Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Die Fehlertheorie auf geometrischer Grundlage (Fehlergeometrie)

Von

Edmund Röggla (Pilsen)

(Mit 2 Tafeln)

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. März 1927)

I. Einleitung.

1. Die Entwicklung der Theorie der Meßfehler hat sich bisher vornehmlich auf mathematische Grundlagen gestützt. Nur nebenbei wurde die geometrische Bedeutung der gewonnenen Gleichungen und Ergebnisse hervorgehoben. Im Gegensatze hiezu soll in dieser Studie die Theorie der Meßfehler auf vorwiegend geometrischer Basis behandelt werden.

Die Untersuchung der Fehlergesetze vom geometrischen Standpunkte bietet den Vorteil der größeren Anschaulichkeit und Unabhängigkeit von Schwierigkeiten analytischer Natur, wie sie in der Fehlertheorie häufig auftreten. Die Ergebnisse der Fehlergeometrie sind ohne Rücksicht auf die Funktionsform der Fehlergesetze allgemein gültig und liefern die Grundlage zu einer Reihe von Untersuchungen und Beweisführungen, die nach der üblichen analytischen Methode äußerst schwierig oder überhaupt in einwandfreier Weise nicht möglich sind.

2. Jede Messung kann in ihrer geometrischen Bedeutung als die Bestimmung der Länge einer Strecke aufgefaßt werden. Wird angenommen, daß die Strecke in der Abszissenachse eines rechtwinkeligen Koordinatensystems liegt, so besteht das Ziel der Messung in der Bestimmung der Lage des Endpunktes bei als bekannt vorauszusetzender Lage des Anfangspunktes der Strecke. Da Messungen stets mit Fehlern behaftet sind, so wird hiebei nicht die wahre Lage des Endpunktes, sondern nur ein Wahrscheinlichkeitswert für die Lage desselben innerhalb gewisser Abschnitte der Abszissenachse gewonnen. Werden die den einzelnen, gleichen Elementarintervallen dx entsprechenden, unendlich kleinen Wahrscheinlichkeitswerte durch denselben proportionale Ordinaten endlicher Größe dargestellt, so entsteht eine Wahrscheinlichkeitskurve — die Meßkurve — welche im Sinne der Fehlergeometrie als das eigentliche Gesamtergebnis der Messung anzusehen ist.

3. Man unterscheidet zwei im Grunde verschiedene Arten von Messungen: die quantitative und die qualitative Messung. Bei ersterer wird das Meßgerät auf die Länge der zu messenden Strecke eingestellt und das Ergebnis an jenem abgelesen. Man erhält also

einen quantitativ bestimmten Meßwert. Bei der qualitativen Messung wird dagegen am Meßgerät eine frei gewählte Maßgröße eingestellt und nun verglichen, ob diese größer oder kleiner sei, als die zu messende Strecke. Eine qualitative Messung liefert demnach keinen bestimmten Meßwert, sondern nur entweder ein überwertiges (positives) oder ein unterwertiges (negatives) Ergebnis, je nachdem sich die zu messende Strecke als größer oder kleiner erweist als das Maß.

II. Die quantitative Messung.

4. Die Fehlerkurve.

Es werde die Länge einer Strecke, deren Wahrwert l sei, mit einem bestimmten Meßgerät sehr oft (theoretisch genommen unendlich mal) gemessen. Das Ergebnis jeder einzelnen Messung wird eine Streckenlänge m sein, die vom Wahrwert l um einen jedesmal verschiedenen Wert, den Fehler $f = m - l$ abweicht. Nimmt man jenen Strahl, auf dem die zu messende Strecke liegt, als Abszissenachse eines rechtwinkeligen Koordinatensystems an und denkt man sich diese Achse in sehr kleine (unendlich kleine) untereinander gleiche Teile eingeteilt, so wird in jedem solchen Zwischenraum eine Anzahl Messungen enthalten sein. Diese Anzahl verhältnisgleicher Ordinaten in jedem Elementarintervalle aufgetragen, ergeben die Fehlerkurve.

Die Fehlerkurve hat in vielen Fällen ungefähr den in Fig. 1 zur Darstellung gebrachten Verlauf, im mittleren Teile ein Maximum mit allmählicher (asymptotischer) Anschmiegung an die Abszissenachse nach beiden Seiten.

Die gesamte, zwischen der Kurve Φ und der X-Achse eingeschlossene Fläche F hat endlichen Inhalt. Symmetrie der Kurve in bezug auf die Maximalordinate ist ein Sonderfall, der für die Fehlergeometrie jedoch keine tiefere Bedeutung hat. Ebenso ist es nur Gegenstand der Eichung des Meßgerätes, die Anordnung so zu treffen, daß der Fußpunkt der Maximalordinate mit dem wahren Endpunkt übereinstimmt.

Aus der Art der Entstehung der Fehlerkurve folgt unmittelbar, daß die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit dw dafür, daß der Fehler bei einer Messung in den Grenzen f bis $f + dx$ liege, gleich sein muß dem Quotienten aus der zugehörigen Elementarfläche $y \cdot dx$ in die ganze Kurvenfläche:

$$dw = \frac{y}{F} \; dx.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler in dem endlichen Intervalle f_a bis f_b enthalten sei, wird ausgedrückt durch den Quotienten aus der über dem Intervall liegenden Teilfläche F_a^b in die Gesamtfläche:

$$W_a^b = \frac{F_b^a}{F}.$$

Die Fehlerkurve eines Meßgerätes wird im allgemeinen Falle mit der Länge der zu messenden Strecke veränderlich sein. Es entspricht dann jedem einzelnen Falle eine besondere Fehlerkurve. Die Wirkungsweise eines Meßgerätes kann erst dann richtig bewertet werden, wenn die Gesamtheit der Fehlerkurven innerhalb des in Betracht kommenden Meßbereiches bekannt ist.

In manchen Fällen ist es zweckmäßig, den Ordinatenmaßstab der Fehlerkurve so zu wählen, daß der Inhalt der Kurvenfläche gleich Eins wird. Diese Form der Kurve soll als reduzierte Fehlerkurve bezeichnet werden. Um eine beliebige Fehlerkurve auf diese Form zu bringen, dividiert man deren Ordinaten durch die Gesamtfläche. Die über einem Abschnitt der Abszisse liegende Kurvenfläche ist dann gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Fehler in diesem Abschnitte liege.

5. Die Meßkurve.

Werden aus einer sehr großen Anzahl von quantitativen Messungen mit demselben Meßgerät, die an Strecken verschiedenster Längen vorgenommen wurden, alle jene Messungen herausgegriffen, die einen bestimmten Meßwert m ergaben, so gehört zu jeder solchen Messung ein anderer wahrer Wert der Streckenlänge l und ein Fehler $l-m$. Werden diese Fehler in gleicher Weise, wie im vorhergehenden Abschnitte angegeben, zur Konstruktion einer Wahrscheinlichkeitskurve verwertet, so erhält man die dem quantitativen Meßwerte m entsprechende Meßkurve.

Die Meßkurve kann auch als die Wahrscheinlichkeitskurve für die Lage des Endpunktes einer Strecke aufgefaßt werden, deren Meßwert m ist.

Im allgemeinen entspricht bei gegebenem Meßgerät jedem verschiedenen Meßwerte eine besondere Meßkurve. Die Meßkurven sind mit den Fehlerkurven nicht identisch, stehen aber mit ihnen in einem bestimmten Zusammenhange. Aus der Schar der Fehlerkurven kann die Schar der Meßkurven des betreffenden Meßgerätes abgeleitet werden.

In Fig. 2 sei m die gemessene Länge einer Strecke, M die durch die Messung bestimmte Endpunktslage. Die wahre Lage des Endpunktes und der Wahrwert der Streckenlänge sind unbekannt. Wären dieselben L_1, beziehungsweise l_1, so wäre $y_1 . dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Messung das Ergebnis m liefert, wenn y_1 die Ordinate im Punkte M der zur Streckenlänge l_1 gehörigen reduzierten Fehlerkurve Φ_1 vorstellt. Dies gilt für alle möglichen Werte l_2, l_3, l_4. der Streckenlänge, wobei aber jedesmal eine andere Fehlerkurve Φ_2, Φ_3.. . und eine andere Ordinate zur Geltung kommen. Da die Wahrscheinlichkeit des

Vorhandenseins einer bestimmten Ursache verhältnisgleich ist der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens des Ereignisses beim Wirksamwerden dieser Ursache, so ist in dem vorliegenden Falle y'_1, y'_2, y'_3 usw. proportional der Wahrscheinlichkeit für die Lage des Endpunktes der gemessenen Strecke in den Punkten L_1, L_2, L_3. Werden diese Ordinaten in den genannten Punkten aufgetragen, so ergibt die Verbindung der Endpunkte die gesuchte Meßkurve Ψ' des Meßgerätes für den Meßwert m.

Aus dem dargelegten Zusammenhange der Meßkurve mit den Fehlerkurven folgt, daß die beiden in ihrer Form einander zwar ähneln werden, aber keineswegs identisch sein müssen. Nur wenn die Fehlerkurve unabhängig ist von der Länge der zu messenden Strecke und in bezug auf ihre Maximalordinate symmetrisch verläuft, dann ist sie zugleich auch Meßkurve und als solche unabhängig vom Meßwerte. Ist die Fehlerkurve zwar unabhängig von der Streckenlänge, aber nicht symmetrisch, dann wird die Meßkurve zu ihrem Spiegelbilde.

Die dem Meßwerte m, beziehungsweise dem Punkte M entsprechenden Koordinaten der Meßkurve sollen als Hauptkoordinaten bezeichnet werden, wobei vorausgesetzt wird, daß die Eichung des Meßgerätes derart erfolgte, daß der Meßwert stets mit dem wahrscheinlichen Wert der gemessenen Strecke übereinstimmt. Dies ist dann der Fall, wenn die Hauptordinate die Gesamtfläche der Meßkurve halbiert. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Wahrwert größer oder kleiner sei als der Meßwert, ist dann gleich Einhalb.

Wohl zu unterscheiden vom wahrscheinlichen Wert der gemessenen Größe ist der wahrscheinlichste Wert. Dieser wird durch jene Abszisse der Meßkurve dargestellt, für welche die Ordinate den Maximalwert erreicht. Ist die Meßkurve symmetrisch in bezug auf die Maximalordinate, dann fällt der wahrscheinliche Wert mit dem wahrscheinlichsten überein.

