zustrom nicht aus der Atmosphäre kommt, sondern entweder durch sie hindurch (z. B. Hypothese der Zufuhr von negativer Ladung durch rasche Elektronen) oder aus dem Inneren der Erde (Hypothese von Swann über das Sterben der positiven Elektrizität in großen rotierenden Körpern). Unter Beibehaltung der Vorzeichenfestsetzung für den Zustrom Z und den Leitungsstrom J, wie sie in dem ersten Teil der Theorie des Erdfeldes[1] angegeben ist, ergibt sich für die zeitliche Änderung von $\mathfrak{E}_H$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_H}{\partial t} = \frac{-Z - J_H}{r_0^2}. \tag{85}$$

Bezeichnen wir die Leitungsstromdichte im k-Gebiet mit j_{Hk}, so wird

$$J_H = \sum_1^n {}_k f_k j_{Hk} = \mathfrak{E}_H \sum_1^n {}_k f_k \Lambda_{Hk} = \mathfrak{E}_H . F . \widehat{\Lambda}_H,$$

[1] Wiener Ber., Abt. II*a*, *134*, 281, 1925; wird im folgenden immer zitiert, als Th. I.

wenn wir das Oberflächenmittel von Λ_H über die ganze Kugel genommen mit $\widehat{\Lambda}_H = \frac{1}{F}\sum f_k \Lambda_{Hk}$ bezeichnen. Setzen wir diesen Wert in (85) ein, so ergibt sich die Differentialgleichung für $\mathfrak{E}_H$

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_H}{\partial t} + 4\pi \widehat{\Lambda}_H \mathfrak{E}_H = -\frac{Z}{r_0^2} \tag{86}$$

und ihr vollständiges Integral lautet:

$$\mathfrak{E}_H = e^{-4\pi\int_0^t \widehat{\Lambda}_H dt}\left[\mathfrak{E}_H^0 - \int_0^t \frac{Z}{r_0^2} e^{4\pi\int_0^t \widehat{\Lambda}_H dt} dt\right]. \tag{87}$$

Aus dieser Gleichung ersieht man, daß $\mathfrak{E}_H$ nur abhängt vom Zustrom Z und dem Oberflächenmittel der Leitfähigkeit $\widehat{\Lambda}_H$ in der Höhe H.

Da die strenge Lösung (87) sehr unübersichtlich ist, können wir hier ähnlich verfahren wie in Th. I, § 8, II, p. 311, und eine für die meisten Fälle ausreichende Lösung finden, wenn wir annehmen, daß $\frac{\partial \mathfrak{E}_H}{\partial t}$ außerordentlich klein gegenüber den anderen Gliedern der Differentialgleichung ist und daher $\frac{\partial \mathfrak{E}_H}{\partial t}$ vernachlässigen; es ergibt sich dann, wenn wir mit z den Zustrom, berechnet pro 1 cm^2 Erdoberfläche, bezeichnen, die einfache Gleichung

$$\mathfrak{E}_H = -\frac{Z}{F}\cdot\frac{1}{\widehat{\Lambda}_H} = -\frac{z}{\widehat{\Lambda}_H}, \tag{88}$$

die wir nun besprechen wollen.

Da z von der Größenordnung 10^{-6} Aes/cm^2 ist, $\widehat{\Lambda}_H$ dagegen etwa 10^{-2} sec^{-1} beträgt, ergibt sich für $\mathfrak{E}_H$ die Größenordnung -10^{-4} Ves/cm $= -3$ V/m, ein Wert, der noch zu hoch sein dürfte, da $\Lambda_{20} = 10^{-2}$ ein vermutlich zu niedrig angesetzter Wert ist. Die einzigen experimentell in großen Höhen bestimmten Werte von $\mathfrak{E}_H$ stammen von Idrac;[1] wie weit sie zuverlässig und typisch sind, wird sich erst feststellen lassen, wenn mehr Beobachtungen vorliegen. Idrac findet bei einer Ballonfahrt $\mathfrak{E}_{17} = -5$ V/m und $\mathfrak{E}_{19} = -1\cdot 2$ V/m. Die älteren Ballonfahrten ergeben etwa $\mathfrak{E}_9 = -5$ V/m. Aus diesen experimentellen Daten und aus der obigen Rechnung ergibt sich jedenfalls, daß $\mathfrak{E}_{20}$ bereits sehr klein gegen $\mathfrak{E}_0$ ist.

