Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

# Zur Integration der linearen Differentialgleichungen

## (VII. abschließende Mitteilung)

Von

Alfred Tauber in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. März 1927)

### Die Integration der linearen Differentialgleichung dritter Stufe.

Nicht bloß in dem bereits erörterten Falle der allgemeinen Lamé'schen Differentialgleichung, sondern überhaupt für jede Differentialgleichung dritter Stufe

$$L_0\overset{3}{\overline{(x)}}y''' + L_1\overset{2}{\overline{(x)}}y'' + L_2\overset{1}{\overline{(x)}}y' + L_3 y = 0 \tag{1}$$

lassen sich die zur Integraldarstellung von $y$

$$\int_x^c \varphi(v) \sum_h \sum \frac{(x-v)^{h+1}(c-v)^\nu F_{h\nu}(v)\,dv}{(h+1)!\,\nu!\,L_0(v)^h}, \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{L_1}{L_0} \tag{2}$$

dienenden Polynome $F_{h\nu}$ independent definieren, und zwar erreicht man dies durch geeignete Wahl der willkürlichen Funktionen $\mathfrak{F}$ in der früher bewiesenen Rekursion

$$\begin{aligned} F_{h\nu} = {} & F'_{h,\nu-1} + M_{h-1,2}\,F_{h-1,\nu-1} + M_{h-1,3}\,L_0\,F_{h-2,\nu-1} - \\ & -(\mathfrak{F}_{h-1,\nu-2} + L_0\,\mathfrak{F}_{h-2,\nu-1}) + (L_0\,\mathfrak{F}'_{h-2,\nu-2} - M_{h-2,1}\,\mathfrak{F}_{h-2,\nu-2}), \end{aligned} \tag{3}$$

in welcher die $M_{h1}$, $M_{h2}$, $M_{h3}$ die Bedeutung

$$L_1 + hL_0',\ L_2 + hL_1' + \binom{h}{2}L_0'',\ L_3 + hL_2' + \binom{h}{2}L_1'' + \binom{h}{3}L_0''' \tag{4}$$

haben. Es bestehen dann auch einfache Beziehungen zwischen den $F$, insbesondere bilden sie Halphen'sche Ketten, vgl. Formel (26) bis (27 $a$).

Die explizite Darstellung der Lösung $y$ beruht auf deren Entwicklung nach den Produkten der Konstanten $M_{h3}$

$$S_\varkappa = M_{\underline{03}}^{|\varkappa}, \quad S_0 = 1, \quad S_\varkappa = M_{03}\,M_{13}\,.\;.\,M_{\varkappa-1,3} \text{ für } \varkappa \geqq 1, \tag{5}$$

indes kommt, wenn man $F_{h\nu}$ nach den $S_\varkappa$ entwickelt

$$F_{h\nu} = \sum_0^j F_{h\nu}^{[\varkappa]}\,S_\varkappa, \quad F_{h\nu}^{[\varkappa]} \text{ von } L_3 \text{ unabhängig,} \tag{6}$$

wobei $j$ irgendwie von $h, \nu$ abhängt, die Kenntnis von $F_{h\nu}^{[\varkappa]}$ nur als Zwischenresultat und außerdem für den Grenzfall $M_{h3} = L_3$ in Frage, welch letzterer den Grenzüberdang $L_2' \rightarrow 0$ bei $L_1'' = L_0''' = 0$ erfordert. Sonst aber findet man mittels jener Polynome $F_{h\nu}^i$, welche aus $F_{h\nu}$ entstehen, wenn $L_3$ durch den Wert

$$-\left[i L_2' + \binom{i}{2} L_1'' + \binom{i}{3} L_0'''\right]$$

ersetzt wird, direkt die $F_{h\nu}$

$$F_{h\nu} = \sum_{i=0}^{j} \sigma_{ji} F_{h\nu}^i, \quad \sigma_{ji} = \prod_0^j \frac{M_{\lambda 3}}{M_{\lambda 3} - M_{i3}} \text{ bei } \lambda \neq i, \ \sigma_{00} = 1, \tag{7}$$

was eine doppelreihige Entwicklung von $y$ nach den Konstanten $S_j/M_{i3}$ (bei $j \geqq i+1$) involviert. Für $F_{h\nu}^{[\varkappa]}$ selbst resultiert

$$F_{h\nu}^{[\varkappa]} = \sum_{i=0}^{\varkappa} \frac{F_{h\nu}^i}{\tau_{\varkappa i}}, \quad \tau_{\varkappa i} = \prod_0^{\varkappa} (M_{\lambda 3} - M_{i3}) \text{ bei } \lambda \neq i, \ \tau_{00} = 1. \tag{7a}$$

Unter den Ansätzen für die zu wählenden Polynome $\mathfrak{F}$ sind jene beiden hervorzuheben, durch welche entweder die Polynome $F_{h\nu}$ mit $h > \nu$ oder die mit $h < \nu$ zum Verschwinden gebracht werden können. Ersteres wird nach (3) erzielt bei

$$\mathfrak{F}_{\nu\nu} = M_{\nu+1,3} F_{\nu\nu}, \quad \mathfrak{F}_{h\nu} = 0 \text{ für } h > \nu, \tag{8}$$

denn die Substitution irgend eines Wertes $h = \nu+2, \nu+3, .$ . in (3) liefert, sobald sämtliche $F$ und $\mathfrak{F}$ verschwinden, deren erster Index größer ist als der zweite, beiderseits ansatzgemäß Null, hingegen die Substitution $h = \nu+1$

$$0 = L_0 M_{\nu 3} F_{\nu-1, \nu-1} - L_0 \mathfrak{F}_{\nu-1, \nu-1}.$$

Im zweiten Falle bringt man, wenn

$$\mathfrak{F}_{\nu\nu} = F'_{\nu+1, \nu-1}, \quad \mathfrak{F}_{h\nu} = 0 \text{ für } h < \nu \tag{8a}$$

erfüllt ist, alle $F_{h\nu}$ mit $h < \nu$, wie durch Einsetzen von $h = \nu-1$ in (3) ersichtlich, zum Verschwinden.

## § 1. Eigenschaften der Polynome $F_{h\nu}$.

Die Beschränkung der Polynome $F_{h\nu}$ auf solche, bei denen der Index $\nu$ nicht kleiner ist als $h$, stellt den $\mathfrak{F}_{h\nu}$ die Bedingungen (8) für $h \geqq \nu$, so daß noch eine Wahl bezüglich der übrigen $\mathfrak{F}$ zu treffen bleibt. Zunächst werde angenommen, daß $\mathfrak{F}_{h\nu}$ bei $\nu \geqq 2h+1$ verschwinde und bei $h < \nu \leqq 2h$ den Grad $2h-\nu$ bezüglich der Variabeln $v$ besitze. Dann gilt dasselbe auch für die $F_{h\nu}$, außerdem wird sowohl $F_{\nu\nu}$ als $\mathfrak{F}_{\nu\nu}$ vom Grade $\nu$ in $v$. Man verifiziert dies, nach sukzessiver Bestimmung der ersten $F_{h\nu}$ für $\nu = 1, 2, 3$, mit Rücksicht auf $F_{00} = 1$, $F_{01} = F_{02} = . \quad . = 0$,

$$F_{11} = L_2,\ F_{12} = -L_3,\ F_{22} = L_2 M_{12} - L_1 M_{13},\ F_{13} = 0,$$
$$F_{23} = -2 L_3 M_{12},\ F_{33} = M_{22} F_{22} + M_{23} (L_0 L_2' - L_0 L_3 - L_2 M_{11}) - L_0 \mathfrak{F}_{12}$$

ebenfalls aus (3), durch Schluß von $\nu$ auf $\nu+1$.

Nunmehr soll, in Verallgemeinerung der ersten Bedingung (8), zwischen den Polynomen $F$ und $\mathfrak{F}$ ein Zusammenhang der Form

$$\mathfrak{F}_{h\nu} = q_{h\nu} M_{h+1,3} F_{h\nu} \tag{9}$$

mit Hilfe von Konstanten $q_{h\nu}$, welche für $h < \nu \leqq 2h$ erst **noch** zu bestimmen bleiben, zugrundegelegt werden. Für $\nu > 2h$ darf man von vornherein $q_{h\nu}$ gleich Null definieren.

Durch diesen Ansatz (9) bezüglich der $\mathfrak{F}$ geht die Rekursion (3) über in

$$\begin{aligned} F_{h\nu} = F'_{h,\nu-1} &- q_{h-1,\nu-2} M_{h3} F_{h-1,\nu-2} - \\ &- (q_{h-2,\nu-1} - 1) L_0 M_{h-1,3} F_{h-2,\nu-1} + M_{h-1,2} F_{h-1,\nu-1} + \\ &+ q_{h-2,\nu-2} M_{h-1,3} (L_0 F'_{h-2,\nu-2} - M_{h-2,1} F_{h-2,\nu-2}). \end{aligned} \tag{10}$$

Hienach läßt sich, wenn die $q$ unabhängig von $L_3$ vorausgesetzt werden, der Grad feststellen, welchen $F_{h\nu}$ bezüglich der Konstanten $L_3$ besitzt und dessen Kenntnis zur Entwicklung (6) des Polynoms $F_{h\nu}$ nach den Produkten $S_\varkappa$ notwendig ist. Durch Abzählung findet man aus (10), daß die höchste Potenz von $L_3$, welche in $F_{h\nu}$ vorkommt, gleich $E\left(\frac{h+\nu}{3}\right)$ ist, man kann also in (6) für $j$ irgend eine Zahl $\geqq E\left(\frac{h+\nu}{3}\right)$ nehmen, beispielsweise $j = h$, so daß man nur jene $F^i_{h\nu}$, für welche $h \geqq i$ ist, bei der Darstellung (7) von $F_{h\nu}$ zu berücksichtigen braucht.