Der Genauigkeitsgrad einer Messung wird durch die positive und negative wahrscheinliche oder 50%ige Abweichung des Wahrwertes vom Meßwerte ausgedrückt. Werden die beiderseits der Hauptordinate liegenden gleich großen Flächenteile der Meßkurve nochmals durch zwei Ordinaten halbiert, so bedeuten die Abstände dieser Halbierungsordinaten von der Hauptordinate den wahrscheinlichen positiven, beziehungsweise negativen Fehler der Messung. Die Summe der Absolutwerte der 50%igen Fehler wird als 50%ige Streuung bezeichnet. Es ist mit der Wahrscheinlichkeit einhalb zu erwarten, daß der Wahrwert innerhalb der 50%igen Streuung liege.

Bei symmetrisch angeordneten Meßkurven, wo der Schwerpunkt der Kurvenfläche in der Hauptordinate liegt, kommen außer dem 50%igen noch der durchschnittliche und der mittlere Fehler in Betracht. Der durchschnittliche Fehler ist gleichbedeutend mit den Schwerpunktabständen der durch die Hauptordinate

-eschiedenen Flächenhälften von derselben. Der mittlere Fehler ist -leich dem Trägheitsradius der Gesamt-Kurvenfläche in bezug auf die Hauptordinate.

Die auf die Hauptkoordinaten bezogene Gleichung einer Meß-kurve soll als deren Hauptgleichung bezeichnet werden.

Gleichwie bei der Fehlerkurve, ist es auch hier manchmal zweckmäßig, den Ordinatenmaßstab so zu wählen, daß die Gesamtfläche gleich Eins wird. Diese Form der Meßkurve wird reduzierte Meßkurve genannt werden.

Es ist für die fehlergeometrischen Untersuchungen ganz gleichgültig, woher die Kenntnis der Meßkurve stammt. Sie muß nicht gerade von einer Instrumentalmessung herrühren. Es kann z. B. von einer Größe bekannt sein, daß sie jeden Wertes innerhalb der Grenzen l_1 und l_2 mit gleicher Wahrscheinlichkeit fähig ist. In diesem Falle wird die Meßkurve durch den Linienzug $ABCDEF$ (Fig. 3) dargestellt.

Die Gesamtfläche ist $y \,.\, a$. Soll die Meßkurve in der reduzierten Form erscheinen, so muß y so gewählt werden, daß die Fläche gleich Eins wird, also $y = 1 : a$.

Die der Form und Lage nach gegebene Meßkurve ist der geometrische Ausdruck des Messungsergebnisses und bildet das Grundelement der Fehlergeometrie.

6. Die zusammengesetzte Meßkurve.

Wird eine und dieselbe Strecke mit beliebigen Meßgeräten mehrmals gemessen, so kann das Gesamtergebnis dieser Messungen wieder durch eine Meßkurve zum Ausdruck gebracht werden, welche zum Unterschied von den Meßkurven der Einzelmessungen als zusammengesetzte Meßkurve bezeichnet werden soll.

Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Meßkurven und der zusammengesetzten Meßkurve wird durch den I. Hauptsatz der Fehlergeometrie ausgedrückt:

Die zusammengesetzte Meßkurve ist die Multiplikationskurve der einzelnen Meßkurven.

Unter Multiplikationskurve wird jene Kurve verstanden, deren Ordinaten sich aus der Multiplikation der zu gleichen Abszissen gehörigen Ordinaten der einzelnen Kurven ergeben.

Zum Beweise des ersten Hauptsatzes sei angenommen, daß in Abb. 4 das Ergebnis zweier Messungen derselben Strecke durch die Meßkurven Ψ_1 und Ψ_2 dargestellt sei. Wenn der Wahrwert der Strecke l wäre, dann ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Meßwertes m_1 mit dem ersten Meßgerät proportional der Ordinate y_1 der ersten Meßkurve im Punkte L. Dies folgt unmittelbar aus den im vorhergehenden Abschnitte erläuterten Beziehungen zwischen Meßkurve und Fehlerkurve.

In gleicher Weise ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Meßwertes m_2 mit dem zweiten Meßgeräte, wenn der Wahrwert der Strecke l ist, proportional der Ordinate y_2 der zweiten Kurve im Punkte L. Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der beiden Meßwerte, wenn der Wahrwert l ist, ist dann proportional dem Produkte aus den beiden Ordinaten $y_1 . y_2 = y$. Dies gilt für jede beliebige Lage des Punktes L.

Nach dem Satze von der Wahrscheinlichkeit der wirkenden Ursache ist nun auch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Wahrwert l sei, wenn die beiden Meßwerte m_1 und m_2 vorliegen, verhältnisgleich dem genannten Ordinatenprodukte, welches somit die Ordinate der Wahrscheinlichkeitskurve Ψ' für die Lage des Endpunktes der gemessenen Strecke auf Grund der beiden Meßwerte darstellt. Da dies für jede mögliche Lage des Endpunktes L gilt, so ist hiemit der Beweis erbracht, daß die zusammengesetzte Meßkurve zweier Einzelmessungen tatsächlich die Multiplikationskurve der einzelnen Meßkurven ist.

In ganz analoger Weise kann der Beweis für den Fall geliefert werden, daß nicht bloß zwei, sondern eine beliebige Anzahl von Einzelmessungen vorliegen.

Man kann den Satz von der zusammengesetzten Meßkurve auch in folgender Form zum Ausdruck bringen:

Das Ergebnis mehrerer Messungen ist gleich dem Ergebnisse einer einzigen Messung, deren Meßkurve identisch ist mit der Multiplikationskurve der einzelnen Meßkurven.

Es sei noch bemerkt, daß dieser Satz nicht nur für die quantitative Messung, sondern ganz allgemein auch für die qualitative Messung und überhaupt für jede Wahrscheinlichkeitsbestimmung des Wertes einer Größe Gültigkeit besitzt.

7. Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens bestimmter Meßwerte bei wiederholter Messung einer und derselben Größe wird durch den II. Hauptsatz der Fehlergeometrie festgestellt. Er lautet:

Liegt eine durch die reduzierte Meßkurve zum Ausdrucke gebrachte Messung einer Strecke vor, so ist die Wahrscheinlichkeit, bei n folgenden Messungen die bestimmten Meßwerte m_1, m_2, m_3. zu erhalten, unendlich klein der n-ten Ordnung und proportional der Fläche der Multiplikationskurve sämtlicher $n+1$ reduzierten Meßkurven.

In Abb. 4 sei Ψ_1 die vorliegende Meßkurve in reduzierter Form mit dem zugehörigen Meßwerte m_1. Wäre l der Wahrwert der gemessenen Strecke, dann ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer folgenden Messung den Meßwert m_2 mit der zugehörigen reduzierten Meßkurve Ψ_2 zu erhalten, gleich $y_2 . dx$. Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß l der Wahrwert sei, auf Grund der ersten Messung gleich $y_1 . dx$. Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse ist daher $y_1 . y_2 . dx . dx$.

Die totale Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Meßwertes m_1 bei beliebiger Größe des Wahrwertes l ergibt sich aus der Integration sämtlicher Elementarwahrscheinlichkeiten innerhalb der Grenzen $-\infty$, $+\infty$

$$w = dx \int_{-\infty}^{+\infty} y'_1 \cdot y'_2 \quad dx$$

Da aber das bestimmte Integral die Fläche F' der aus den Meßkurven Ψ_1, Ψ_2 gewonnenen Multiplikationskurve Ψ' darstellt, so ist hiemit der II. Hauptsatz zunächst für die einmalige Wiederholung einer Messung bewiesen. Der Beweis für die mehrmalige Wiederholung der Messung erfolgt in analoger Weise.

Bei dem hier behandelten Problem bedeutet die erste Meßkurve den wahrscheinlichkeitsgeometrischen Ausdruck für ein apriorisches Wissen von der Endpunktslage der Meßstrecke. Dieses Wissen kann auch auf eine andere Weise als durch eine Instrumentalmessung gewonnen werden. Ein häufig vorkommender Fall ist der, daß apriori bekannt ist, der Endpunkt einer Strecke liege mit gleicher Wahrscheinlichkeit irgendwo auf der Abszissenachse im Bereiche $-\infty$, $+\infty$.

Der wahrscheinlichkeitsgeometrische Ausdruck für dieses apriorische Wissen ist eine Meßkurve mit konstanten Ordinaten. Da die Wahrscheinlichkeit für die Lage des Endpunktes der Meßstrecke innerhalb eines endlichen Abschnittes der Abszissenachse unendlich klein der ersten Ordnung ist, so müssen die Ordinaten der reduzierten Meßkurve einen unendlich kleinen, konstanten Wert der ersten Ordnung besitzen. Man kann daher die Gleichung der reduzierten Meßkurve in der Form ausdrücken:

$$y = c \quad dx,$$

wobei c einen konstanten Faktor vorstellt.

Es kann nun die Frage auftauchen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, bei n-Messungen der in Rede stehenden Strecke die bestimmten Meßwerte m_1, m_2, m_3 zu erhalten. Zur Lösung dieser Aufgabe bildet man die Multiplikationskurve aus der gegebenen Wahrscheinlichkeitskurve $y = c \quad dx$ und den n Meßkurven, welche den Meßwerten m_1, m_2, m_3. zugehören. Ihre Gleichung hat die Form

$$y' = c \quad dx \cdot y'_1 \cdot y'_2 \cdot y'_3 \cdot \qquad \cdot y'_n,$$

wenn y'_1, y'_2. die zusammengehörigen Ordinaten der einzelnen Meßkurven bedeuten. Die Fläche der Kurve ist unendlich klein und wird dargestellt durch das Produkt aus der endlichen Fläche der Multiplikationskurve und dem unendlich kleinen Ordinatenwert dx der apriorischen Wahrscheinlichkeitskurve:

$$F' = c \,.\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} y_1 \,.\, y'_2 \,. \quad . y'_n \,.\, dx.$$

Nach der Regel des II. Hauptsatzes ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der fraglichen n Meßwerte durch die Gleichung

$$w = c \,.\, (dx)^n \,.\, dx \int_{-\infty}^{+\infty} y'_1 \,.\, y'_2 \,. \quad . y_n \,.\, dx = c \,.\, (dx)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} y'_1 \,.\, y'_2 \,. \quad . y'_n \; dx.$$

Sie besagt: Wenn ein Wert apriori jeder Größe mit gleicher Wahrscheinlichkeit fähig ist, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten bestimmter Meßergebnisse bei n maliger Messung unendlich klein der $(n+1)$ten Ordnung und proportional der Fläche der Multiplikationskurve aus den n Meßkurven.