Über die zeitlichen und örtlichen Schwankungen von Λ_H können wir nur Vermutungen aufstellen. Als sehr wahrscheinlich können wir

[1] C. R., *180*, 1635, 1926.

annehmen, daß Veränderungen von Λ_H in Höhen von etwa 20 *km* hauptsächlich durch Veränderungen der Ionenzahlen, beziehungsweise der Ionisationsstärken bedingt sind. Als Ionisatoren kommen nach unseren gegenwärtigen Kenntnissen hauptsächlich das ultraviolette Sonnenlicht und die Hess'sche Höhenstrahlung in Betracht. An einem bestimmten Ort wird Λ_H also vermutlich im Laufe des Tages zunehmen und in der Nacht langsam abklingen; $\widehat{\Lambda}_H$ dagegen, der Mittelwert über die ganze Erde, wird ziemlich konstant bleiben, aber vielleicht eine schwache jahreszeitliche Schwankung aufweisen.

Sind diese Vermutungen richtig, dann würde sich ergeben, daß die tägliche Änderung von $\mathfrak{E}_H$ nur von einer eventuell vorhandenen täglichen Änderung von Z bedingt wäre. Jahreszeitliche Änderungen können nur durch Z und $\widehat{\Lambda}_H$ hervorgerufen sein.

Während nun $\mathfrak{E}_H$ nach unserer Theorie in einer bestimmten Höhe H und zu einer bestimmten Zeit an allen Orten gleich groß ist, ergibt sich für J_H ein abweichendes Verhalten. Aus (88) ergibt sich für das k-Gebiet:

$$J_{Hk} = \Lambda_{Hk} . \mathfrak{E}_H = -\frac{Z}{\widehat{\Lambda}_H} . \Lambda_{Hk}; \tag{89}$$

J_H ist also in den verschiedenen Gebieten im allgemeinen verschieden. In jenen Gebieten, die Tag haben, ist J_H größer als in jenen, in die kein Sonnenstrahl dringt.

Es zeigt sich also, daß in diesen Höhen der Leitungsstrom von drei Variabeln Z, Λ_H und $\widehat{\Lambda}_H$ abhängt, während $\mathfrak{E}_H$ nur von Z und $\widehat{\Lambda}_H$ abhängt. Die Veränderungen von J_H werden also im allgemeinen komplizierter sein, als die von $\mathfrak{E}_H$, was von Interesse ist, da in der Nähe der Erdoberfläche der Leitungsstrom das einfachere Element ist.

IV. Das elektrische Feld und der Leitungsstrom an der Erdoberfläche.

Um die Veränderungen von $\mathfrak{E}_0$ zu erklären, gehen wir von (76) aus; wir betrachten ein bestimmtes, das k-Gebiet und müßten konsequenter Weise eigentlich an die entsprechenden Größen den Index k anhängen. Der Einfachheit halber soll dies aber unterlassen werden. Wir setzen also $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}_H - 4\pi\eta_H$, differenzieren nach der Zeit und erhalten:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_H}{\partial t} - 4\pi \frac{\partial \eta_H}{\partial t}. \tag{90}$$