Charakterisisch für die Polynome $F^i_{h\nu}$ ist aber, daß sie für $h \geqq i$ nur untereinander zusammenhängen. Denn die Rekursion der $F^i_{h\nu}$ lautet gemäß (10):

$$\begin{aligned} F^i_{h\nu} = \frac{dF^i_{h,\nu-1}}{dv} &- q_{h-1,\nu-2} M^i_{h3} F^i_{h-1,\nu-2} - \\ &- (q_{h-2,\nu-1} - 1) L_0 M^i_{h-1,3} F^i_{h-2,\nu-1} + M_{h-1,2} F^i_{h-1,\nu-1} + \\ &+ q_{h-2,\nu-2} M^i_{h-1,3} \left(L_0 \frac{dF^i_{h-2,\nu-2}}{dv} - M_{h-2,1} F^i_{h-2,\nu-2}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

unter $M^i_{h3}$ die Differenz $M_{h3}—M_{i3}$ verstanden. Wegen $M^i_{i3} = 0$ erhält man für $h = i+1$

$$F^i_{i+1,\nu} = \frac{dF^i_{i+1,\nu-1}}{dv} - q_{i,\nu-2}\, M^i_{i+1,3}\, F_{i,\nu-2} + M_{i2}\, F_{i,\nu-1},$$

ohne daß rechts ein $F$ vorkäme, dessen erster Index kleiner als $i$ wäre.

Die Wahl der bisher offen gelassenen Konstanten $q_{h\nu}$ könnte nach verschiedenen Gesichtspunkten geschehen. Im folgenden wird den Polynomen $F_{h\nu}$ die Bedingung gestellt, daß sie untereinander durch Halphen'sche Relationen

$$F'_{h\nu} - q_{h-1,\nu-1}\, M_{h3}\, F_{h-1,\nu-1} = \delta_{h\nu}\, F_{h,\nu+1}, \quad \nu \leqq 2h-1, \tag{12}$$

(mit gewissen noch zu bestimmenden Konstanten $\delta_{h\nu}$) verbunden sein sollen und gleichzeitig eine lineare, von Differentialquotienten freie Rekursion der Polynome konstanter Indexdifferenz

$$F_{h\nu},\ F_{h-1,\nu-1},\ F_{h-2,\nu-2},\ F_{h-3,\nu-3}$$

zustande kommt. Die Gültigkeit von (12) kann auf beliebige $\nu$ ausgedehnt werden, wenn man $\delta_{h\nu} = 0$ für $\nu \geqq 2h$ definiert.

Durch die Anwendung der Relation (12) ermöglicht man die Eliminierung der beiden in (10) auftretenden Differentialquotienten $F'_{h,\nu-1}$ und $F'_{h-2,\nu-2}$, für welche man nur die ihnen gleichen linearen Verbindungen von Polynomen $F$ zu substituieren braucht, um aus (10) eine von Differentialquotienten freie Beziehung

$$\begin{aligned}(1-\delta_{h,\nu-1})\, F_{h\nu} = {} & M_{h-1,2}\, F_{h-1,\nu-1} - q_{h-2,\nu-2}\, M_{h-2,1}\, M_{h-1,3}\, F_{h-2,\nu-2} + \\ & + q_{h-2,\nu-2}\, q_{h-3,\nu-3}\, L_0\, M_{h-1,3}\, M_{h-2,3}\, F_{h-3,\nu-3} + \\ & + (q_{h-2,\nu-2}\,\delta_{h-2,\nu-2} - q_{h-2,\nu-1} + 1)\, L_0\, M_{h-1,3}\, F_{h-2,\nu-1}\end{aligned} \tag{13}$$

zu gewinnen, welche unter der Bedingung

$$q_{h-2,\nu-2}\,\delta_{h-2,\nu-2} = q_{h-2,\nu-2} - 1 \tag{14}$$

die verlangte Rekursion von Polynomen konstanter Indexdifferenz liefert:

$$\begin{aligned}F_{h\nu} = {} & \frac{M_{h-1,2}\, F_{h-1,\nu-1}}{1-\delta_{h,\nu-1}} - \frac{q_{h-2,\nu-2}}{1-\delta_{h,\nu-1}}\, M_{h-2,1}\, M_{h-1,3}\, F_{h-2,\nu-2} + \\ & + \frac{q_{h-2,\nu-2}\, q_{h-3,\nu-3}}{1-\delta_{h,\nu-1}}\, L_0\, M_{h-1,3}\, M_{h-2,3}\, F_{h-3,\nu-3}.\end{aligned} \tag{15}$$

Sie gilt aber nur für $\nu \leqq 2h-1$, während für $\nu = 2h$ die aus (13) folgende Gleichung $\delta_{h,2h-1} = 1$ an ihre Stelle tritt.

Um jetzt die $q$ zu bestimmen, muß man die Gleichung (15) nach $v$ differentiieren

$$\frac{1}{1-\delta_{h,\nu-1}}\left[M_{h-1,2}F'_{h-1,\nu-1}+M'_{h-1,2}F_{h-1,\nu-1}\right]-$$

$$-\frac{q_{h-2,\nu-2}M_{h-1,3}}{1-\delta_{h,\nu-1}}\left[M_{h-2,1}F'_{h-2,\nu-2}+M'_{h-2,1}F_{h-2,\nu-2}\right]+$$

$$+\frac{q_{h-2,\nu-2}M_{h-1,3}q_{h-3,\nu-3}M_{h-2,3}}{1-\delta_{h,\nu-1}}\left[L_0F'_{h-3,\nu-3}+L'_0F_{h-3,\nu-3}\right],$$

die drei rechts stehenden Differentialquotienten durch ihre Werte, vgl. (12),

$$F'_{h-1,\nu-1}=q_{h-2,\nu-2}M_{h-1,3}F_{h-2,\nu-2}+\delta_{h-1,\nu-1}F_{h-1,\nu}$$

$$F'_{h-2,\nu-2}=q_{h-3,\nu-3}M_{h-2,3}F_{h-3,\nu-3}+\delta_{h-2,\nu-2}F_{h-2,\nu-1}$$

$$F'_{h-3,\nu-3}=q_{h-4,\nu-4}M_{h-3,3}F_{h-4,\nu-4}+\delta_{h-3,\nu-3}F_{h-3,\nu-2}$$

ersetzen und das erhaltene Resultat derart mit

$$q_{h-1,\nu-1}M_{h3}F_{h-1,\nu-1}+\delta_{h\nu}F_{h,\nu+1}$$

in Übereinstimmung bringen, daß sowohl alle $F$ mit der Indexdifferenz $h-\nu$, wie jene mit der Indexdifferenz $h-\nu-1$ die Rekursion (15) erfüllen, wenn dort $h-1$, $\nu-1$, respektive $h$, $\nu+1$ anstatt $h$, $\nu$ geschrieben wird. Bezüglich der letzteren $F$ bedingt dies die Übereinstimmung des Wertes von $F_{h,\nu+1}$ aus der Gleichung

$$\begin{aligned}\delta_{h\nu}F_{h,\nu+1}=&\frac{M_{h-1,2}}{1-\delta_{h,\nu-1}}\delta_{h-1,\nu-1}F_{h-1,\nu}-\\&-\frac{q_{h-2,\nu-2}M_{h-1,3}M_{h-2,1}}{1-\delta_{h,\nu-1}}\delta_{h-2,\nu-2}F_{h-2,\nu-1}+\\&+\frac{q_{h-2,\nu-2}q_{h-3,\nu-3}M_{h-1,3}M_{h-2,3}L_0}{1-\delta_{h,\nu-1}}\delta_{h-3,\nu-3}F_{h-3,\nu-2}\end{aligned}\qquad(16)$$

und jenes aus (15), dort $\nu$ durch $\nu+1$ ersetzt

$$\begin{aligned}F_{h,\nu+1}=&\frac{M_{h-1,2}}{1-\delta_{h\nu}}F_{h-1,\nu}-\frac{q_{h-2,\nu-1}M_{h-1,3}M_{h-2,1}}{1-\delta_{h\nu}}F_{h-2,\nu-1}+\\&+\frac{q_{h-2,\nu-1}q_{h-3,\nu-2}M_{h-1,3}M_{h-2,3}L_0}{1-\delta_{h\nu}}F_{h-3,\nu-2}.\end{aligned}\qquad(16a)$$

Weiters muß der restliche Teil von $F'_{h\nu}$, nämlich

$$\frac{1}{1-\delta_{h,\nu-1}}\left[M'_{h-1,2}F_{h-1,\nu-1}+M_{h-1,2}q_{h-2,\nu-2}M_{h-1,3}F_{h-2,\nu-2}\right]-$$

$$
-\frac{q_{h-2,\,\nu-2}\,M_{h-1,3}}{1-\delta_{h,\nu-1}}\,[M'_{h-2,1}F_{h-2,\,\nu-2}+M_{h-2,1}\,q_{h-3,\,\nu-3}\,M_{h-2,3}\,F_{h-3,\,\nu-3}]
$$

$$
+\frac{q_{h-2,\,\nu-2}\,q_{h-3,\,\nu-3}\,M_{h-1,3}\,M_{h-2,3}}{1-\delta_{h,\nu-1}}\,[L'_0\,F_{h-3,\,\nu-3}+ \tag{17}
$$

$$
+L_0\,q_{h-4,\,\nu-4}\,M_{h-3,3}\,F_{h-4,\,\nu-4}]
$$

mit $q_{h-1,\,\nu-1}\,M_{h3}\,F_{h-1,\,\nu-1}$ übereinstimmen.