Dieser Wahrscheinlichkeitswert gilt für eine bestimmte Reihenfolge der Meßwerte. Bei beliebiger Reihenfolge des Eintreffens der Meßwerte wäre die Wahrscheinlichkeit $n!$-mal größer.

III. Anwendung der Fehlergeometrie auf Probleme der direkten Messung.

8. Ein Sonderfall der quantitativen Messung ist die direkte Messung. Bei dieser wird die Meßkurve durch die Gauß'sche Funktion

$$y = e^{-h^2 (x-m)^2}$$

dargestellt und ist unabhängig von der Größe der zu messenden Strecke.

Der Parameter h, Genauigkeitsmaß genannt, kennzeichnet die Genauigkeit der Messung und ist verkehrt proportional dem wahrscheinlichen, mittleren und durchschnittlichen Fehler. m ist der Meßwert.

Die Gauß'sche Funktion ist symmetrisch bezüglich der Hauptordininate, welche zugleich Maximalordinate ist. Die reduzierte Hauptgleichung lautet:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

9. Ableitung des Gauß'schen Fehlergesetzes.

Die Grundlage des Gauß'schen Fehlergesetzes bildet die Annahme, daß der wahrscheinlichste Wert einer mehrmals mit gleicher Genauigkeit gemessenen Größe das arithmetische Mittel der einzelnen Meßwerte ist. Nach der Anschauungsweise der Fehlergeometrie bedeutet dies, daß die Meßkurve eine solche Form besitzen muß, daß die aus mehreren Meßkurven resultierende Multiplikationskurve ihre Maximalordinate stets im arithmetischen Mittel der einzelnen Hauptabszissen (Meßwerte) aufweist.

Es seien m_1, m_2, m_3. die einzelnen Meßwerte und m_m das arithmetische Mittel derselben. Es besteht dann das Kriterium:

$$m_m - m_1) + (m_m - m_2) + (m_m - m_3) \ldots \quad . = 0 = \quad (m_m - m_i). \qquad (\alpha)$$

Die Gleichungen der einzelnen Meßkurven — in reduzierter Form — seien:

$$y = f\,(x - m_1),\; y = f(x - m_2).$$

Soll die Multiplikationskurve bei $x = m_m$ ihr Maximum haben, so muß der erste Differentialquotient für diesen Aszissenwert Null und der zweite Differentialquotient negativ werden. Der erste Differentialquotient ist

$$\frac{dy}{dx} = \left\{\frac{f'(x - m_1)}{f\,(x - m_1)} + \frac{f'(x - m_2)}{f\,(x - m_2)} + \quad .\right\}\left\{f(x - m_1) . f(x - m_2). \quad\right\} =$$

$$= \left\{\frac{d \log f(x - m_1)}{dx} + \frac{d \log f(x - m_2)}{dx} + \quad \right\} . y$$

Für $x = m_m$ soll dieser Ausdruck verschwinden. Es muß also die Beziehung bestehen:

$$\frac{d \log f(m_m - m_1)}{dx} + \frac{d \log f(m_m - m_2)}{dx} + \quad = 0 =$$

$$= \quad \frac{d}{dx} \log f(m_m - m_i) \qquad (\beta)$$

und zwar für beliebige Werte von m_m und m_1, m_2, m_3 ., insofern nur das Kriterium des arithmetischen Mittels aufrecht erhalten bleibt. Multipliziert man, um die Lösung möglichst allgemein zu gestalten, die beiden Seiten der Gleichung α mit einer Konstanten k, so ergibt sich

$$k\,(m_m - m_1) + k\,(m_m - m_2) + \quad = k \quad (m_m - m_i) = 0$$

und es ist ersichtlich, daß der gleichzeitige Bestand dieser Gleichung und der Differentialgleichung (β) an die Bedingung geknüpft ist:

$$\frac{d \log f(m_m - m_i)}{dx} = k\,(m_m - m_i).$$

wobei m_i jeden beliebigen Wert x annehmen kann.

Die Integration liefert die Gleichung der gesuchten Fehlerfunktion:

$$\log f(m_m - x) - \log K = \frac{k}{2}(m_m - x)^2$$

$$f(m_m - x) = K \cdot e^{\frac{k}{2}(m_m - x)^2}.$$

K ist eine Integrationskonstante.

Die Forderung, daß der zweite Differentialquotient für $x - m_m$ negativ werden soll, bedingt, daß der Koeffizient k kleiner als Null sein muß, weshalb die Gauß'sche Fehlerfunktion zweckmäßig in der üblichen Form

$$f(u) = K e^{-h^2 u^2}$$

angeschrieben wird.

10. Nachweis, daß nach dem Gauß'schen Gesetz die n-malige Messung gleichwertig ist einer einmaligen Messung von $\sqrt{n}$-facher Genauigkeit.

Die Gleichung der zusammengesetzten Meßkurve, wenn die einzelnen Meßkurven den Genauigkeitsgrad h besitzen, ist:

$$y = e^{-h^2 [(x-m_1)^2 + (x-m_2)^2 + \ldots (x-m_m)^2]}.$$

Wird diese Kurve auf die Hauptkoordinaten transformiert, d. h. auf ein System, dessen Ursprung die Abszisse $X = \frac{\Sigma m}{n}$ hat, so gelangt man zur Hauptgleichung der zusammengesetzten Meßkurve, welche lautet:

$$y = e^{-h^2 n x^2} \cdot e^{h^2 n \left\{\frac{\Sigma (m^2)}{n} - \left(\frac{\Sigma m}{n}\right)^2\right\}}$$

und bei Weglassung des konstanten Faktors in der Form erscheint

$$y = e^{-h^2 n x^2}$$

Die zusammengesetzte Meßkurve ist also wieder eine Gauß'sche Kurve, bei der aber an Stelle des Genauigkeitsmaßes h der Wert $h\sqrt{n}$ auftritt.

11. Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes des apriori unbekannten Genauigkeitsmaßes h, wenn die n-malige Messung einer Größe die Meßwerte $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ geliefert hatte.

Jener Wert dss Genauigkeitsmaßes ist der wahrscheinlichste, der dem Eintreten des vorliegenden Messungsergebnisses die größte Wahrscheinlichkeit verleiht.

Wird angenommen, daß die gemessene Größe apriori jeden beliebigen Wertes mit gleicher Wahrscheinlichkeit fähig ist, dann ist nach Punkt 7 die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens bestimmter Meßwerte proportional der Gesamtfläche der aus den einzelnen reduzierten Meßkurven gebildeten Multiplikationskurve. Für diese besteht nach Punkt 10 die Hauptgleichung

$$y = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 n x^2} \quad e^{-h^2 n \left\{\frac{\Sigma (m^2)}{n} - \left(\frac{\Sigma m}{n}\right)^2\right\}}.$$

Werden die Differenzen $m_i - \left(\frac{\Sigma m}{n}\right)$ zwischen den Meßwerten und dem arithmetischen Mittel, die sogenannten scheinbaren Fehler, mit $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ bezeichnet, so kann die Gleichung in der Form

$$y = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 n x^2} e^{-h^2 \Sigma (v^2)}$$

angeschrieben werden. Die Gesamtfläche dieser Kurve ist

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, . \, dx = \frac{1}{\sqrt{\pi^{n-1} \, . \, n}} \quad e^{-h^2 \Sigma (v^2)} \, . \, h^{n-1}.$$

Sie erreicht ihren Höchstwert für jenen Wert von $h = h'$ der den Differentialquotienten nach h zu Null macht. Man findet

$$h' = \sqrt{\frac{n-1}{2 \, \Sigma (v^2)}}.$$

Dies ist der wahrscheinlichste Wert des Genauigkeitsmaßes auf Grund der vorliegenden n Messungen.

Wird an Stelle des Genauigkeitsmaßes der mittlere Fehler $\mu = \frac{1}{h\sqrt{2}}$ eingeführt, so ergibt sich zur Bestimmung des wahrscheinlichsten Wertes desselben die bekannte Formel

$$\mu' = \sqrt{\frac{\Sigma (v^2)}{n-1}}$$

Die mehrfache direkte Messung einer und derselben Größe ist zugleich eine indirekte, quantitative Messung des apriori unbekannten Genauigkeitsmaßes h. Der Wahrscheinlichkeitsausdruck

$$y = e^{-h^2 \Sigma (v^2)} \, . \, h^{n-1}$$

stellt die Meßkurve des Genauigkeitsmaßes vor, wenn h als veränderlicher Abszissenwert aufgefaßt wird.

Diese Meßkurve ist unsymmetrisch bezüglich der Maximalordinate und es ist daher der wahrscheinlichste Wert h' des Genauigkeitsmaßes nicht zugleich der wahrscheinliche oder Meßwert h_m dieser Größe.

Um letzteren zu ermitteln, ist jene Ordinate aufzusuchen, die die Gesamtfläche der Meßkurve halbiert. Die zugehörige Abszisse liefert dann laut Definition nach Punkt 5 den Meßwert.

Da das Genauigkeitsmaß nicht negativ sein kann, so lautet die Gleichung für die Fläche der Meßkurve:

$$F_0^h = \int_0^h e^{-h^2 \Sigma (v^2)} \quad h^{n-1} \quad dh.$$

Für den Meßwert h_m muß die Beziehung bestehen:

$$F_0^{h\,m} = \frac{1}{2} F_0^{\infty},$$

wonach derselbe berechnet werden kann.

Um den positiven und den negativen $50\,^0/_0$igen Fehler bei der Bestimmung des Genauigkeitsmaßes festzustellen, sind jene Abszissenwerte h_1 und h_2 aufzuzuchen, für welche

$$F_0^{h_1} = \frac{3}{4} F_0^{\infty}, \; F_0^{h_2} = \frac{1}{4} F_0^{\infty}.$$

Es ist dann $f_{50}+ = h_1 - h_m$ der positive, $f_{50}- = h_m - h_2$ der negative $50\,^0/_0$ige Fehler, während $h_1 - h_2 = f_{50}+ + f_{50}-$ die $50\,^0/_0$ige Streuung bedeutet.