Die Änderung der gesamten Raumladung η_H in einer Säule von der Höhe H und dem Querschnitt 1 kann im Rahmen unserer Voraussetzungen, die konvektiven Elektrizitätstransport ausschließen, nur durch den Leitungsstrom bedingt sein; es ist $\frac{\partial \eta_H}{\partial t} = j_0 - j_H$ gleich der Differenz der Leitungsstromdichten. Führen wir $\Lambda_0 \mathfrak{E}_0$, beziehungsweise $\Lambda_H \mathfrak{E}_H$ für j_0 und j_H ein, dann wird aus (90):

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t} + 4\pi \Lambda_0 \mathfrak{E}_0 = \frac{\partial \mathfrak{E}_H}{\partial t} + 4\pi \Lambda_H \mathfrak{E}_H; \tag{91}$$

setzen wir hier für den Wert von $\frac{\partial \mathfrak{E}_H}{\partial t}$, wie er sich aus (86) ergibt, ein, so wird:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t} + 4\pi \Lambda_0 \mathfrak{E}_0 = -\frac{Z}{r_0^2} + 4\pi (\Lambda_H - \widehat{\Lambda}_H) \mathfrak{E}_H; \tag{92}$$

setzen wir ferner hier noch aus (87) den Wert für $\mathfrak{E}_H$ ein, dann sieht man, daß die rechte Seite der Differentialgleichung eine Funktion von $\mathfrak{E}_H^0$, Z, Λ_H, $\widehat{\Lambda}_H$ wird; da die drei letzten Größen im allgemeinen Funktionen der Zeit sind, wird auch die rechte Seite von (92) eine Funktion $\Phi(t)$ von t mit dem Parameter $\mathfrak{E}_H^0$. Wir schreiben somit die Differentialgleichung für $\mathfrak{E}_0$ in der Form:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t} + 4\pi \Lambda_0 \mathfrak{E}_0 = \Phi(t) \tag{93}$$

und erhalten das allgemeine Integral für $\mathfrak{E}_0$:

$$\mathfrak{E}_0 = e^{-4\pi \int_0^t \Lambda_0 \, dt} \left[\mathfrak{E}_0^0 + \int_0^t \Phi(t) \,.\, e^{4\pi \int_0^t \Lambda_0 \, dt} \, dt \right], \tag{94}$$

woraus wir entnehmen, daß $\mathfrak{E}_0$ im k-Gebiet einerseits von Z, $\widehat{\Lambda}_H$, anderseits von Λ_H und Λ_0 in diesem Gebiet abhängt.

Machen wir bestimmte Annahmen über die Zeitabhängigkeit von Z, $\widehat{\Lambda}_H$, Λ_H und Λ_0, so ließe sich aus (94) $\mathfrak{E}_0$ als Funktion von t berechnen; bei dem vorläufigen Stand unserer Kenntnisse hätte das aber wohl wenig Wert, zumal ja noch zu erweisen ist, wie weit die Voraussetzungen unserer Theorie hinreichend sind, die wirklichen Verhältnisse zu erfassen.

Wir begnügen uns daher auch hier mit derselben Annäherung wie oben und vernachlässigen in (92) $\frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t}$ gegenüber den übrigen Gliedern; setzen wir dann in (92) für $\mathfrak{E}_H$ den Wert aus (88) ein, so ergibt sich:

$$\mathfrak{E}_0 = -\left(\frac{z}{\widehat{\Lambda}_H}\right) \frac{\Lambda_H}{\Lambda_0}. \tag{95}$$

Diese sehr einfache Gleichung zeigt, wie $\mathfrak{E}_0$ von Z, $\widehat{\Lambda}_H$, Λ_H und Λ_0 abhängt; das in Klammer gesetzte Glied ist für alle Gebiete zu einer bestimmten Zeit gleich groß und ergibt die Abhängigkeit der Feldstärke von Weltzeit, während der Faktor $\frac{\Lambda_H}{\Lambda_0}$ die ortszeitliche Veränderlichkeit wiedergibt.