Der Vergleich von (16) und (16*a*) führt zu den Bedingungen

$$
\frac{\delta_{h-1,\,\nu-1}}{1-\delta_{h,\,\nu-1}}=\frac{\delta_{h\nu}}{1-\delta_{h\nu}},\quad \frac{\delta_{h-2,\,\nu-2}\,q_{h-2,\,\nu-2}}{1-\delta_{h,\nu-1}}=\frac{\delta_{h\nu}\,q_{h-2,\,\nu-1}}{1-\delta_{h\nu}}
$$

$$
\frac{\delta_{h-3,\,\nu-3}\,q_{h-2,\,\nu-2}\,q_{h-3,\,\nu-3}}{1-\delta_{h,\nu-1}}=\frac{\delta_{h\nu}\,q_{h-2,\,\nu-1}\,q_{h-3,\,\nu-2}}{1-\delta_{h\nu}}, \tag{18}
$$

aber die vier Gleichungen (14), (18) lassen sich als Konsequenz bloß zweier betrachten

$$
\delta_{h\nu}=\frac{q_{h,\nu-1}-1}{q_{h-1,\nu}},\quad \frac{q_{h\nu}-1}{q_{h-1,\,\nu-1}-1}=\frac{q_{h,\nu-1}}{q_{h-1,\,\nu-1}}, \tag{18a}
$$

deren Erfüllung außerdem noch die geforderte Übereinstimmung zwischen $q_{h-1,\,\nu-1}\,M_{h3}\,F_{h-1,\,\nu-1}$ und dem Ausdruck (17) mitbewirkt, denn wegen $q_{h-1,\,\nu-1}=\dfrac{1}{1-\delta_{h,\nu-1}}$ bedeutet dies, daß $(M_{h3}-M'_{h-1,2})$ mal $F_{h-1,\,\nu-1}$ gleich

$$
q_{h-2,\,\nu-2}\,M_{h-1,3}\,(M_{h-1,2}-M'_{h-2,1})\,F_{h-2,\,\nu-2}-
$$

$$
-q_{h-2,\,\nu-2}\,q_{h-3,\,\nu-3}\,M_{h-1,3}\,M_{h-2,3}\,(M_{h-2,1}-L'_0)\,F_{h-3,\,\nu-3}+
$$

$$
+q_{h-2,\,\nu-2}\,q_{h-3,\,\nu-3}\,q_{h-4,\,\nu-4}\,M_{h-1,3}\,M_{h-2,3}\,M_{h-3,3}L_0\,F_{h-4,\,\nu-4}
$$

sein soll, und ganz dieselbe Rekursion erhält man, wenn die Gleichung (15) für $h-1$, $\nu-1$ statt $h$, $\nu$ angeschrieben und mit $M_{h3}-M'_{h-1,2}=M_{h-1,3}$ multipliziert wird.

Es erübrigt nur, die $q, \delta$ aus den Gleichungen (18*a*), bei $q_{\nu\nu}=1$ und $\delta_{h,\,2h-1}=1$ zu berechnen. Hienach ergeben sich die $q_{h\nu}$ als unechte, die $\delta_{h\nu}$ als echte positive Brüche

$$
q_{h\nu}=\frac{\nu+1}{h+2}\,\frac{2h+2-\nu}{2h+1-\nu},\quad \nu\leqq 2h \tag{19}
$$

$$
\delta_{h\nu}=\frac{\nu+1-h}{\nu+1}\,\frac{2h+1-\nu}{2h-\nu}\qquad \nu\leqq 2h-1. \tag{19a}
$$

Somit ist die Rekursion (15) zwischen den Polynomen $F_{h\nu}$ mit konstanter Indexdifferenz

$$\frac{F_{h\nu}}{q_{h-1,\nu-1}} = M_{h-1,2}\, F_{h-1,\nu-1} - q_{h-2,\nu-2}\, M_{h-2,1}\, M_{h-1,3}\, F_{h-2,\nu-2} +$$

$$+ q_{h-2,\nu-2}\, q_{h-3,\nu-3}\, L_0\, M_{h-1,3}\, M_{h-2,3}\, F_{h-3,\nu-3} \tag{20}$$

für $\nu \leqq 2h-1$ nachgewiesen.

Als Ergänzung zu dieser Rekursion hat die Ermittlung der Konstanten $F_{h,2h}$, mittels der Gleichungen (10), respektive (20) für $\nu = 2h$, respektive $2h-1$,

$$F_{h,2h} = F'_{h,2h-1} - q_{h-1,2h-2}\, M_{h3}\, F_{h-1,2h-2},$$

$$F_{h,2h-1} = q_{h-1,2h-2}\, M_{h-1,2}\, F_{h-1,2h-2}$$

zu treten. Durch Differentiation der letzen Gleichung folgt

$$F_{h,2h} = (M'_{h-1,2} - M_{h3})\, q_{h-1,2h-2}\, F_{h-1,2h-2}$$

und nach Einsetzung des Wertes $\frac{4h-2}{h+1}$ für $q_{h-1,2h-2}$

$$F_{h,2h} = -\frac{4h-2}{h+1}\, M_{h-1,3}\, F_{h-1,2h-2}$$

oder, wegen $F_{00} = 1$, die independente Darstellung

$$F_{h,2h} = (-1)^h\, \frac{2.6\ldots 4h-2}{(h+1)!}\, S_h = \frac{(-1)^h\,(2h)!\, S_h}{h!\,(h+1)!}. \tag{21}$$

Durch die so vorgenommene Wahl (19) der Konstanten $q$ wird auch die Konvergenz der Doppelreihe in der Integraldarstellung (2) von $y$ für ein wirkliches (d. h. von Null verschiedenes) Gebiet sichergestellt, weil man für $h \leqq \nu \leqq 2h$, positive Größen $\Phi_{h\nu} > \frac{|F_{h\nu}(v)|}{h!\,\nu!}$ angeben kann, welche mit Hilfe einer gewissen positiven Größe $\mathfrak{A}$ aus den Gleichungen

$$\Phi_{h\nu} = \mathfrak{A}\,(\Phi_{h-1,\nu-1} + \Phi_{h-2,\nu-2} + \Phi_{h-3,\nu-3}),\quad \Phi_{h,2h} = \mathfrak{A}^h \tag{22}$$

zu bestimmen sind, wodurch $\Phi_{h\nu} < (2\mathfrak{A})^h$ wird und

$$\sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\nu=h}^{2h} \Phi_{h\nu}\, \xi^h\, \eta^\nu$$

für genügend kleine $\xi$, $\eta$ konvergiert. Die Größe $\mathfrak{A}$ muß im Hinblick auf (21) der Bedingung $\mathfrak{A} > \dfrac{|M_{h3}|}{h_2(h+1)}$ für alle $h$ entsprechen, ferner reicht es hin, wie der Vergleich von (20) und (22) zeigt, $\mathfrak{A}$ größer als das Maximum der Werte

$$\frac{q_{h-1,\,\nu-1}|M_{h-1,2}|}{h\,\nu},\quad \frac{q_{h-1,\,\nu-1}\,q_{h-2,\,\nu-2}\,|M_{h-1,3}\,M_{h-2,1}|}{h\,(h-1)\,\nu\,(\nu-1)}$$

$$\frac{q_{h-1,\,\nu-1}\,q_{h-2,\,\nu-2}\,q_{h-3,\,\nu-3}\,|M_{h-1,3}\,M_{h-2,3}\,L_0|}{h\,(h-1)\,(h-2)\,\nu\,(\nu-1)\,(\nu-2)}$$

für ein irgendwie fixiertes endliches Wertgebiet von $v$ und alle $h, \nu$, sowie größer als 1 zu wählen.