IV. Das aposteriorische Fehlergesetz (Gesetz der scheinbaren Fehler).

12. Bestimmung der Meßkurve auf Grund mehrerer direkter Messungen einer Größe bei apriori unbekanntem Genauigkeitsmaße.

In vielen Fällen der direkten Messung ist das Genauigkeitsmaß der Einzelmessung apriori unbekannt. Erst das bei wiederholter Messung entstehende Meßbild gibt Anhaltspunkte hiefür und ermöglicht die Bestimmung des wahrscheinlichsten oder des wahrscheinlichen Wertes desselben, wie im Punkte 11 gezeigt wurde.

Es handelt sich jetzt darum, die einer solchen mehrfachen Messung entsprechende (zusammengesetzte) Meßkurve abzuleiten, deren Gleichung dann der analytische Ausdruck des aposteriorischen Fehlergesetzes oder wie es auch genannt wird, des Gesetzes der scheinbaren Fehler sein wird.

Es seien wieder $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ die bei der n-maligen Messung derselben Größe erhaltenen Meßwerte. Unabhängig von der Größe des Genauigkeitsmaßes liegt der wahrscheinlichste und zugleich Meßwert im arithmetischen Mittel m_m der einzelnen Meßwerte.

Wäre das Genauigkeitsmaß h apriori bekannt, so würde die Hauptgleichung der zusammengesetzten Meßkurve in der reduzierten Form nach Punkt 10 lauten.

$$y = \frac{h\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \quad e^{-h^2 n x^2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die wahre Lage des Endpunktes um das Maß x bis $x + dx$ vom arithmetischen Mittel abweiche, wäre dann:

$$y \quad dx = \frac{h.\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \quad e^{-h^2 n x^2} \quad dx.$$

Nun ist aber die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Genauigkeitsmaß eben den bestimmten Wert h besitze, nach Punkt 11 proportional dem Ausdrucke

$$e^{-h^2 \Sigma (v)^2} \quad h^{n-1}.\, dh.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen der beiden Ereignisse, daß die Abweichung des Wahrwertes vom arithmetischen Mittel x bis $x + dx$ betrage und daß das Genauigkeitsmaß die Größe h bis $h + dh$ besitze, ist proportional dem Produkte

$$e^{-h^2 n x^2} \quad e^{-h^2 \Sigma (v)^2} \quad h^{-1} \quad dx \quad dh = e^{-h^2 [n x^2 + \Sigma (v^2)]} \quad h^{n-1} \quad dx \quad dh.$$

Die totale Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der Abweichung x des Wahrwertes vom arithmetischen Mittel bei beliebigem Werte des Genauigkeitsmaßes ist verhältnisgleich dem bestimmten Integrale des obigen Ausdruckes in den Grenzen $h = 0$, $h = \infty$, welches bei Hinweglassung der konstanten Faktoren lautet:

$$dx \int_0^\infty e^{-h^2 [n x^2 + \Sigma (v^2)]} \,.\, h^{n-1} \quad dh.$$

Hieraus ergibt sich als analytischer Ausdruck der gesuchten zusammengesetzen Wahrscheinlichkeitskurve die Gleichung

$$y = \int_0^\infty e^{-h^2 [n x^2 + \Sigma (v^2)]} \quad h^{n-1} \quad dh,$$

welche nach Ausmittlung des Integrals und Kürzung in der Form

$$y = \frac{1}{\left\{n x^2 + \Sigma (v^2)\right\}^{\frac{n-1}{}}}$$

erscheint. Diese Gleichung ist der a n a l y t i s c h e A u s d r u c k des a p o s t e r i o r i s c h e n F e h l e r g e s e t z e s oder des G e s e t z e s der s c h e i n b a r e n F e h l e r.

Das aposteriorische Fehlergesetz besitzt eine sehr einfache geometrische Bedeutung. Schreibt man dasselbe in der Form

$$y = \frac{1}{n^{n-1}} \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + \frac{\Sigma\,(v^2)}{n}}\right)^{n+1}} = C \cdot \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + \frac{\Sigma\,(v^2)}{n}}\right)^{n+1}}$$

an, so stellt der Wurzelausdruck im Nenner den Trägheitsradius des Meßbildes in bezug auf einen Punkt der Abszissenachse vor, der vom arithmetischen Mittel um das Maß x abweicht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß irgend ein Abszissenpunkt der wahre Endpunkt der gemessenen Strecke sei, ist somit verkehrt proportional der $(n+1)$ten Potenz des Trägheitsradius des Meßbildes in bezug auf diesen Punkt.

Der Bruch $\frac{\Sigma\,(v^2)}{n}$ bedeutet das Quadrat des Trägheitsradius ρ_0 des Meßbildes in bezug auf das arithmetische Mittel oder den Schwerpunkt desselben. Der reziproke Wert des Trägheitsradius $k = \frac{1}{\rho_0}$ kann als das Genauigkeitsmaß der aposteriorischen Messung aufgefaßt werden. Setzt man $kx = u$, so erscheint das Fehlergesetz in der für die weiteren Untersuchungen bequemeren Form

$$y = \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Diese Formel ist sehr bemerkenswert, weil sie zeigt, daß das Resultat einer mehrfachen Messung, bei der das Genauigkeitsmaß der Einzelmessung apriori unbekannt ist, nicht durch die Gauß'sche Exponentialfunktion darstellbar ist. Das Gesetz der scheinbaren Fehler ist somit wesentlich verschieden vom Gesetze der wahren Fehler.

13. Das aposteriorische Fehlergesetz der Einzelmessung.

Mit apriori unbekannter, jedoch gleicher Genauigkeit seien n direkte Messungen einer und derselben Größe l ausgeführt worden, wobei sich die Meßwerte $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$ ergaben. Sodann werde eine andere Größe l' mit derselben Genauigkeit einmal direkt gemessen. Der Meßwert sei m'. Es soll die dieser Einzelmessung entsprechende Meßkurve bestimmt werden.

Der Vorgang zur Ermittlung der Gleichung dieser Meßkurve ist ganz analog dem im Punkte 12 zur Bestimmung der zusammengesetzten Meßkurve eingeschlagenen. Wäre h der Wahrwert des Genauigkeitsmaßes, so hätte die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung x des Wahrwertes der gemessenen Größe vom Meßwerte m' den Wert

$$d\,w_1 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2} . d\,x;$$

nun ist aber die Wahrscheinlichkeit dafür, daß h der Wahrwert des Genauigkeitsmaßes sei, proportional dem Ausdruck

$$e^{-h^2 \Sigma (\nu^2)} . h^{n-1} . d\,h.$$

Hieraus ergibt sich die totale Wahrscheinlichkeit für die Abweichung x vom Meßwerte

$$d\,x \int_0^\infty e^{-h^2 [x^2 + \Sigma (\nu^2)]}\, h^{n-1} . d\,h$$

und nach entsprechender Umformung die Gleichung der Meßkurve der aposteriorischen Einzelmessung

$$y = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{\Sigma (\nu^2)}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{(1 + z^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

welche der analytische Ausdruck des aposteriorischen Fehlergesetzes der Einzelmessung ist.

Dieses Fehlergesetz ist dem der zusammengesetzten Messung ganz ähnlich, nur geht an Stelle des Argumentenwertes $u = k\,x$ der Wert $z = \frac{k}{\sqrt{n}} . x$ in die Formel ein. Es ist somit der Genauigkeitsgrad der Einzelmessung $\sqrt{n}$-mal kleiner als der der zusammengesetzten Messung.

14. Analytische Untersuchung des aposteriorischen Fehlergesetzes.

Die Fehlerfunktion des aposteriorischen Fehlergesetzes

$$y = \frac{1}{(1 + u^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

ist für ganzzahlige Werte von n, wie sie hier ausschließlich in Betracht kommen in geschlossener Form integrierbar. Die Integration wurde ausgearbeitet im Jahre 1917 durch Herrn J. Kutlik, damals Beamter der Ungarischen Kanonenfabrik in Györ.

Das allgemeine Integral lautet:

a) für ungerade n

$$
\int y\,.\,du = \begin{cases}
\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{u}{1+u^2}+\dfrac{1}{2}\cdot \operatorname{arc} tg\, u & n=3 \\[2ex]
\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{u}{(1+u^2)^2}+\dfrac{3}{4.2}\cdot\dfrac{u}{1+u^2}+\dfrac{3}{4.2}\cdot \operatorname{arc} tg\, u & n=5 \\[2ex]
\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{u}{(1+u^2)^3}+\dfrac{5}{6.4}\cdot\dfrac{u}{(1+u^2)^2}+ & n=7 \\
\qquad +\dfrac{5.3}{6.4.2}\cdot\dfrac{u}{(1+u^2)}+\dfrac{5.3.1}{6.4.2}\cdot \operatorname{arc} tg\, u & \\[2ex]
\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{u}{(1+u^2)^4}+\dfrac{7}{8.6}\cdot\dfrac{u}{(1+u^2)^3}+ & n=9 \\
+\dfrac{7.5}{8.6.4}\cdot\dfrac{u}{(1+u^2)^2}+\dfrac{7.5.3.1}{8.6.4.2}\cdot\dfrac{u}{(1+u^2)}+ & \\
\qquad +\dfrac{7.5.3.1}{8.6.4.2}\cdot \operatorname{arc} tg\, u &
\end{cases}
$$

usw.,

b) für gerade n

$$
\int y\,.\,du = \begin{cases}
u\cdot\left(\dfrac{1}{1+u^2}\right)^{1/2} & n=2 \\[2ex]
\dfrac{u}{3}\cdot\left[\left(\dfrac{1}{1+u^2}\right)^{3/2}+\left(\dfrac{1}{1+u^2}\right)^{1/2}\cdot\dfrac{2}{1}\right] & n=4 \\[2ex]
\dfrac{u}{5}\cdot\left[\left(\dfrac{1}{1+u^2}\right)^{5/2}+\left(\dfrac{1}{1+u^2}\right)^{3/2}\cdot\dfrac{4}{3}+\right. & n=6 \\
\qquad \left.+\left(\dfrac{1}{1+u^2}\right)^{1/2}\cdot\dfrac{4.2}{3.1}\right] & \\[2ex]
\dfrac{u}{7}\cdot\left[\left(\dfrac{1}{1+u^2}\right)^{7/2}+\left(\dfrac{1}{1+u^2}\right)^{5/2}\cdot\dfrac{6}{5}+\right. & n=8 \\
\qquad \left.+\left(\dfrac{1}{1+u^2}\right)^{3/2}\cdot\dfrac{6.4}{5.3}+\left(\dfrac{1}{1+u^2}\right)^{1/2}\cdot\dfrac{6.4.2}{5.3.1}\right] &
\end{cases}
$$

usw.