Für die Leitungsstromdichte erhalten wir die einfachere Beziehung:

$$j_0 = \Lambda_0 \mathfrak{E}_0 = -\left(\frac{z}{\widehat{\Lambda}_H}\right) \Lambda_H = j_H. \tag{96}$$

Bilden wir die Summe $\sum f j_0$ für alle Gebiete der Erde, so ergibt sich:

$$\widehat{j}_0 = -z. \tag{97}$$

Besäßen wir also ein ausreichendes Beobachtungsmaterial von j_0 an den verschiedenen Orten der Erde, so ließe sich die zeitliche Veränderlichkeit des Zustromes ermitteln, es ließe sich dann auch herausbringen, ob zeitliche Konstanz des Zustromes vorhanden ist, wie sie z. B. die Swann'sche Hypothese fordert.

Leider ist das vorliegende Beobachtungsmaterial noch sehr wenig brauchbar zur Prüfung unserer Theorie; ich erblicke daher auch vorläufig den Hauptwert der Theorie darin, daß sie Fingerzeige gibt, in welcher Richtung das Beobachtungsmaterial zu ergänzen ist, was an anderer Stelle ausgeführt werden soll.

Nur einige Bemerkungen mögen hier Platz finden. Daß das elektrische Feld der Erde über den Ozeanen eine einfache tägliche Periode nach Weltzeit aufweist, wäre nach unserer Theorie so zu erklären, daß das Verhältnis Λ_H/Λ_0 über den Ozeanen nahezu konstant ist, d. h. keine Tagesschwankung zeigt. Das ist auch nach dem, was wir über Λ_0 über den Ozeanen wissen, nicht unplausibel. Erstens beträgt die Tagesschwankung von Λ_0 nur etwa $10^0/_0$ des Tagesmittels und dann ist die Leitfähigkeit über den Ozeanen im Gegensatz zu den Landstationen bei Tag größer als in der Nacht; da wir wegen der ionisierenden Wirkung des Sonnenlichtes auch für Λ_H annehmen müssen, daß es bei Tag größer ist als bei Nacht, ist anzunehmen, daß Λ_H/Λ_0 relativ konstant ist. Das Überwiegen einer täglichen Periode nach Ortszeit bei den Landstationen wäre im Sinne unserer Theorie hauptsächlich durch die Variation von Λ_0 bedingt. Weitere Prüfungen der Theorie an dem vorhandenen Beobachtungsmaterial behalte ich einer späteren Mitteilung vor.

V. Feld und Leitungsstrom in der Troposphäre.

Wir wollen nun das Feld in irgendeiner Höhe h über dem Erdboden betrachten. Nach (80) ist:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_H - 4\pi\eta_r, \tag{98}$$

wo η_r die Raumladung in einer Luftsäule vom Querschnitt 1 zwischen h und H bezeichnet. Wir können daher die Rechnungen des vorigen Abschnittes unmittelbar beibehalten, wenn wir einfach bei allen Größen, die unten den Index 0 tragen, diesen fortlassen. Es ergibt sich daraus eine unmittelbar der Gleichung (94) entsprechende Gleichung für $\mathfrak{E}$.

Auch hier wollen wir uns mit der genäherten Gleichung begnügen und erhalten statt (95) und (96):

$$\mathfrak{E} = -\left(\frac{z}{\bar{\Lambda}_H}\right)\frac{\Lambda_H}{\Lambda} \tag{99}$$

und

$$j = -\left(\frac{z}{\bar{\Lambda}_H}\right)\Lambda_H = j_0 = j_H. \tag{100}$$

Im übrigen gilt hier mit entsprechender Abänderung das im vorigen Abschnitt Gesagte. Nur muß bemerkt werden, daß sich hier beim Vergleich mit der Erfahrung am meisten bemerkbar machen wird, daß in der Theorie die Abwesenheit von Konvektionsströmen vorausgesetzt ist; es ist wohl anzunehmen, daß die Konvektionsströme wenigstens in den untersten 100 *m* eine wesentliche Rolle spielen, weshalb hier die Theorie auf jeden Fall erweiterungsbedürftig erscheint. Im § 12 sollen diesbezüglich noch einige Betrachtungen angestellt werden.