Eine Vereinfachung sowohl der Rekursion als der Halphen'schen Relationen ist zu erzielen, indem man die $F_{h\nu}$ mit gewissen Konstanten multipliziert. Führt man die Zahlen

$$p_{h\nu} = \binom{\nu}{h} - \binom{\nu}{h+1} \tag{23}$$

ein, welche mit den $q_{h\nu}$ und $\delta_{h\nu}$ in dem Zusammenhang

$$p_{h+1,\,\nu+1} = p_{h\nu}\,q_{h\nu},\quad p_{h\nu} = p_{h,\,\nu+1}\,\delta_{h\nu} \tag{23a}$$

stehen, und substituiert in die Rekursion (20)

$$F_{h\nu} = (-1)^h\,p_{h\nu}\,S_{\nu-h}\,\Omega_{h\nu}, \tag{24}$$

so folgt, nach Kürzung durch $(-1)^{\nu-h}\,S_{\nu-h}$, mit Rücksicht auf die erste Gleichung (23$a$)

$$\Omega_{h\nu} = M_{h-1,2}\,\Omega_{h-1,\,\nu-1} - M_{h-2,1}\,M_{h-1,3}\,\Omega_{h-2,\,\nu-2} + \\ + L_0\,M_{h-1,3}\,M_{h-2,3}\,\Omega_{h-3,\,\nu-3} \tag{25}$$

als Rekursion der Polynome $\Omega_{h\nu}$. Den Ausgangspunkt von (25) bildet die Definition $\Omega_{h,\,2h} = 1$.

Anderseits ergibt die Substitution des Wertes (24) von $F_{h\nu}$ in die Halphen'sche Relation (12), ebenfalls nach Kürzung durch $(-1)^{\nu-h}\,S_{\nu-h}$ und wegen der zweiten Gleichung (23$a$)

$$\Omega'_{h\nu} = M_{h3}\,\Omega_{h-1,\,\nu-1} - M_{\nu-h,3}\,\Omega_{h,\,\nu+1}. \tag{25a}$$

Noch weiter geht die Vereinfachung, wenn statt der $F$ die durch

$$F_{h\nu} = p_{s\nu}\,S_{h+1}\,\Psi_{h\nu} \tag{26}$$

bestimmten Polynome $\Psi$ zugrundegelegt werden, nur sind die letzteren dann nicht mehr ganze, sondern gebrochen-rationale Funktionen von $L_3$.

Es ist $\Psi_{h,2h} = (-1)^h / M_{h3}$ und für $\nu \leqq 2h-1$

$$M_{h3}\Psi_{h\nu} = M_{h-1,2}\Psi_{h-1,\nu-1} - M_{h-2,1}\Psi_{h-2,\nu-2} + L_0\Psi_{h-3,\nu-3}, \quad (27)$$

$$\Psi'_{h\nu} = \Psi_{h-1,\nu-1} + \Psi_{h,\nu+1}. \quad (27a)$$

Neben den bisher bewiesenen Rekursionen der $F_{h\nu}$, $\Omega_{h\nu}$, $\Psi_{h\nu}$ mit konstanter Indexdifferenz kommen auch solche zwischen den Polynomen mit konstantem ersten Index in Betracht, für die $\Psi$ beispielsweise lauten sie, bei $\nu \leqq 2h-1$,

$$L_0\Psi_{h,\nu+3} + M_{\nu-h,1}\Psi_{h,\nu+2} + M_{\nu-h,2}\Psi_{h,\nu+1} + M_{\nu-h,3}\Psi_{h\nu} = 0. \quad (28)$$

Die Richtigkeit von (28) ist im Falle $\nu = 2h-1$ schon durch die Gleichung (27) erwiesen, und es handelt sich noch um den Schluß von $\nu = 2h-\lambda$ auf $\nu - 1 = 2h-\lambda-1$.

Nun gibt die Gleichung (27), dort $\nu$ durch $\nu-1$ ersetzt

$$M_{h3}\Psi_{h,\nu-1} = M_{h-1,2}\Psi_{h-1,\nu-2} - M_{h-2,1}\Psi_{h-2,\nu-3} + L_0\Psi_{h-3,\nu-4},$$

und weil für jede der drei rechts vorfindlichen Funktionen $\Psi$ die Richtigkeit der entsprechend modifizierten Gleichung (28) vorausgesetzt werden soll, ist die rechte Seite gleich

$$-\frac{M_{h-1,2}}{M_{\nu-h-1,3}}[M_{\nu-h-1,2}\Psi_{h-1,\nu-1} + M_{\nu-h-1,1}\Psi_{h-1,\nu} + L_0\Psi_{h-1,\nu+1}] +$$

$$+\frac{M_{h-2,1}}{M_{\nu-h-1,3}}[M_{\nu-h-1,2}\Psi_{h-2,\nu-2} + M_{\nu-h-1,1}\Psi_{h-2,\nu-1} + L_0\Psi_{h-2,\nu}] +$$

$$-\frac{L_0}{M_{\nu-h-1,3}}[M_{\nu-h-1,2}\Psi_{h-3,\nu-3} + M_{\nu-h-1,1}\Psi_{h-3,\nu-2} + L_0\Psi_{h-3,\nu-1}]$$

oder bei Summation der senkrecht übereinander stehenden Terme, wegen (27) gleich

$$-\frac{M_{h3}}{M_{\nu-h-1,3}}[M_{\nu-h-1,2}\Psi_{h\nu} + M_{\nu-h-1,1}\Psi_{h,\nu+1} + L_0\Psi_{h,\nu+2}],$$

daher stimmt der so berechnete Wert von $M_{h3}\Psi_{h,\nu-1}$ mit demjenigen überein, der resultiert, wenn man die Gleichung (28) für $\nu-1$ statt $\nu$ anschreibt.

Analog (28) gilt für die $F$ mit konstantem ersten Index die Beziehung

$$L_0\frac{F_{h,\nu+3}}{p_{h,\nu+3}} + M_{\nu-h,1}\frac{F_{h,\nu+2}}{p_{h,\nu+2}} + M_{\nu-h,2}\frac{F_{h,\nu+1}}{p_{h,\nu+1}} +$$

$$+ M_{\nu-h,3}\frac{F_{h\nu}}{p_{h\nu}} = 0. \quad (28a)$$

## § 2. Der Spezialfall $M_{i_3} = 0$.

Es wurde bereits oben darauf hingewiesen, daß die explizite Darstellung von $y$ der Kenntnis der Lösungen von (1) für die Fälle $M_{i_3} = 0$ bedarf. Bezeichnet demnach $z_i$ die Funktion, welche aus $y$ durch die Substitution

$$L_3 = -\left[i L_2' + \binom{i}{2} L_1'' + \binom{i}{3} L_0'''\right]$$

entsteht, d. h. ist $z_i$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$L_0(x) z_i''' + L_1(x) z_i'' + L_2(x) z_i' + M_{03}^i z_i = 0 \tag{29}$$

respektive $z_i^{(i+1)} = \eta_i$ eine Lösung der Lamé'schen Differentialgleichung

$$L_0(y) \eta_i'' + M_{i_1}(x) \eta_i' + M_{i_2}(x) \eta_i = 0, \tag{29a}$$

so müssen die zugehörigen $F_{h\nu}^i$ aufgesucht werden. Aber nach dem früher Bemerkten reicht zur Bestimmung der $F_{h\nu}$ die Kenntnis jener $F_{h\nu}^i$ hin, für welche $h \geqq i$ ist, welch letztere sich mittels der Polynomiallösungen gewisser Differentialgleichungen sehr einfach darstellen lassen, nämlich durch die Polynomiallösung $i$-ten Grades der mit $v$ als Unabhängiger umgeschriebenen Diperentialgleichung (29)

$$L_0(v) H_i'''(v) + L_1(v) H_i''(v) + L_2(v) H_i'(v) + M_{03}^i H_i(v) = 0 \tag{30}$$

sowie durch jene Polynome $G_{\nu i}(v)$, welche in der nach Mitteilung VI gebildeten Parameterlösung von $(29a)$

$$\int_x^c \varphi_i(v) \sum_0^\infty \frac{(x-v)^\nu (c-v)^\nu G_{\nu i}(v)}{\nu!^2 L_0(v)^\nu} dv, \quad \frac{\varphi_i'}{\varphi_i} = -\frac{M_{i_1}}{L_0}$$

auftreten und aus den für irgendeine Lamé'sche Differentialgleichung $L_0 \eta'' + L_1 \eta' + L_2 \eta = 0$ definierten $G_\nu$ derart zu gewinnen sind, daß man $M_{i_1}$, $M_{i_2}$ an Stelle von $L_1$, $L_2$ setzt. Die Haupteigenschaften der $G_\nu(v)$ waren: $G_\nu(v)$ genügt als Polynom $\nu$-ten Grades von $v$ der Differentialgleichung

$$L_0 G_\nu''' - M_{\nu-2,1} G_{\nu-1}'' + M_{\nu-1,2} G_\nu' - \mathfrak{M}_{\nu 3} G_\nu = 0 \tag{31}$$

(worin $\mathfrak{M}_{\nu 3} = \nu L_2' + \binom{\nu}{2} L_1'' + \binom{\nu}{3} L_0''' = M_{\nu 3}^0$ die in Mitteilung VI als $M_{\nu 3}$ bezeichne Konstante bedeutet) und auch den rekursiven Formeln

$$G_\nu = L_0 G_{\nu-1}'' - M_{\nu-2,1} G_{\nu-1}' + M_{\nu-1,2} G_{\nu-1}, \; G_0 = 1,$$
$$G_\nu' = \mathfrak{M}_{\nu 3} G_{\nu-1}. \tag{31a}$$