Die Fläche der Meßkurve ist, entsprechend der Formel

$$
\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{F}} = \int_{-\infty}^{+\infty} y\,.\,du = 2\int_{0}^{\infty} y\,.\,du,
$$

für ungerade n:

$$\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{F}} = 2 \cdot \frac{(n-2)(n-4)\ldots 5.3.1}{(n-1)(n-3).\quad 6.4.2} \cdot \frac{\pi}{4},$$

für gerade n:

$$\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{F}} = 2 \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \frac{(n-2)(n-4).\quad 4.2}{(n-3)(n-5)\ldots 3.1}.$$

Der mittlere Fehler f_μ und der durchschnittliche Fehler f_d können nach den Formeln

$$f_\mu = \frac{1}{\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{F}}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 . du; \quad f_d = \frac{1}{\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{F}}} \int_{-\infty}^{+\infty} y . du$$

berechnet werden.

Der wahrscheinliche Fehler f_w und die 50prozentige Streuung werden durch Aufsuchen der den Halbierungsordinaten entsprechenden Abszissen ermittelt.

In der nachstehenden Tabelle sind die den genannten Fehlergrößen entsprechenden Argumentenwerte u_μ, u_d, u_w für die Meßzahlen 2 bis 10 eingetragen. Hiebei ist zu setzen:

a) für den Fall der aposteriorischen Einzelmessung:

$$u = \frac{kx}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{\Sigma\,(v^2)}} \cdot x,$$

b) für den Fall der zusammengesetzten aposteriorischen Messung

$$u = kx = \sqrt{\frac{n}{\Sigma\,(v^2)}} \cdot x.$$

Durch Auflösung nach x können die betreffenden Fehlergrößen in konkreten Fällen berechnet werden.

n	2	3	4	5	6		8	9	10
	0·578	0·444	0·369	0·320	0·288	0·264	0·247	0·233	0·221
u_μ	∞	1	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{7}}$	$\sqrt{\frac{1}{8}}$
u_d	1	$\frac{2}{\pi}$	1	$\frac{4}{3\pi}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{16}{15\pi}$	$\frac{15}{48}$	$\frac{96}{105\pi}$	$\frac{105}{384}$

15. Da die Mehrzahl der praktisch vorkommenden direkten Messungen auf aposteriorischer Bestimmung des Genauigkeitsmaßes beruht, so verdient das aposteriorische Fehlergesetz eine besondere Beachtung. Trotzdem ist es allgemein üblich, solche Messungen nach dem Gauß'chen Gesetz zu behandeln. Dies ist vom theoretischen Standpunkt betrachtet, entschieden unrichtig und gibt bei kleinen Meßzahlen ein unrichtiges Bild vom Genauigkeitsgrade des Meßresultats.

Mit zunehmender Meßzahl verschwindet der Unterschied zwischen dem aposteriorischen und dem Gauß'schen Gesetze immer mehr und mehr. Der Grenzwert für die aposteriorische Fehlerfunktion für die Meßzahl $n = \infty$ ist die Gauß'sche Exponentialfunktion.

V Die qualitative Messung.

16. Die qualitative Meßkurve.

Wie schon in der Einleitung dargelegt wurde, gibt es außer der quantitativen Messung noch ein anderes Meßverfahren zur Bestimmung einer Größe, nämlich die qualitative Messung. Bei dieser wird ein willkürlich gewähltes Maß mit der zu messenden Größe verglichen und festgestellt, ob letztere größer oder kleiner sei, als ersteres. Das Ergebnis einer einzelnen Qualitätsmessung kann daher nur entweder ein positives oder ein negatives sein und es liefert eine solche Messung keinen quantitativ feststehenden Meßwert.

In Abbildung 5 sei die Strecke $OM = m$ das zur Ausführung einer qualitativen Messung verwendete Maß. Das Ergebnis der Messung sei positiv, d. h., es habe sich die zu messende Strecke größer erwiesen als das Maß. Es soll die Meßkurve dieser Qualitätsmessung bestimmt werden.

Zur Lösung dieser Aufgabe muß vor allem die zum Maße m gehörige, quantitative, reduzierte Meßkurve $y = \varphi(x)$ bekannt sein, welche in Abbildung 5 mit Φ bezeichnet ist. Wenn die gemessene Strecke den Wert x besäße, dann wäre die Wahrscheinlichkeit, mit dem Maße m ein positives Ergebnis zu erhalten, gleichbedeutend mit der Wahrscheinlichkeit dafür, daß der zum Meßwerte m gehörige Wahrwert kleiner als x sei, also links vom Abszissenpunkt X liege. Diese Wahrscheinlichkeit ist aber gleich dem links von X liegenden Flächenteil der reduzierten Meßkurve oder analytisch ausgedrückt, gleich dem bestimmten Integrale der Meßkurvenfunktion von $-\infty$ bis x

$$z = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x) . dx.$$

Diese Beziehung gilt für jeden beliebigen Wert von x. Der Wahrscheinlichkeitswert z wird daher allgemein durch die Ordinaten einer Kurve Ψ_+ mit der Gleichung

$$= \psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x) \, . \, dx$$

zum Ausdrucke gebracht.

Die Ordinaten dieser Kurve sind die bestimmten Integrale der reduzierten, quantitativen Meßkurvengleichung, von $-\infty$ bis zum jeweiligen Abszissenwerte x. Sie soll als positive Integralkurve der quantitativen Meßkurve bezeichnet werden.

Nach dem Satze von der Wahrscheinlichkeit der Ursachen muß die unendlich kleine Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Endpunkt der qualitativ gemessenen Strecke einen bestimmten Abszissenwert x bis $x + dx$ aufweise, wenn die Messung ein positives Ergebnis geliefert hat, proportional sein dem oben berechneten Wahrscheinlichkeitswerte Die Meßkurve einer positiven Qualitätsmessung ist demnach die positive Integralkurve der zum angewendeten Maße m gehörigen reduzierten, quantitativen Meßkurve. Ihre analytische Darstellung erfolgt durch die Gleichung

$$z = \psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x) \, . \, dx.$$

Die Meßkurve der positiven Qualitätsmessung bewegt sich zwischen zwei Asymptoten, der X-Achse und der hiezu Parallelen im Abstande eins. Ihre Ordinaten wachsen mit zunehmender Abszisse vom unteren Grenzwerte Null bis zum oberen Grenzwerte eins. Die zum Maße m gehörige Ordinate hat den Wert $^1/_2$. Die zwischen Kurve und Abszissenachse liegende Fläche ist unendlich groß. Die Wahrscheinlichkeit für die Lage des Endpunktes der gemessenen Strecke in einem Abschnitte der Abszissenachse von endlicher Ausdehnung ist daher unendlich klein. Der wahrscheinlichste Wert und der Meßwert der gemessenen Strecke sind unendlich groß.

In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß die Meßkurve der negativen Qualitätsmessung durch die negative Integralkurve

$$t = \int_{x}^{+\infty} \varphi(x) \, . \, dx,$$

der zum Meßwerte m gehörigen quantitativen Meßkurve dargestellt wird.

Aus diesen Betrachtungen folgt der V. Hauptsatz: Die qualitativen Meßkurven sind die Integralkurven der quantitativen Meßkurve.

Der Zusammenhang zwischen der positiven und der negativen qualitativen Meßkurve ergibt sich aus der Beziehung

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi(x) \, . \, d x + \int_{x}^{+\infty} \varphi(x) \, . \, d x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \, . \, d x = 1,$$

daher $z+t=1$, $t=1-z$. Die Ordinaten der positiven und der negativen qualitativen Meßkurve ergänzen sich auf eins.

Ferner sind noch folgende Beziehungen beachtenswert:

$$y = \varphi(x) = \frac{d z}{d x}$$

für $x = m$ ist $z = t = {}^1/_2$, für $x = +\infty$ ist $z = 1$, $t = \theta$, für $x = -\infty$ ist $z = \theta$, $t = 1$.

Ist die quantitative Meßkurve symmetrisch bezüglich ihrer Hauptordinate, so besteht noch folgender Zusammenhang zwischen den beiden qualitativen Meßkurven: $z_{(m+a)} = t_{(m-a)}$.

17. Zusammengesetzte qualitative Messungen.

Die Zusammensetzung der qualitativen Messungen untereinander oder mit quantitativen Messungen erfolgt genau nach den in Punkt 6 entwickelten Regeln, wonach die zusammengesetzte Meßkurve die Multiplikationskurve der einzelnen Meßkurven ist. Für die Fehlergeometrie existiert kein prinzipieller Unterschied zwischen quantitativer und qualitativer Messung.

Wird eine Größe nur qualitativ gemessen, so müssen zumindest eine positive mit einer negativen Messung zusammentreffen, damit die Meßgenauigkeit einen endlich großen Wert aufweise. Einen solchen Meßvorgang bezeichnet man als einfache Gabelbildung.

Die hiebei verwendeten Maße m_1 für die positive und m_2 für die negative Messung werden als untere und obere Gabelgrenzen, der Unterschied $m_2 - m_1 = g$ wird als Gabelweite bezeichnet. In Abbildung 6 ist die einer einfachen Gabelbildung entsprechende Zusammensetzung der Meßkurven dargestellt.

Von besonderem Interesse ist die mit einem und demselben Meßgerät erzielte Nullgabel, das ist das Eintreffen eines positiven und eines negativen Resultats bei Verwendung des gleichen Maßes m oder was gleichbedeutend ist, das Eintreffen einer Gabel von der Gabelweite Null. Die zusammengesetzte Meßkurve einer solchen Nullgabel besitzt die Gleichung

$$u = z \, . \, (1 - z) = z - z^2.$$

18. Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines bestimmten Ergebnisses der Qualitätsmessung.