Ferner ergibt sich:

$$\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}_0} = \frac{\Lambda_0}{\Lambda}. \tag{101}$$

Da anzunehmen ist, daß Λ gerade in der Nähe des Erdbodens wenigstens zu gewissen Tageszeiten sich stark ändert, gilt dies auch für $\mathfrak{E}$, was mit der Erfahrung übereinstimmt, die wir den sorgfältigen Gefällemessungen Norinder's verdanken. Aus der Beziehung (101) wird es auch verständlich, warum Bestimmungen des Reduktionsfaktors, die zu dem Zweck angestellt werden, um Feldstärkemessungen auf die Ebene reduzieren zu können, so starke Schwankungen dieser Größe aufweisen.

§ 12. Einfluß von Konvektionsströmen.

Eine eingehendere Berücksichtigung der Konvektionsströme soll einer späteren Mitteilung vorbehalten bleiben, in der die Theorie entsprechend erweitert wird. Hier mögen nur einige kurze Bemerkungen Platz finden.

Konvektionsströme können auf das Feld in zweifacher Weise einwirken, insofern sie einerseits eine Änderung der Gesamtladung $e_0 + e$ bewirken, anderseits die Raumladung oberhalb des Beobachtungsortes verändern. Für die Änderung der Gesamtladung sind Konvektionsströme innerhalb der Atmosphäre oder zwischen Erde und Atmosphäre ohne Einfluß und es kommen dafür nur Konvektionsströme in Betracht, die von außen in den betrachteten Teil der

Atmosphäre eindringen. Nach unseren gegenwärtigen Kenntnissen kommen für solche von außen herkommende Konvektionsströme wohl nur Korpuskularstrahlen, die von der Sonne stammen, in Betracht; doch ist ihr Einfluß auf das Feld, insofern sie eine Änderung der Gesamtladung bewirken, nur klein, da ja der Anteil des Feldes, der von der Raum- und Erdladung herrührt, an sich nur sehr klein ist. Dieser Umstand rechtfertigt, daß im folgenden nur der Einfluß von Konvektionsströmen auf die Raumladung oberhalb des Beobachtungsortes in Rücksicht gezogen wird. Betrachten wir also die Raumladung in einem bestimmten unserer oben charakterisierten Gebiete, und zwar zunächst die ganze Raumladung η_H vom Erdboden bis zur Höhe H. In ein solches Gebiet kann Elektrizitätszufuhr erfolgen von oben durch Korpuskularstrahlen, eine Elektrizitätsabfuhr nach unten durch Niederschläge, eine Zufuhr von positiver Elektrizität durch aus den Bodenkapillaren quellende Luft und schließlich eine Zu- oder Abfuhr durch horizontale Luftströmungen. Alle diese Konvektionsströme denken wir uns durch einen einzigen $\mathfrak{K}$ ersetzt, der dem betrachteten Gebiet für jeden Quadratzentimeter seiner Grundfläche in der Sekunde die Elektrizitätsmenge $\mathfrak{k}$ zuführt. Das Vorzeichen dieser Konvektionsstromdichte $\mathfrak{k}$ soll so festgesetzt werden, daß $\mathfrak{k}$ positiv ist, wenn in summa positive Elektrizität dem Gebiet zugeführt, beziehungsweise negative entzogen wird.