Die Entwicklung von $G_\nu$ nach Potenzen von $v$ lautete

$$G_\nu = \mathfrak{M}_{\frac{|\nu}{13}} \sum_{0}^{\nu} a_\lambda \frac{v^{\nu-\lambda}}{(\nu-\lambda)!}, \quad a_0 = 1, \tag{32}$$

mit der Bedingungsgleichung für die Koeffizienten

$$\mathfrak{M}_{\lambda 3}\, a_\lambda = M_{\lambda-1,2}(0)\, a_{\lambda-1} - M_{\lambda-2,1}(0)\, a_{\lambda-2} + L_0(0)\, a_{\lambda-3}. \tag{32a}$$

Soll nun $M_{i1}$, $M_{i2}$ an die Stelle von $L_1$, $L_2$ treten, so verwandelt sich $M_{\nu 1}$, $M_{\nu 2}$, $\mathfrak{M}_{\nu 3}$ in

$$M_{\nu+i,1},\ M_{\nu+i,2},\ \overset{(i)}{\mathfrak{M}}_{\nu 3} = M^i_{\nu+i,3}, \tag{33}$$

daher gelten für die $G_{\nu i}$ die Formeln

$$\begin{gathered} L_0\, G'''_{\nu i} - M_{\nu+i-2,1}\, G''_{\nu i} + M_{\nu+i-1,2}\, G'_{\nu i} - \overset{(i)}{\mathfrak{M}}_{\nu 3}\, G_{\nu i} = 0 \\ G_{\nu i} = L_0\, G''_{\nu-1,i} - M_{\nu+i-2,1}\, G'_{\nu-1,i} + M_{\nu+i-1,2}\, G_{\nu-1,i} \\ G'_{\nu i} = \overset{(i)}{\mathfrak{M}}_{\nu 3}\, G_{\nu-1,i},\quad G_{\nu i} = \mathfrak{M}_{\frac{|\nu}{13}} \sum_{0}^{\nu} a^{(i)}_\lambda \frac{v^{\nu-\lambda}}{(\nu-\lambda)!},\quad a^{(i)}_0 = 1 \\ \overset{(i)}{\mathfrak{M}}_{\nu 3}\, a^{(i)}_\lambda = M_{\lambda+i-1,2}(0)\, a^{(i)}_{\lambda-1} - M_{\lambda+i-2,1}(0)\, a^{(i)}_{\lambda-2} + L_0(0)\, a^{(i)}_{\lambda-3}. \end{gathered} \tag{34}$$

Aus der zweiten und dritten Gleichung (34) folgt noch eine lineare, von Differentialquotienten freie Rekursion der $G_{\nu i}$

$$G_{\nu i} = M_{\nu+i-1,2}\, G_{\nu-1,i} - M_{\nu+i-2,1}\, M^i_{\nu+i-1,3}\, G_{\nu-2,i} + \\ + L_0\, M^i_{\nu+i-1,3}\, M^i_{\nu+i-2,3}\, G_{\nu-3,i}. \tag{34a}$$

Diese Polynome $H_i$ und $G_{\nu i}$ sind es, durch welche man die $F^i_{h\nu}$ für $h \geqq i$ in einfacher Weise ausdrückt.

Zur Bestimmung der $F^i_{h\nu}$, gleichgültig ob $h \geqq i$ oder $h < i$, dient die Rekursion (20) für den Spezialfall $M_{i3} = 0$ angewandt und durch $p_{h-1,\nu-1}$ dividiert,

$$\frac{F^i_{h\nu}}{p_{h\nu}} = M_{h-1,2} \frac{F^i_{h-1,\nu-1}}{p_{h-1,\nu-1}} - M_{h-2,1}\, M^i_{h-1,3} \frac{F^i_{h-2,\nu-2}}{p_{h-2,\nu-2}} + \\ + L_0\, M^i_{h-1,3}\, M^i_{h-2,3} \frac{F^i_{h-3,\nu-3}}{p_{h-2,\nu-3}}, \tag{35}$$

und zwar für $\nu \leqq 2h-1$. Die Konstante $F^i_{h,2h}$ hat nach (21) den Wert

$$F^i_{h,2h} = (-1)^h p_{h,2h} S^i_h \tag{35a}$$

verschwindet daher für $i < h$, so daß überhaupt, vermöge (35 jedes $F^i_{h\nu}$ für $i < \nu - h$ verschwindet. Ferner spezialisiert sich die Halphen'sche Relation (12) für die $F^i_{h\nu}$ in

$$\frac{dF^i_{h\nu}}{dv} - q_{h-1,\,\nu-1} M^i_{h3} F^i_{h-1,\,\nu-1} = \delta_{h\nu} F^i_{h,\,\nu+1}. \tag{36}$$

Nach dem Obigen reicht zur Darstellung der $F_{h\nu}$ die Kenntnis der $F^i_{h\nu}$ mit $h \geqq i$ und für diese wieder diejenige der Polynome $F^i_{i\nu}$ hin. Setzt man aber $h = i$ in (36) und dividiert durch $p_{h\nu}$, so ergibt sich wegen $M^i_{i3} = 0$

$$\frac{d}{dv}\frac{F^i_{i\nu}}{p_{i\nu}} = \frac{F^i_{i,\,\nu+1}}{p_{i,\,\nu+1}}, \tag{36a}$$

d. h. alle Polynome $F^i_{i\nu}$ sind Differentialquotienten verschiedener Ordnungen des ersten unter ihnen $F^i_{ii}/p_{ii} = F^i$..

$$\frac{F^i_{i\nu}}{p_{i\nu}} = \frac{d^{\nu-i} F^i_{ii}}{dv^{\nu-i}} \tag{37}$$

Die Substitution dieser Werte (37) in die Gleichung (28a), dort $h = i$ und $M_{i3} = 0$ angenommen, läßt $F^i_{ii}$ als Lösung der Differentialgleichung

$$L_0 \frac{d^{\nu+3-i} F^i_{ii}}{dv^{\nu+3-i}} + M_{\nu-i,\,1} \frac{d^{\nu-2-i} F^i_{ii}}{dv^{\nu+2-i}} + M_{\nu-i,\,2} \frac{d^{\nu+1-i} F^i_{ii}}{dv^{\nu+1-i}} +$$
$$+ M^i_{\nu-i,\,3} \frac{d_{\nu-i} F^i_{ii}}{dv^{\nu-i}} = 0 \tag{38}$$

erkennen, was bei $\nu = i$ zeigt, daß $F^i_{ii}(v) = H_i(v)$ der Differentialgleichung (30) genügt. Dabei ist $H_i$ eindeutig durch die Bedingung, vgl. (37), (35a)

$$\frac{d^i H_i}{dv^i} = \frac{F^i_{i,\,2i}}{p_{i,\,2i}} = (-1)^i S^i_i \tag{39}$$

definiert. In der Entwicklung des Polynoms $H_i$ nach Potenzen von $v$

$$H_i = (-1)^i S^i_i \sum_{\lambda=0}^{i} b^{(i)}_\lambda \frac{v^{i-\lambda}}{(i-\lambda)!}, \quad b^{(i)}_0 = 1 \tag{40}$$

sind die Koeffizienten $b^{(i)}_\lambda = (-1)^i H^{(i-\lambda)}_i(0)/S^i_i$ nach der Rekursion

$$M^{i}_{i-\lambda,3}\, b^{(i)}_{\lambda} + M_{i-\lambda,2}(0)\, b^{(i)}_{\lambda-1} + M_{i-\lambda,1}(0)\, b^{(i)}_{\lambda-2} + L_0(0)\, b^{(i)}_{\lambda-3} = 0 \quad (40a)$$

berechnen, die eine Spezialisierung von (38), für $\nu = 2i-\lambda$, $= 0$ bildet.

Mit Hilfe der eben erhaltenen Darstellung der $F^{i}_{i\nu}$ leitet man sofort diejenige sämtlicher $F^{i}_{h\nu}$ für $h \geqq i$ ab, die Formel lautet, in Verallgemeinerung von (37)

$$F^{i}_{h\nu} = p_{h\nu}\, G_{h-i,\,i}\, \frac{d^{\nu-h} H_i}{dv^{\nu-h}} \text{ für } h \geqq i, \tag{41}$$

denn erteilt man $h$ in (35) den Wert $i+1$, so folgt mit Rücksicht auf (37)

$$\frac{F^{i}_{i+1,\nu}}{p_{i+1,\nu}} = M_{i_2} \frac{F^{i}_{i,\nu-1}}{p_{i,\nu-1}} = M_{i_2} \frac{d^{\nu-1-i} H_i}{dv^{\nu-1-i}}$$

somit ist wegen $M_{i_2} = G_{1i}$ die Gleichung (41) für $h = i+1$ bewiesen. Allgemein verifiziert man (41) durch den Schluß von $h$ auf $h+1$, weil die Rekursionen (35) für $F^{i}_{h\nu}/p_{h\nu}$ und (34$a$) für $G_{h-i,\,i}$ offenbar zusammenfallen.