In Abbildung 7 stelle Φ die gegebene Meßkurve eines Streckenendpunktes dar. Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, daß eine folgende, mit dem Maße m ausführende Qualitätsmessung ein positives Ergebnis liefern werde.

Die Kurve Ψ_+ sei die zum Maße m gehörige, positive Meßkurve. Wäre l der Wahrwert der zu messenden Strecke, dann würde die zu l gehörige Ordinate der Kurve Ψ_+ die Wahrscheinlichkeit vorstellen, bei Anwendung des Maßes m eine positive Qualitätsmessung zu erzielen. Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß l der Wahrwert sei, gleich dem Quotienten aus der Elementarfläche $y \,.\, dx$ in die Gesamtfläche F der Kurve Φ.

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten beider Ereignisse ist das Produkt $\frac{y \,.\, z \,.\, dx}{F}$. Die totale Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines positiven Ergebnisses der Qualitätsmessung ist daher

$$\frac{1}{F} \int_{-\infty}^{+\infty} z \,.\, y \,.\, dx.$$

Dieses bestimmte Integrale ist aber die Fläche der Multiplikationskurve aus der gegebenen Meßkurve Φ und der qualitativen Meßkurve Ψ_+, oder die Fläche der aus der vorhandenen und der erwarteten Messung entspringenden Meßkurve.

In analoger Weise wäre die Ableitung für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines negativen Ergebnisses der qualitativen Messung durchzuführen und es ergibt sich die allgemeine, durch den VI. Hauptsatz ausgedrückte Regel:

Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines bestimmten Ergebnisses der qualitativen Messung einer schon durch eine Meßkurve festgelegten Größe ist der Quotient der Fläche der zusammengesetzten Meßkurve in die Fläche der gegebenen Meßkurve.

Dieser Satz ist das Analogon zum II. Hauptsatz, der sich auf das Eintreten eines bestimmten Meßwertes der quantitativen Messung bezieht. Da aber bei dieser unendlich viele Möglichkeiten vorliegen, so ist die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens einer derselben unendlich klein. Bei der qualitativen Messung aber, die nur entweder ein positives oder ein negatives Ergebnis liefern kann, ist der Wahrscheinlichkeitswert für das Eintreffen eines derselben im allgemeinen von endlichem Werte.

Der VI. Hauptsatz gilt nicht nur für die Einzelmessung, sondern bestimmt auch die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen bestimmter Ergebnisse bei mehreren qualitativen Messungen, gleichgültig ob dieselben mit gleichen oder mit verschiedenen Maßen ausgeführt werden. In solchen Fällen sind sämtliche in Frage kommenden positiven und negativen Meßkurven mit der gegebenen zusammenzusetzen.

$$\int_{-\infty}^{x} \varphi(x) . dx + \int_{x}^{+\infty} \varphi(x) . dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) . dx = 1,$$

daher $z + t = 1$, $t = 1 - z$. Die Ordinaten der positiven und der negativen qualitativen Meßkurve ergänzen sich auf eins.

Ferner sind noch folgende Beziehungen beachtenswert:

$$y = \varphi(x) = \frac{dz}{dx}$$

für $x = m$ ist $z = t = 1/_2$, für $x = +\infty$ ist $z = 1$, $t = \theta$, für $x = -\infty$ ist $z = \theta$, $t = 1$.

Ist die quantitative Meßkurve symmetrisch bezüglich ihrer Hauptordinate, so besteht noch folgender Zusammenhang zwischen den beiden qualitativen Meßkurven: $z_{(m+a)} = t_{(m-a)}$.

17. Zusammengesetzte qualitative Messungen.

Die Zusammensetzung der qualitativen Messungen untereinander oder mit quantitativen Messungen erfolgt genau nach den in Punkt 6 entwickelten Regeln, wonach die zusammengesetzte Meßkurve die Multiplikationskurve der einzelnen Meßkurven ist. Für die Fehlergeometrie existiert kein prinzipieller Unterschied zwischen quantitativer und qualitativer Messung.

Wird eine Größe nur qualitativ gemessen, so müssen zumindest eine positive mit einer negativen Messung zusammentreffen, damit die Meßgenauigkeit einen endlich großen Wert aufweise. Einen solchen Meßvorgang bezeichnet man als einfache Gabelbildung.

Die hiebei verwendeten Maße m_1 für die positive und m_2 für die negative Messung werden als untere und obere Gabelgrenzen, der Unterschied $m_2 - m_1 = g$ wird als Gabelweite bezeichnet. In Abbildung 6 ist die einer einfachen Gabelbildung entsprechende Zusammensetzung der Meßkurven dargestellt.

Von besonderem Interesse ist die mit einem und demselben Meßgerät erzielte Nullgabel, das ist das Eintreffen eines positiven und eines negativen Resultats bei Verwendung des gleichen Maßes m oder was gleichbedeutend ist, das Eintreffen einer Gabel von der Gabelweite Null. Die zusammengesetzte Meßkurve einer solchen Nullgabel besitzt die Gleichung

$$u = z . (1 - z) = z - z^2.$$

18. Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines bestimmten Ergebnisses der Qualitätsmessung.

In Abbildung 7 stelle Φ die gegebene Meßkurve eines Streckenendpunktes dar. Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, daß eine folgende, mit dem Maße m ausführende Qualitätsmessung ein positives Ergebnis liefern werde.

Die Kurve Ψ_+ sei die zum Maße m gehörige, positive Meßkurve. Wäre l der Wahrwert der zu messenden Strecke, dann würde die zu l gehörige Ordinate der Kurve Ψ_+ die Wahrscheinlichkeit vorstellen, bei Anwendung des Maßes m eine positive Qualitätsmessung zu erzielen. Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit, daß l der Wahrwert sei, gleich dem Quotienten aus der Elementarfläche $y \,.\, dx$ in die Gesamtfläche F der Kurve Φ.

Die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit für das Eintreten beider Ereignisse ist das Produkt $\frac{y \,.\, z \,.\, dx}{F}$. Die totale Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines positiven Ergebnisses der Qualitätsmessung ist daher

$$\frac{1}{F}\int_{-\infty}^{+\infty} z \,.\, y \,.\, dx.$$

Dieses bestimmte Integrale ist aber die Fläche der Multiplikationskurve aus der gegebenen Meßkurve Φ und der qualitativen Meßkurve Ψ_+, oder die Fläche der aus der vorhandenen und der erwarteten Messung entspringenden Meßkurve.

In analoger Weise wäre die Ableitung für die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit eines negativen Ergebnisses der qualitativen Messung durchzuführen und es ergibt sich die allgemeine, durch den VI. Hauptsatz ausgedrückte Regel:

Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines bestimmten Ergebnisses der qualitativen Messung einer schon durch eine Meßkurve festgelegten Größe ist der Quotient der Fläche der zusammengesetzten Meßkurve in die Fläche der gegebenen Meßkurve.

Dieser Satz ist das Analogon zum II. Hauptsatz, der sich auf das Eintreten eines bestimmten Meßwertes der quantitativen Messung bezieht. Da aber bei dieser unendlich viele Möglichkeiten vorliegen, so ist die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens einer derselben unendlich klein. Bei der qualitativen Messung aber, die nur entweder ein positives oder ein negatives Ergebnis liefern kann, ist der Wahrscheinlichkeitswert für das Eintreffen eines derselben im allgemeinen von endlichem Werte.

Der VI. Hauptsatz gilt nicht nur für die Einzelmessung, sondern bestimmt auch die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen bestimmter Ergebnisse bei mehreren qualitativen Messungen, gleichgültig ob dieselben mit gleichen oder mit verschiedenen Maßen ausgeführt werden. In solchen Fällen sind sämtliche in Frage kommenden positiven und negativen Meßkurven mit der gegebenen zusammenzusetzen.

19. Die qualitative Messung als Wahrscheinlichkeitsmessung.

Wird eine Größe mehrmals qualitativ gemessen, so ist die Multiplikationskurve aus den einzelnen qualitativen Meßkurven der fehlergeometrische Ausdruck des Messungsergebnisses und es kann aus dieser Kurve, wie bei der qualitativen Messung, der Meßwert und der wahrscheinlichste Wert der gemessenen Größe ermittelt werden. Der Meßwert entspricht dem Fußpunkte der Halbierungsordinate der Kurvenfläche, der wahrscheinlichste Wert wird durch die zur Maximalordinate gehörige Abszisse bestimmt.

Um eine zusammengesetzte Qualitätsmessung in dieser Weise auszuwerten, muß die Gestalt und Lage der einzelnen Meßkurven bekannt sein. Ist dies nicht der Fall, so beschränkt sich das Ergebnis auf die Feststellung der Zahl der positiven und negativen Resultate.

Von besonderem Interesse ist hiebei der Fall, daß eine Größe mit demselben Geräte und gleichem Maße wiederholt qualitativ gemessen wird. Das Ergebnis ist eine aus p positiven und q negativen Messungen zusammengesetzte Nullgabel. Das Verhältnis der Zahl der positiven und negativen Messungen zur Gesamtzahl aller Messungen, dargestellt durch die echten Brüche $p:n$ und $q:n$, steht im Zusammenhang mit der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens positiver oder negativer Ergebnisse bei Fortsetzung der Qualitätsmessung mit demselben Maß. Die angegebenen Verhältniszahlen bedeuten den wahrscheinlichsten Wert des Verhältnisses der zu erwartenden positiven und negativen Resultate zur Gesamtzahl der Messungen.

Das unmittelbare Ergebnis einer Gruppe von Qualitätsmessungen mit gleichen Maßen ist demnach ein Wahrscheinlichkeitswert, weshalb ein solcher Messungsvorgang auch als Wahrscheinlichkeitsmessung bezeichnet werden kann.

Um die erwähnte Bedeutung des Verhältnisses $p:n$ nachzuweisen, soll die einer Nullgabel von p positiven und $q = n - p$ negativen Messungen entsprechende, zusammengesetzte Meßkurve untersucht werden. Für deren Ordinate u gilt die Gleichung

$$u = z^p\,(1-z)^q = z^p\,(1-z)^{(n-p)},$$

wobei z und $1-z$ die Ordinaten der positiven und der negativen Meßkurve vorstellen.