Betrachten wir (90), so wird $\frac{\partial \eta_H}{\partial t}$ jetzt gegeben sein durch

$$\frac{\partial \eta_H}{\partial t} = j_0 - j_H + \mathfrak{k}$$

und (92) nimmt die Form an:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t} + 4\pi \Lambda_0 \mathfrak{E}_0 = -4\pi z + 4\pi (\Lambda_H - \widehat{\Lambda}_H) \mathfrak{E}_H - 4\pi \mathfrak{k}. \qquad (102)$$

Setzen wir $z + \mathfrak{k} = z'$, so erhält (102) dieselbe Gestalt wie (92), nur ist z durch z' ersetzt, d. h. wir können sagen, die Wirkung der Konvektionsströme äußert sich in dem betrachteten Gebiet so, als ob die Zustromdichte um den Betrag $\mathfrak{k}$ vergrößert wäre. Es läßt sich nun unter schematisch vereinfachten Annahmen verfolgen, welche Einwirkung der Konvektionsstrom z. B. bei Niederschlägen oder im Falle des Ebert'schen Konvektionsstromes auf das Feld hat. Die diesbezüglichen Überlegungen sollen, wie schon gesagt, einer späteren Mitteilung vorbehalten bleiben. Hier genüge darauf hingewiesen zu haben, in welcher Weise der Konvektionsstrom in Rechnung zu stellen ist.

§ 13. Zusammenfassung der Resultate, soweit sie das Erdfeld betreffen.

In diesem zweiten Teil der Theorie des elektrischen Feldes der Erde sind folgende allgemeine Voraussetzungen gemacht. Zunächst wird vorausgesetzt, daß die Leitfähigkeit der Atmosphäre mit der Höhe rasch anwächst. Wenn man annimmt, daß in etwa 20 *km* Höhe die Leitfähigkeit der Luft auf das Hundertfache des Bodenwertes gestiegen ist, so ergibt sich, daß in dieser Höhe das Feld wenigstens im Mittel, ein Hundertel des Feldes an der Erdoberfläche sein muß, da der gesamte Leitungsstrom in 20 *km* Höhe im Mittel so groß sein muß, wie an der Erde; außerdem folgt, daß 99% der gesamten Raumladung der Atmosphäre in den untersten 20 *km* zusammengedrängt sind. Wird an einer Stelle einer Stromröhre in der Atmosphäre die Feldstärke konstant erhalten und außerdem angenommen, daß die Leitfähigkeit an verschiedenen Stellen dieser Röhre zeitlich konstant ist, dann stellt sich nach beliebig vorgegebenen Anfangszuständen der stationäre Stromzustand in dieser Stromröhre ein. Die Zeit, in der die anfänglich vorhandenen Abweichungen vom stationären Endzustand bis auf ein Hundertel ihres Wertes abgesunken sind, beträgt $T_c = 0 \cdot 37/\Lambda$ sec, also für Luft an der Erdoberfläche rund eine halbe Stunde, in 20 *km* Höhe rund eine viertel Minute. Daraus kann gefolgert werden, daß, wenn sich Feldstärke und Leitfähigkeit in einer Stromröhre so langsam ändern, daß die Änderungen in der Zeit T_c klein sind, in dieser Stromröhre praktisch genommen stets der stationäre Zustand herrscht.

Teilt man die Erdoberfläche in eine beliebige Zahl von Gebieten ein, von denen nur vorausgesetzt wird, daß sie so groß sind, daß es mindestens einen Punkt in ihnen gibt, der von allen Punkten des Randes wenigstens 100 *km* entfernt ist, und nimmt an, daß in der Luftsäule über diesen Gebieten die Leitfähigkeit und damit auch Raumladung in horizontalen Schichten gleich groß, also an allen Stellen des Gebietes dieselbe Funktion der Höhe h sind, so läßt sich zeigen, daß die Feldstärke $\mathfrak{E}_H$ in der Höhe H über allen Gebieten gleich groß ist und denselben Wert hat, als wenn die gesamte Eigenladung der Erde e_0 sowie die gesamte Raumladung der Atmosphäre e im Erdmittelpunkt vereinigt wäre. Dabei wird H einerseits so groß angenommen, daß im wesentlichen die ganze Raumladung in der Atmosphäre unterhalb der Höhe H liegt, anderseits klein gegen den Erdradius. Diese Bedingungen werden mit genügender Annäherung erfüllt für $H = 20$ *km*, aber es steht nichts im Wege, H auch größer zu wählen und damit etwa bis $H = 80$ *km*, also bis in die Heavisideschichte hinaufzugehen.