## § 3. Darstellung von $y$.

Die independente Definition (41) der $F^{i}_{h\nu}$ für $h \geqq i$ bietet Veranlassung, die Zahl $j$ in (7) gleich $h$ zu wählen, dann wird, weil $F^{i}_{h\nu}$ für $i < \nu - h$ verschwindet

$$F_{h\nu} = p_{h\nu} \sum_{i=\nu-h}^{h} \sigma_{hi}\, G_{h-i,\,i}\, \frac{d^{\nu-h} H_i}{dv^{\nu-h}}, \tag{42}$$

welche Formel zugleich die in § 2 noch nicht explizit bestimmten $F^{i}_{h\nu}$ mit $h < i$ angibt, wenn rechts $L_3$ durch einen Wert aus $M_{i_3} = 0$ ersetzt wird

$$F^{i}_{h\nu} = p_{h\nu} \sum_{\mu=\nu-h}^{h} \sigma^{i}_{h\mu}\, G_{h-\mu,\,\mu}\, \frac{d^{\nu-h} H_\mu}{dv^{\nu-h}}, \quad h < i$$

$$\sigma^{i}_{h\mu} = \prod_{0}^{h} \frac{M_{\lambda_3} - M_{i_3}}{M_{\lambda_3} - M_{\mu_3}} \text{ bei } \lambda \neq \mu. \tag{42a}$$

Durch Einsetzung der in (42) gefundenen Werte der $F_{h\nu}$ erlangt das Integral (2), wenn noch statt $\nu$ der Summationsbuchstabe $h+\lambda$ verwendet wird, mit Rücksicht auf den Wert von $p_{h\nu}$

die explizite Gestalt 

$$\int_x^c \varphi(v) \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{\lambda=0}^{h} \sum_{i=\lambda}^{h} \frac{(x-v)^{h+1}(c-v)^{h+\lambda}}{(h+1)!^2 \lambda!\, L_0(v)^h} (h+1-\lambda)\, \sigma_{hi}\, G_{h-i,\,i}(v)\, H_i^{(\lambda)}(v)\, dv \tag{43}$$

und hierin kann nach Vertauschung der Summationsfolge

$$\sum_{\lambda=0}^{h} \sum_{i=\lambda}^{h} = \sum_{i=0}^{h} \sum_{\lambda=0}^{i}$$

die Summierung über $\lambda$ ausgeführt werden

$$\sum_{\lambda=0}^{i} (h+1-\lambda) \frac{(c-v)^{\lambda} H_i^{(\lambda)}(v)}{\lambda!} = (h+1) H_i(c) - (c-v) H_i'(c),$$

weil $H_i(v)$ ein Polynom $i$-ten Grades von $v$ ist.

Solcherart wird die gesuchte Lösung $y$ durch ein Integral über eine Doppelreihe dargestellt

$$\int_x^c \varphi(v) \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{h} \frac{(x-v)^{h+1}}{(h+1)!} \left[ H_i(c) \frac{(c-v)^h}{h!} - \right.$$

$$\left. - H_i'(c) \frac{(c-v)^{h+1}}{(h+1)!} \right] \frac{\sigma_{hi}\, G_{h-i,\,i}(v)\, dv}{L_0(v)^h}. \tag{44}$$

Die Reihe in (43) besitzt nach dem früheren jedenfalls ein wirkliches Konvergenzgebiet, hingegen von der durch eine Transformation entstandene Reihe in (44) muß dies noch dargetan werden.

Für die Größenordnung von $\sigma_{hi}$ ist diejenige der Konstanten

$$\chi_{hi} = \frac{M_{h3} - M_{i3}}{h-i} = L_2' + (h+i-1) \frac{L_1''}{2} +$$

$$+ [(h+i-1)(h+i-2) - hi] \frac{L_0'''}{6}$$

maßgebend. Da $\chi_{hi}$ die Dimension $(h+i)^2$ besitzt, wird der Nenner von

$$\sigma_{hi} = \frac{(-1)^i}{i!\,(h-i)!} \frac{M_{03}^{|i}\, M_{i+1,3}^{|h-i}}{\chi_{0i}^{|i}\, \chi_{i+1,i}^{|h-i}}$$

mit $i!\,(h-i)! \left[\frac{|h}{i+1}\right]^2$ vergleichbar, der Zähler von $\sigma_{hi}$ hat die Dimension $h!^3$, deshalb wird $\sigma_{hi} \sim 1$.

Ferner ermittelt man aus der Rekursion (34$a$) die Dimension des Polynoms $G_{\nu i}(v)$ in einem irgendwie fixierten endlichen Wertgebiet von $v$ gleich $\left[\frac{|\nu}{i+1}\right]^2$ und aus (40), (40$a$), wegen $b^{(i)}_{\lambda} \sim 1/\lambda!$ die Größenordnung von $H_i(c)$, ebenso von $H'_i(c)$ gleich der von

$$\frac{1}{i!} S^i_i = (-1)^i \chi_{\frac{|i}{0i}} \sim \left[\frac{|i}{i+1}\right]^2.$$

Dies besagt die Vergleichbarkeit der Terme der Doppelreihe in (44) mit

$$\frac{1}{h!^2} \left[\frac{|i}{i+1}\right]^2 \left[\frac{|h-i}{i+1}\right]^2 = \frac{(2i)!^2}{i!^4} < 2^{4i} \leqq 2^{4h}.$$

Verschwinden alle drei Größen $L'_2$, $L''_1$, $L'''_0$, so ist zur Bestimmung von $F_{h\nu}$, vgl. (6)

$$F_{h\nu} = \sum (\lim F^{(\varkappa)}_{h\nu}) L^{\varkappa}_3, \; L'_2 \to 0$$

der Grenzübergang $L'_2 \to 0$ bei $L''_1 = L'''_0 = 0$ durchzuführen. Die Auswertung des Polynoms $F^{[\varkappa]}_{h\nu}$ nach (7$a$) und (41) ergibt, da sich für $L''_1 = L'''_0 = 0$ auf $(-1)\, i!\, (\varkappa - i)!\, L'^{\varkappa}_2$ reduziert,

$$\lim F^{[\varkappa]}_{h\nu} = p_{h\nu} \lim \sum_{i=0}^{\varkappa} \frac{(-1)^i H^{(\nu-h)}_i(v)\, G_{h-i,\,i}(v)}{i!\,(\varkappa-i)!\, L'^{\varkappa}_2},$$

man muß also die Polynome $H_i(v)$, $G_{\nu i}(v)$, bei $L''_1 = L'''_0 = 0$ nach Potenzen von $L'_2$ ordnen

$$G_{\nu i}(v) = \sum_{r=0}^{\nu} \overset{(r)}{G}_{i\nu}(v)\, L'^r_2, \; H_i(v) = \sum_{s=0}^{i} \overset{(s)}{H}_i(v)\, L'^s_2$$

und findet dann den Grenzwert

$$\lim F^{[\varkappa]}_{h\nu} = p_{h\nu} \sum_{i=0}^{\varkappa} \frac{(-1)^i}{i!\,(\varkappa-i)!} \sum_{s=0} \frac{d^{\nu-h} \overset{(s)}{H}_i(v)}{d v^{\nu-h}} \overset{(\varkappa-s)}{G}_{h-i,\,i}(v).$$

## § 4. Bemerkung über die Speziallösungen.

Nachdem die Speziallösungen $z_i$ gewissermaßen als Grundelemente für die Darstellung von $y$ fungieren, erscheint es von Interesse, ihre Eigenschaften zu untersuchen.

Geht man von der Differentialgleichung (29$a$) aus, welcher $z_i^{(i+1)}$ genügt und für die man nach Mitteilung VI diejenige Lösung $\mathfrak{Z}_i^*$ angeben kann, die als Funktion von $x$ und $\varepsilon = c - x$ angesehen eine Potenzreihenentwicklung bezüglich $\varepsilon$ mit dem Anfangsterm

$$(-1)^{i+3}\,\varphi_i(x)\,\frac{\varepsilon^{i+2}}{(i+2)!},\quad \frac{\varphi_i'}{\varphi_i} = -\frac{M_{i_1}}{L_0}$$

besitzt, nämlich

$$\mathfrak{Z}_i^* = \int^c \varphi_i(v) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(x-v)^{\nu+i+1}(c-v)^\nu\, G_{\nu i}(v)\, dv}{(\nu+i+1)!\,\nu!\, L_0(v)^\nu},$$

so ist der Zusammenhang zwischen der gesuchten Lösung $Z_i^*$ von (29), deren Entwicklung mit $-\frac{1}{2}\varphi(x)\varepsilon^2$ beginnt, und dieser Funktion $\mathfrak{Z}_i^*$ folgenderart herzustellen: Für die Lösungen $\bar{Z}_i$, $\mathfrak{Z}_i$ von (29), respektive (29$a$), welche mit $\varepsilon^2/2\, L_0(x)$, respektive $\varepsilon^{i+2}/(i+2)!\cdot L_0(x)$ beginnen, gilt die Beziehung $\bar{Z}_i = \partial^i \bar{\mathfrak{Z}}_i/\partial c^i$, anderseits wieder sind die zwei Parameterlösungen $\bar{\mathfrak{Z}}_i$ und $\mathfrak{Z}_i^*$ von (29$a$) schon durcheinander bestimmt

$$\bar{\mathfrak{Z}}_i = \frac{(-1)^{i+1}\,\mathfrak{Z}_i^*}{L_0(c)\,\varphi_i(c)},$$

daher folgt die independente Darstellung von $Z_i^*$ mittels $\mathfrak{Z}_i^*$

$$Z_i^* = (-1)^i\,\varphi(c)\,L_0(c)\,\frac{\partial^i}{\partial c^i}\,\frac{L_0(c)^{i-1}\,\mathfrak{Z}_i^*}{\varphi(c)}. \tag{45a}$$

Allerdings besagt diese Form der Darstellung von $Z_i^*$ nur eine Eigenschaft der $Z_i^*$, sie gestattet aber nicht, über die Konvergenz der Reihe für $Y^* = \lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{j} \sigma_{ji}\, Z_i^*$ ein Urteil abzugeben, weil hiezu erst eine Untersuchung der $Z_i^*$ bei großem $i$ nötig wäre.