Die Ordinate der zusammengesetzten Meßkurve erreicht ihr Maximum bei jenem Abszissenwerte, für den der erste Differentialquotient nach x Null wird. Die Differentiation ergibt:

$$\frac{du}{dx} = p\,.\,z^{(p-1)}\,.\,(1-z)^{(n-p)} - (n-p)\,.\,z^p\,.\,(1-z)^{(n-p-1)}.$$

Dieser Ausdruck wird Null für $z = \dfrac{p}{n}$

Die zusammengesetzte Meßkurve hat daher dort ihr Maximum, wo die Ordinate der positiven Meßkurve den Wert $p:n$ erreicht.

Der zugehörige Abszissenpunkt stellt die wahrscheinlichste Lage des Endpunktes der gemessenen Größe vor.

Der wahrscheinlichsten Lage des Endpunktes gehört also das Verhältnis $p:n$ der positiven zur Gesamtzahl der Messungen an. Folglich ist dieser Bruch der wahrscheinlichste Wert des Verhältnisses der zu erwartenden positiven Messungen zur Gesamtheit der Messungen.

Diese Beziehung gilt allgemein, ohne Rücksicht auf die analytische Form des Fehlergesetzes.

VI. Anwendung der Fehlergeometrie auf Probleme der Qualitätsmessung und der allgemeinen Wahrscheinlichkeitslehre.

20. Ableitung des verallgemeinerten Laplace'schen Theorems.

Eine Strecke werde einmal quantitativ gemessen. Der Meßwert sei m. Nun werden mit diesem Maß und demselben Instrumente noch n qualitative Messungen derselben Strecke ausgeführt, von denen p ein positives und q ein negatives Ergebnis liefern. Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür ermittelt werden, daß eine folgende $(n+1)$te Qualitätsmessung ein positives Resultat liefern werde.

Vor Durchführung der $(n+1)$ten Messung ist die Endpunktslage der Strecke durch eine quantitative Messung mit dem Meßwerte m und durch p positive, q negative Qualitätsmessungen festgelegt. Allen diesen Messungen entspricht als zusammengesetzte Meßkurve die Multiplikationskurve

$$u = y \,.\, z^p \,.\, (1-z)^q$$

oder, weil

$$y = \frac{dz}{dx}, \quad u = \frac{dz}{dx} \cdot z^p \cdot (1-z)^q.$$

Die Fläche der zusammengesetzten Meßkurve ist

$$F = \int_{-\infty}^{+\infty} u \,.\, dx = \int_{z=0}^{z=1} z^p \,.\, (1-z)^q \,.\, dz.$$

Nach Durchführung der $(n+1)$ten Qualitätsmessung ergibt sich, falls diese ein positives Resultat liefert, die zusammengesetzte Meßkurve

$$u' = y \,.\, z^{p-1} \, (1-z)^q,$$

deren Fläche F' durch das bestimmte Integrale

$$F' = \int_{-\infty}^{+\infty} u' . d x = \int_{z=0}^{z=1} z^{(p+1)} . (1-z)^q . d z$$

dargestellt wird.

Nach dem VI. Hauptsatz ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit dafür, daß die $(n+1)$te Qualitätsmessung ein positives Ergebnis liefere, gleich dem Quotienten aus der Fläche F in die Fläche F', also

$$w = \frac{F'}{F} = \frac{\int_0^1 z^{(p+1)} . (1-z)^q . dz}{\int_0^1 z^p . (1-z)^q . dz}.$$

Die Ausrechnung ergibt:

$$w = \frac{p+1}{p+q+2} = \frac{p+1}{n+2}.$$

Diese Gleichung besagt folgendes: Wird eine Größe einmal quantitativ und hierauf mit dem erhaltenen Meßwerte mehrmals qualitativ gemessen, so ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer neuerlichen Qualitätsmessung ein positives Resultat zu erzielen, gleich dem Quotienten aus der um eins vermehrten Zahl der positiven Resultate geteilt durch die um zwei vermehrte Gesamtzahl der vorliegenden Qualitätsmessungen.

Dieser Satz beinhaltet das verallgemeinerte Laplace'sche Theorem. Die übliche Formulierung des Theorems ist ein Sonderfall der eben ausgesprochenen Regel.

21. Ableitung des van Loon'schen Fehlergesetzes.

Eine apriori unbekannte Größe werde mit demselben Maße n-mal qualitativ gemessen. Hiebei haben sich p positive und q negative Ergebnisse eingestellt. Das Fehlergesetz des verwendeten Meßgerätes sei als vollkommen unbekannt betrachtet.

Wie im Punkt 19 ausgeführt, ist ohne Rücksicht auf das Fehlergesetz $p:n$ der wahrscheinlichste Wert des zu erwartenden Verhältnisses der positiven Resultate zur Gesamtzahl der Messungen. Hievon wohl zu unterscheiden ist die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer folgenden Messung ein positives Ergebnis zu erzielen. Zur Berechnung derselben ist nach Punkt 18 die Kenntnis des Verlaufes der Meßkurven erforderlich.

Daß aber diese sogenannte aposteriorische Wahrscheinlichkeit vom wahrscheinlichsten Werte nicht allzusehr verschieden sein kann, geht aus der Betrachtung der Grenzfälle hervor. Enthält die Messungsserie nur negative Ergebnisse, so ist die Wahrscheinlichkeit, bei der Wiederholung der Messung ein positives

Resultat zu erzielen, gleich Null, stimmt also mit dem wahrscheinlichsten Werte überein. Dasselbe findet statt, wenn nur positive Ergebnisse vorliegen.

Es ist auch klar, daß sich der wahrscheinlichste Wert um so mehr der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit nähern muß, je größer die Zahl der Messungen ist. Ferner ist aus Gründen der Symmetrie einzusehen, daß bei gleicher Anzahl positiver und negativer Ergebnisse der aposteriorische Wert gleich dem wahrscheinlichsten, gleich einhalb sein muß.

Wenn nun das Fehlergesetz apriori unbekannt ist, so liegt die Annahme nahe, demselben eine solche Form zuzuschreiben, daß die aposteriorische Wahrscheinlichkeit nicht nur in den erwähnten Grenz- und Sonderfällen, sondern überhaupt mit dem wahrscheinlichsten Werte übereinstimmt.

Dieser Annahme kommt etwa dieselbe Bedeutung zu, wie dem Satze vom arithmetischen Mittel in der Theorie der direkten Messung. Gleichwie dieser das Gauß'sche Fehlergesetz zur notwendigen Folge hat, so wird auch durch die Gleichsetzung der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit mit dem wahrscheinlichsten Werte ein bestimmtes Fehlergesetz, das van Loon'sche, bedingt.

Zur Ableitung dieses Fehlergesetzes denke man sich aus den vorliegenden n qualitativen Messungen eine Nullgabel ausgeschieden, so daß der ganze Messungskomplex aus einer Nullgabel und $n-2$ Qualitätsmessungen besteht, wovon $p-1=s$ positiv und $q-1=t$ negativ sind.

Der Wert der aposteriorischen Wahrscheinlichkeit für die Wiederholung eines positiven Ergebnisses soll $p:n=(s-1):(r-2)$ sein. Dies ist aber dieselbe Formel, wie sie für die aposteriorische Wahrscheinlichkeit beim verallgemeinerten Laplace'schen Theorem in Punkt 20 vorkommt.

Soll dieser Wahrscheinlichkeitswert zu Recht bestehen, so muß offenbar zwischen der Nullgabelkurve und den qualitativen Meßkurven dieselbe Beziehung herrschen, wie beim verallgemeinerten Laplace'schen Theorem zwischen der quantitativen und den qualitativen Meßkurven. Es muß also die Nullgabelkurve identisch sein mit der quantitativen Meßkurve oder mit der Differentialkurve der positiven, qualitativen Meßkurve.

Werden die Ordinaten der letzteren mit z, die der Nullgabelkurve mit u bezeichnet, so besteht die Gleichung

$$u = z.(1-z),$$

welche gleichbedeutend sein soll mit dem Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ der positiven Meßkurve. Man hat somit zur Bestimmung des fraglichen Fehlergesetzes die Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dx} = z.(1-z).$$

Ihre Auflösung ergibt zunächst die Gleichung der positiven qualitativen Meßkurve:

$$z = \frac{e^{hx}}{1+e^{hx}} \quad (h \text{ ist eine Integrationskonstante}).$$

Die Differentiation liefert die Gleichung der quantitativen Meßkurve:

$$y = \frac{dz}{dx} = \frac{h \cdot e^{hx}}{(1+e^{hx})^2}.$$

Dies ist der analytische Ausdruck des van Loon'schen Fehlergesetzes, welches dem Gauß'schen Gesetz ähnlich ist und infolge seiner Integrierbarkeit besonders für Aufgaben aus der Theorie der Qualitätsmessungen brauchbar ist. Die grundlegende Abhandlung über dieses Fehlergesetz wurde vom Urheber veröffentlicht in den »Mitteilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens«, Wien 1914.

22. Das Gesetz des mittelsten Wertes.

Nicht immer kann oder will man den einer mehrfachen quantitativen Messung entsprechenden Meßwert nach dem Gesetze des arithmetischen Mittels berechnen. Es kommen Fälle vor, in denen es bequemer oder auch notwendig ist, den mittelsten Wert des Meßergebnisses als den Meßwert der zusammengesetzten Messung gelten zu lassen.

Wenn eine ungerade Zahl $n = 2s+1$ gleich genauer, quantitativer Messungen vorliegt, deren einzelne Meßwerte nach der Größe geordnet $m_1, m_2, \ldots m_n$, sein mögen, so ist der Meßwert m_{s+1} der mittelste Wert. Es handelt sich nun darum, das Fehlergesetz dieses mittelsten Wertes aufzusuchen oder mit anderen Worten, die Wahrscheinlichkeitskurve für die Lage des Endpunktes der Strecke zu bestimmen, wenn der mittelste Wert einer Messungsserie bekannt ist.

Bei einer nach dem Prinzipe des mittelsten Wertes durchgeführten Messung wird nur der mittelste Wert als bekannt vorausgesetzt. Dieser ist also bestimmt durch eine quantitative Messung und durch die übrigen $2s$ qualitativen Messungen, von denen s mit positivem und s mit negativem Resultat ausgeführt wurden. Die diesem Messungskomplexe entsprechende, zusammengesetzte Meßkurve ist der geometrische Ausdruck des Fehlergesetzes des mittelsten Wertes.