Die Leitfähigkeit in diesen Höhen wird vermutlich nur abhängig sein von der Stärke der Ionisatoren (ultraviolettes Sonnenlicht, Hess'sche Höhenstrahlung) und ihre Veränderung wird hauptsächlich bedingt sein durch den Wechsel von Tag und Nacht. Zur selben Ortszeit wird daher die Leitfähigkeit Λ_H in allen Gebieten ziemlich denselben Wert haben. Über die Korpuskularstrahlung der Sonne als Ionisator wissen wir gegenwärtig noch zu wenig, um bestimmte Aussagen machen zu können; sie kann jedenfalls an bestimmten Orten und zu verschiedenen Zeiten die Leitfähigkeitswerte nur um einen gewissen Betrag erhöhen.

Nennen wir die Kugelfläche, die in der Höhe H die Erde umgibt, S und berechnen den gesamten Leitungsstrom J_H, der durch S hindurchfließt, so ergibt sich $J_H = \widehat{\Lambda}_H . F . \mathfrak{E}_H$, wenn $\widehat{\Lambda}_H$ das zu einer bestimmten Zeit genommene Oberflächenmittel von Λ_H und F den Flächeninhalt von S bedeutet. Es ist zu vermuten, daß $\widehat{\Lambda}_H$ innerhalb eines Tages sehr angenähert konstant ist, dagegen vielleicht eine jährliche Veränderlichkeit zeigt. J_H hängt nur ab von der Intensität des unbekannten Vorganges, der die Erdladung aufrecht erhält und den ich Zustrom Z genannt habe. Das Vorzeichen von Z ist so gewählt, daß ein positiver Wert von Z einer Zufuhr negativer Ladung zur Erde äquivalent ist. Ist dieser Zustrom langsam veränderlich (gemessen nach T_c), so muß immer $J_H = -Z$ sein. Aus dieser Beziehung läßt sich $\mathfrak{E}_H$ in ihrer Abhängigkeit von den primären Ursachen des Feldes (Z und Λ) berechnen; es ist $\mathfrak{E}_H = -\frac{z}{\widehat{\Lambda}_H}$, wenn z den Zustrom pro 1 cm^2 Erdoberfläche bedeutet, und ist für alle Gebiete gleich groß. Dasselbe gilt nicht mehr für die Stromdichte des Leitungsstromes durch die Fläche S; sie variiert von Gebiet zu Gebiet und hat den Wert $j_H = -\frac{Z}{\widehat{\Lambda}_H} \Lambda_H$, wenn wir j_H und Λ_H auf das betrachtete Gebiet beziehen; sie ist größer in Gebieten, die Tag haben, als in denen, die Nacht haben.

Betrachten wir nun eine Stromröhre vom Querschnitt 1 in irgendeinem Gebiet. Wie oben ausgeführt wurde, muß, genügend langsame Veränderung von Z und Λ vorausgesetzt, in dieser Stromröhre stets der stationäre Zustand herrschen, also

$$j_0 = j = j_H = -\frac{Z}{\widehat{\Lambda}_H} \Lambda_H$$

sein. Aus dieser Beziehung wäre zu folgern, daß j einerseits von z, anderseits von $\Lambda_H / \widehat{\Lambda}_H$ abhängt, also eine Übereinanderlagerung einer Periode nach Weltzeit und einer nach Ortszeit darstellt.