## § 5. Der zweite Ansatz (8$a$) für die $\mathfrak{F}_{h\nu}$.

Auch in dem Fall, daß man die in (2) auftretenden Polynome $F_{h\nu}$ nicht wie in § 1 bis 3 auf solche mit $h \leqq \nu$, sondern auf die die mit $h \geqq \nu$ beschränken will, können explizite Darstellungen für die $F_{h\nu}^i$, respektive $F_{h\nu}$ gefunden werden, z. B. wenn $L_0(x)$ bloß quadratisch, $L_1(x)$ bloß linear in $x$ ist, was insbesondere für den Grenzfall $M_{h3} = L_3$ zutrifft. Vorerst aber werde von der erwähnten Voraussetzung $L_1'' = L_0''' = 0$ abgesehen.

Wenn keine $F_{h\nu}$ für $h < \nu$ im Integral (2) vorkommen sollen und die zugehörigen Bedingungen (8 *a*) bezüglich der $\mathfrak{F}_{h\nu}$ erfüllt sind, kann für die noch übrigen zur Wahl stehenden $\mathfrak{F}_{h\nu}$ der Ansatz

$$\mathfrak{F}_{h\nu} = f'_{h+1,\nu+1},\ f_{h\nu} = \frac{F_{h\nu}}{L_0^{h-\nu}} \tag{46}$$

gewählt werden, durch welchen die Rekursion (3) der $F_{h\nu}$ in eine solche der $f_{h\nu}$ übergeht

$$f_{h\nu} = (h+1-\nu)\,L'_0 f_{h,\nu-1} - f'_{h-1,\nu} + M_{h-1,3} f_{h-2,\nu-1} +$$
$$+ M_{h-1,2} f_{h-1,\nu-1} - M_{\nu-2,1} f'_{h-1,\nu-1} + L_0 f''_{h-1,\nu-1}. \tag{47}$$

Durch Schluß von $h$ auf $h+1$ beweist man, daß $f_{h\nu}$ vermöge (47) für $h > 2\nu$ verschwindet, hingegen für $h \leqq 2\nu$ ein Polynom des Grades $2\nu - h$ bezüglich $v$ ist, wie aus

$$f_{00} = 1,\ f_{10} = f_{20} = \cdot \quad = 0$$

und der sukzessiven Berechnung von

$$f_{11} = L_2,\ f_{21} = L_3,\ f_{22} = L'_0 L_3 - L_1 L'_2 + L_2 (L_2 + L'_1)$$

hervorgeht. Der Grad von $f_{h\nu}$ bezüglich $L_3$ ergibt sich aus (47) durch Abzählen gleich $E\left(\frac{h}{2}\right)$, es wird also in der Entwicklung

$$f_{h\nu} = \sum_0^j f_{h\nu}^{[\varkappa]} S_\varkappa \tag{48}$$

$j$ durch jede Zahl $\geqq E\left(\frac{h}{2}\right)$, beispielsweise durch $\nu$ ersetzbar.

Nennt man wieder $f^i_{h\nu}$ jenes Polynom, das aus $f_{h\nu}$ resultiert, wenn der Konstanten $L_3$ der Wert

$$-\left[i\,L'_2 + \binom{i}{2} L''_1 + \binom{i}{3} L'''_0\right]$$

erteilt wird, so folgt, vgl. (7), (7 *a*),

$$f_{h\nu} = \sum_{i=0}^{j} \sigma_{ji} f^i_{h\nu},\ f^{[\varkappa]}_{h\nu} = \sum_{i=0} \frac{f^i_{h\nu}}{\tau_{\varkappa i}} \tag{48a}$$

und die Bestimmung dieser Polynome $f^i_{h\nu}$ hat gemäß der Rekursion (47) für den Spezialfall $M_{i3} = 0$ zu geschehen

$$f^i_{h\nu} = (h+1-\nu)\, L'_0 f^i_{h,\nu-1} - \frac{d f^i_{h-1,\nu}}{dv} + M^i_{h-1,3} f^i_{h-2,\nu-1} +$$

$$+ M_{h-1,2} f^i_{h-1,\nu-1} - M_{\nu-2,1} \frac{d f^i_{h-1,\nu-1}}{dv} + L_0 \frac{d^2 f_{h-1,\nu-1}}{dv^2} \tag{49}$$

Für den Fall nun, daß $L_0(x)$ bloß quadratisch, $L_1(x)$ bloß linear in $x$ ist, läßt sich $f^i_{h\nu}$ explizit nach den Polynomen $G_{\nu-\mu,i}$ entwickeln

$$\frac{f^i_{h\nu}(v)}{i!\,\nu!} = \frac{L'^{h-\nu}_2}{(h-\nu)!} \sum_{\mu=h-\nu} \frac{(-1)^\mu}{(i-\mu)!} \frac{\rho^{|\mu+\nu-h}_{h+i-\mu-1}}{(\mu+\nu-h)!} \frac{G_{\nu-\mu,i}(v)}{(\nu-\mu)!}. \tag{49a}$$

Hier bedeutet $\rho_h$ die Konstante $L'_1 + \frac{1}{2} h L''_0$ und konform der sonst gebrauchten Bezeichnungsweise

$$\rho^{|0}_h = 1, \quad \rho^{|\mu}_h = \rho_h \rho_{h+1} \cdots \rho_{h+\mu-1} \quad \text{für } \mu \geqq 1. \tag{49b}$$

Es erübrigt nur, weil die durch (49*a*) bestimmte Funktion $f^i_{h\nu}$ für $h = 0, 1$ die vorgeschriebenen Werte $1, L_2$ annimmt, der Nachweis, daß sie der Rekursion (49) genügt, wobei die dem vorliegenden Falle $L''_1 = L'''_0 = 0$ entsprechenden Vereinfachungen

$$M^i_{h-1,3} = (h-1-i)\, L'_2, \quad G'_{\nu i} = \nu L'_2\, G_{\nu-1,i}$$

zu berücksichtigen sind. Die zu beweisende Rekursion (49) erhält, durch die Substitution $h = \nu + \lambda$ und die abgekürze Schreibweise

$$\frac{f^i_{\nu+\lambda,\nu}}{i!} = \frac{L'^\lambda_2}{\lambda!} \sum_{\mu=\lambda}^{i,\nu} A^\mu_{\lambda\nu} \frac{G_{\nu-\mu,i}}{(\nu-\mu)!}, \tag{50}$$

wenn beiderseits durch $\nu!\, L'^\lambda_2/\lambda!$ dividiert wird, die Form

$$\sum A^\mu_{\lambda\nu} \frac{G_{\nu-\mu,i}}{(\nu-\mu)!} = L'_0 L'_2 \sum A^\mu_{\lambda+1,\nu-1} \frac{G_{\nu-1-\mu,i}}{(\nu-1-\mu)!} -$$

$$- \lambda \sum A^\mu_{\lambda-1,\nu} \frac{G_{\nu-1-\mu,i}}{(\nu-1-\mu)!} + \lambda(\nu+\lambda-1-i) \sum A^\mu_{\lambda-1,\nu-1} \frac{G_{\nu-1-\mu,i}}{(\nu-1-\mu)!} +$$

$$+ M_{\nu+\lambda-1,2} \sum A^\mu_{\lambda,\nu-1} \frac{G_{\nu-1-\mu,i}}{(\nu-1-\mu)!} - M_{\nu-2,1} L'_2 \sum A^\mu_{\lambda,\nu-1} \frac{G_{\nu-2-\mu,i}}{(\nu-2-\mu)!} +$$

$$+ L'_0 L'^2_2 \sum A^\mu_{\lambda,\nu-1} \frac{G_{\nu-3-\mu,i}}{(\nu-3-\mu)!} \tag{51}$$