Die zusammengesetzte Meßkurve aller n-Messungen ist die Multiplikationskurve aus den s positiven, den s negativen qualitativen und der quantitativen Meßkurve. Bezeichnet man die Ordinaten der positiven Meßkurven mit z, so ist die zugehörige Ordinate der negativen Meßkurve $1-z$ und die der quantitativen Meßkurve $\frac{dz}{dx}$.

Für die Ordinaten u der zusammengesetzten Meßkurve besteht somit die Gleichung

$$u = z^s . (1-z)^s \cdot \frac{dz}{dx},$$

welche das Fehlergesetz des mittelsten Wertes darstellt.

Die Entwicklung der obigen Funktion und Integration ergibt den Ausdruck für die Kurvenfläche

$$F = \int u . dx = \frac{z^{s+1}}{s+1} - s \cdot \frac{z^{s+2}}{s+2} + \binom{s}{2} \frac{z^{s+3}}{s+3}$$

welcher die Kurvenfläche als Funktion der Ordinaten der positiven Meßkurve zum Ausdruck bringt.

Die Gesamtfläche ergibt sich durch Einsetzen der Integrationsgrenzen $z = 0$ (entsprechend $x = -\infty$) und $z = 1$ (entsprechend $x = +\infty$).

Für bestimmte Werte von n und s ergeben sich folgende Ausdrücke für die Kurvenflächen:

$$n = 3,\ s = 1 \quad F = \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3},\ F_0^1 = \frac{1}{6},$$

$$n = 5,\ s = 2 \cdot \quad F = \frac{z^3}{3} - 2 \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5},\ F_0^1 = \frac{1}{30},$$

$$n = 7,\ s = 3: \quad F = \frac{z^4}{4} - 3 \cdot \frac{z^5}{5} + 3 \cdot \frac{z^6}{6} - \frac{z^7}{7},\ F_0^1 = \frac{1}{140},$$

usw.

Um jene Ordinaten der positiven Meßkurve zu finden, die den 50prozentigen Fehlern der Messung entsprechen, sind die Gleichungen

$$\int_0^{z_{w_1}} u . dx = \frac{3}{4} F_0^1; \quad \int_0^{z_{w_2}} u . dx = \frac{1}{4} F_0^1$$

nach z_{w_1} und z_{w_2} zu lösen. Zwischen diesen beiden Größen besteht übrigens die einfache Beziehung $z_{w_2} = 1 - z_{w_1}$.

Den so berechneten Werten von z_{w_1} und z_{w_2} entsprechen bestimmte Abszissenwerte, deren Abstände vom mittelsten Wert die gesuchten 50 prozentigen Messungsfehler bedeuten. Sie sind gleich den $100 . (z_{w_1} - z_{w_2})$-prozentigen Fehlern der quantitativen Einzelmessung.

Liegt eine gerade Anzahl von Messungen vor, so befindet sich der mittelste Wert zwischen den beiden mittleren Meßwerten. Mit Bezug auf den mittelsten Wert sind von den $n = 2s$-Messungen — insofern der numerische Meßwert derselben nicht in Rechnung gezogen wird — s als positive und s als negative Qualitätsmessungen zu betrachten. Das Fehlergesetz des mittelsten Wertes wird demnach in diesem Falle dargestellt durch die Multiplikationskurve der s positiven und s negativen, qualitativen Meßkurven und wird dargestellt durch die Gleichung

$$u = z^s (1 - z)^s.$$

Die Untersuchung dieser Fehlerfunktion ist nur unter Annahme eines konkreten Fehlergesetzes der quantitativen Einzelmessung möglich. Für das Gauß'sche Gesetz treten hiebei Schwierigkeiten auf, weil dessen qualitative Meßkurve in geschlossener Form nicht darstellbar ist. Bei Zugrundelegung des van Loon'schen Gesetzes kann hingegen das Problem auf die Gesetze des mittelsten Wertes bei ungerader Meßzahl zurückgeführt werden. Bei diesem Fehlergesetz ist die Nullgabel gleichbedeutend mit der einmaligen quantitativen Messung. Wenn nun s positive und ebenso viele negative Qualitätsmessungen vorliegen, so kann die mittelste dieser s Nullgabeln als quantitative Einzelmessung angesehen werden, wodurch der ganze Messungskomplex auf eine quantitative und je $(s-1)$ positive und negative Qualitätsmessungen zurückgeführt wird.

Pilsen, Februar 1927.

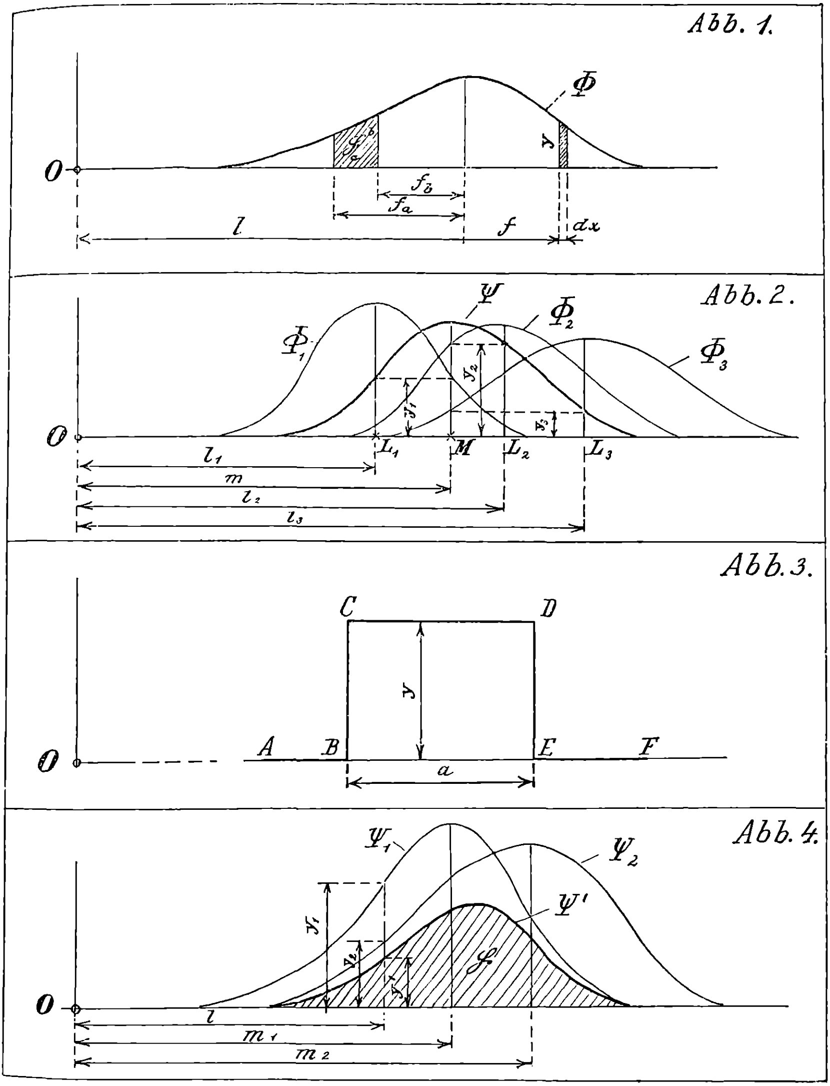
Abb. 1.
O
Φ
y
l
f
f_a
f_b
dx
Abb. 2.
Ψ
$Φ_1$
$Φ_2$
$Φ_3$
O
y_1
y_2
y_3
L_1
M
L_2
L_3
l_1
m
l_2
l_3
Abb. 3.
C
D
y
O
A
B
E
F
a
Abb. 4.
$Ψ_1$
$Ψ_2$
Ψ'
y_1
y_2
y'
O
l
m_1
m_2

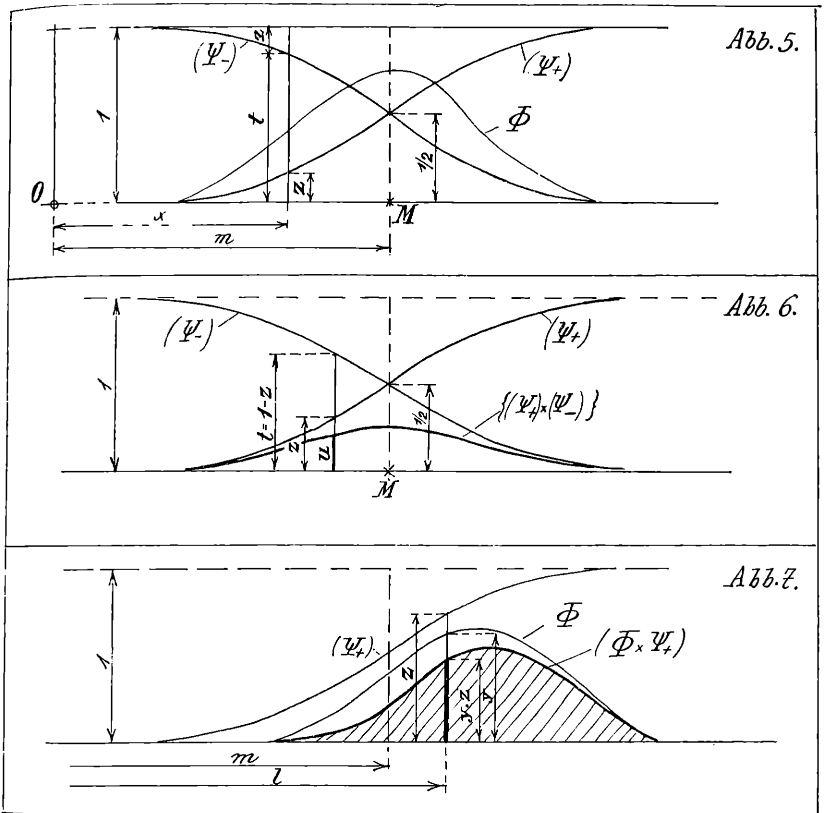
Abb. 5.
(Ψ-)
(Ψ+)
Φ
z
t
1
1/2
0
x
m
M
Abb. 6.
(Ψ-)
(Ψ+)
{(Ψ+)×(Ψ-)}
t=1-z
z
u
1
1/2
M
Abb. 7.
Φ
(Φ × Ψ+)
(Ψ+)
z
y·z
y
1
m
l