Aus der Beziehung für j_0, beziehungsweise j ergibt sich dann unmittelbar ein Ausdruck für die Feldstärke an der Erdoberfläche, beziehungsweise in der Höhe h; es ist

$$\mathfrak{E}_0 = -\frac{Z}{\widehat{\Lambda}_H} \cdot \frac{\Lambda_H}{\Lambda_0}, \text{ beziehungsweise } \mathfrak{E} = -\frac{Z}{\widehat{\Lambda}_H} \cdot \frac{\Lambda_H}{\Lambda}.$$

Trifft die Voraussetzung zu, daß $\widehat{\Lambda}_H$ zeitlich konstant ist, dann hängt die Feldstärke nur ab einerseits vom Zustrom Z (weltzeitlicher Faktor), anderseits von $\frac{\Lambda_H}{\Lambda}$ (ortszeitlicher Faktor).

Wie weit sich aus dem vorliegenden Beobachtungsmaterial die gegebene Theorie stützen läßt, soll in einer späteren Mitteilung untersucht werden. Hier sei vorläufig nur erwähnt, daß die Perio von $\mathfrak{E}_0$ nach Weltzeit, die über dem Ozean beobachtet wurde, ve ständlich erscheint, wenn man beachtet, daß Λ_0 über dem Oze bei Tag größer ist als bei Nacht (im Gegensatz zum Festland) un daß Λ_H vermutlich ebenfalls bei Tag größer ist als bei Nacht, daß es sehr gut möglich erscheint, daß Λ_H/Λ_0 keine nennenswer tägliche Periode zeigt und die tägliche Schwankung von $\mathfrak{E}_0$ üb dem Ozean ein Bild der Schwankung des Zustromes ist.

In der vorliegenden Arbeit werden ferner strengere Formel abgeleitet, die gestatten, Feld- und Leitungsstrom in ihrer Abhängigke von den zeitlichen Schwankungen der Leitfähigkeit und des Zu stromes zu berechnen, wenn die Voraussetzung des stationäre Zustandes nicht mehr erfüllt ist.

Alle Rechnungen sind angestellt unter Vernachlässigung d Konvektionsströme, womit zumindest alle gestörten Zustände de Erdfeldes von der Theorie nicht erfaßt werden können. In einer vor läufigen Betrachtung wird im § 12 der Einfluß der Konvektionsström behandelt, der sich für ein bestimmtes Gebiet im wesentlichen al eine Änderung des Zustromes deuten läßt.

Es möge vielleicht hier noch besonders hervorgehoben werden daß in diesem Teil der Theorie nicht die Voraussetzung gemacht wird, daß der obere Teil der Atmosphäre sich wie eine metallisc leitende Hülle verhält, was vielleicht als ein Fortschritt gegenübe dem ersten Teil angesehen werden kann.

Eine eingehende Berücksichtigung der Konvektionsströme sowie ein weiterer Ausbau der Theorie wird in einer späteren Mitteilung gegeben werden.

Wenn man auch von einer so simplen Theorie, wie der hier gegebenen, nicht wird erwarten dürfen, daß sie ein so ungemein kompliziertes Erscheinungsgebiet wie das des elektrischen Feldes der Erde, in allen Einzelheiten darstellt, so erscheint es mir doch immerhin möglich, daß diese Theorie wenigstens in großen Zügen ein richtiges Bild von dem Ineinandergreifen der verschiedenen Faktoren gibt. Daß Leitfähigkeit und Zustrom die primären Ursachen des elektrischen Feldes der Erde sind, hat schon Schweidler mit voller Klarheit ausgesprochen. Hier wird der Versuch gemacht, eine quantitative Beziehung zwischen Feld, Leitvermögen und Zustrom aufzustellen, die einer experimentellen Prüfung unterzogen werden kann. Vielleicht besteht der Hauptwert dieser Theorie zunächst in nichts anderem, als daß sie Fingerzeige gibt, wie das planlose Drauflosmessen durch ein systematisches wird ersetzt werden können.