Nun kann man den letzten Term auf der rechten Seite vermöge der Rekursion (34 $a$)

$$G_{\nu-\mu, i} = M_{\nu-\mu+i-1, 2}\, G_{\nu-\mu-1, i} - (\nu-\mu-1)\, L_2'\, M_{\nu-\mu+i-2, 1}\, G_{\nu-\mu-2, i} + \\ + (\nu-\mu-1)(\nu-\mu-2)\, L_2'^2\, L_0\, G_{\nu-\mu-3, i}$$

ersetzten durch

$$\sum A^{\mu}_{\lambda, \nu-1} \left[ \frac{G_{\nu-\mu, i}}{(\nu-\mu-1)!} - M_{\nu-\mu+i-1, 2} \frac{G_{\nu-\mu-1, i}}{(\nu-\mu-1)!} + \right. \\ \left. + L_2'\, M_{\nu-\mu+i-2, 1} \frac{G_{\nu-\mu-2, i}}{(\nu-\mu-2)!} \right] \tag{51 a}$$

und diejenigen drei Terme rechts in (51) + (51 $a$), wo $L_2'$ in der ersten Potenz vorkommt, heben sich auf, denn als ihre Summe erhält man, wenn $\mu+1$ im ersten Term auf der rechten Seite der Gleichung (51) statt $\mu$ geschrieben wird,

$$L_2' \sum [A^{\mu+1}_{\lambda+1, \nu-1} L_0' - A^{\mu}_{\lambda, \nu-1} M_{\nu-2, 1} + A^{\mu}_{\lambda, \nu-1} M_{\nu-\mu+i-2, 1}] \frac{G_{\nu-\mu-2, i}}{(\nu-\mu-2)!} \tag{52}$$

und der Klammernausdruck in (52) verschwindet für jedes $v$.

Anderseits ergibt die Vereinigung des ersten Summanden von (51 $a$) mit der linken Seite der Gleichung (51)

$$\sum [A^{\mu}_{\lambda\nu} - (\nu-\mu)\, A^{\mu}_{\lambda, \nu-1}] \frac{G_{\nu-\mu, i}}{(\nu-\mu)!} = \\ = \sum [A^{\mu+1}_{\lambda\nu} - (\nu-\mu-1)\, A^{\mu+1}_{\lambda, \nu-1}] \frac{G_{\nu-\mu-1, i}}{(\nu-\mu-1)!}$$

und jetzt läßt sich nachweisen, daß die Koeffizienten von $G_{\nu-\mu-1, i}/(\nu-\mu-1)!$ auf beiden Seiten von (51) + (51 $a$) identisch sind, d. h. die Identität besteht

$$A^{\mu+1}_{\lambda\nu} - (\nu-\mu-1)\, A^{\mu+1}_{\lambda, \nu-1} = -\lambda\, A^{\mu}_{\lambda-1, \nu} + \lambda\, (\nu+\lambda-1-i)\, A^{\mu}_{\lambda-1, \nu-1} + \\ + M_{\nu+\lambda-1, 2}\, A^{\mu}_{\lambda, \nu-1} - M_{\nu-\mu+i-1, 2}\, A^{\mu}_{\lambda, \nu-1}. \tag{53}$$

Es existieren auch Halphen'sche Relationen für die $f^i_{h\nu}$ und $f_{h\nu}$. Bezüglich der ersteren zeigt die Definitionsgleichung (49), daß

$$\frac{df^i_{h\nu}(v)}{dv} = \frac{i!\,\nu!\,L_2'^{\,h-\nu+1}}{(h-\nu)!} \sum_{\mu=h-\nu}^{i, \nu-1} \frac{(-1)^{\mu}}{(i-\mu)!} \frac{\rho^{\,\mu+\nu-h}_{\,n+i-\mu-1}}{(\mu+\nu-h)!} \frac{G_{\nu-\mu-1, i}}{(\nu-\mu-1)!}$$

als Summe der beiden benachbarten Polynome $f^i_{h-1, \nu-1}$ und $f^i_{h, \nu-1}$ mit konstanten Koeffizienten ausdrückbar ist

$$\frac{d f^i_{h\nu}}{dv} = \nu L'_2 f^i_{h-1,\nu-1} + \frac{1}{2}\nu(h-\nu+1) L''_0 f^i_{h,\nu-1}. \tag{54}$$

Diese Beziehung überträgt sich, da die Koeffizienten auf der rechten Seite nicht von $i$ abhängen, wegen (48$a$), auf die $f^i_{h\nu}$

$$\frac{d f_{h\nu}}{dv} = \nu L'_2 f_{h-1,\nu-1} + \frac{1}{2}\nu(h-\nu+1) L''_0 f_{h,\nu-1} \tag{54$a$}$$

und vereinfacht sich für die Polynome $\omega_{h\nu} = \dfrac{(h-\nu)!\, f_{h\nu}}{\nu!\, L'^h_2}$ zu

$$\omega'_{h\nu} = \omega_{h-1,\nu-1} + \frac{1}{2} L''_0\, \omega_{h,\nu-1}. \tag{54$b$}$$

Die Größenordnung von $f^i_{h\nu}/h!\,\nu!$ übersteigt keinesfalls die von $\binom{\nu+i}{i}^2$, denn aus (49$a$) folgt für $h = \nu+\lambda$

$$\frac{f^i_{\nu+\lambda,\nu}}{\nu!\,(\nu+\lambda)!\, L'^{\lambda}_2} = \frac{i!}{\lambda!\,(\nu+\lambda)!} \sum_{\mu=\lambda} \frac{(-1)^{\mu}}{(i-\mu)!} \frac{\rho^{\mu-\lambda}_{\overline{h+i-\mu-1}}}{(\mu-\lambda)!} \frac{G_{\nu-\mu,i}}{(\nu-\mu)!} \tag{55}$$

und weil einerseits $\rho_h$ mit $h$ oder $h+2$, anderseits $G_{\nu i}$ mit $\left[\frac{|\nu}{i+1}\right]^2$ vergleichbar ist, besitzt die rechte Seite von (55) keine höhere Dimension als

$$\frac{i!}{\lambda!\,(\nu+\lambda)!} \sum_{\lambda}^{i,\nu} \frac{1}{(i-\mu)!} \frac{\overline{|h+i-\mu+1}^{\,\mu-\lambda}}{(\mu-\lambda)!} \frac{\left[\frac{|\nu-\mu}{i+1}\right]^2}{(\nu-\mu)!},$$

ein Ausdruck, der mit wachsendem $\lambda$ abnimmt und für $\lambda = 0$ den Wert

$$\binom{\nu+i}{i} \sum_{\mu=0}^{i} \binom{i}{\mu} \binom{\nu+i-\mu}{i} < \binom{\nu+i}{i}^2 \sum_{0}^{i} \binom{i}{\mu} = \binom{\nu+i}{i}^2 2^i$$

als Maximum aufweist. Daher konvergiert die Doppelreihe der Integraldarstellung

$$Z^*_i = \int_x^c \varphi(v) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{h=\nu} \frac{(x-v)^{h+1} (c-v)^{\nu} f^i_{h\nu}(v)\, dv}{(h+1)!\,\nu!\, L_0(v)^{\nu}} \tag{56}$$

in einem wirklichen Konvergenzgebiet. Dasselbe trifft für die Integraldarstellung der Lösung $y$

$$y = \int_x^c \varphi(v) \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{h=\nu} \frac{(x-v)^{h+1} (c-v)^{\nu} f_{h\nu}(v)\, dv}{(h+1)!\,\nu!\, L_0(v)^{\nu}}$$

zu, weil in der Formel für $f_{h\nu}$, vgl. (48 $a$)

$$\frac{f_{h\nu}}{h!\,\nu!} = \sum_{i=0} \sigma_{\nu i} \frac{f^i_{h\nu}}{h!\,\nu!} \sim \sum_{i=0} \sigma_{\nu i} \binom{\nu+i}{i}^2$$

jedes der $\sigma$ die Dimension 1 und keiner der Summanden eine höhere Dimension als $\binom{2\nu}{\nu} < 4^\nu$ hat.

Der Grenzübergang $L'_2 \to 0$ ist analog wie in § 3 anzuführen. Es wird dann $f_{h\nu} = \sum_0^j f^{[\varkappa]}_{h\nu} L^\varkappa_3$ und das Polynom

$$f^{[\varkappa]}_{h\nu}(v) = \frac{1}{L'^\varkappa_2} \sum_{i=h-\nu}^{\varkappa} \frac{(-1)^i f^i_{h\nu}(v)}{i!\,(\varkappa-i)!}$$

nähert sich für $L'_2 \to 0$ dem Grenzwert

$$\frac{\nu!}{(h-\nu)!} \sum_{i=h-\nu}^{\varkappa} \sum_{\mu=0} \frac{(-1)^{i-\mu}}{(\varkappa-i)!\,(i-\mu)!} \frac{\rho^{|\mu+\nu-h}_{h+i-\mu-1}}{(\mu+\nu-h)!} \frac{G^{(\varkappa+\nu-h)}_{\nu-\mu,\,i}}{(\nu-\mu)!}$$

Ein resumierender Vergleich der Resultate für beide Ansätze (8) und (8 $a$) zeigt, daß im allgemeinen der erstere, in Ausnahmsfällen der letztere zu einfacheren Darstellungen führt.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: 136_2a

Autor(en)/Author(s): Tauber Alfred

Artikel/Article: Zur Integration der linearen Differentialgleichungen. 243-263