Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über die Krümmungslinien der Monge'schen Flächen

Von

Adalbert Duschek in Wien

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Mai 1927)

Vor einigen Jahren hat Emil Müller bemerkt, daß auf den von ihm so genannten C-Flächen,[1] den reellen Seitenstücken der Monge'schen Flächen, neben der einen, von den Erzeugenden gebildeten Schar stets noch eine isolierte Pseudokrümmungslinie existiert, und hervorgehoben, daß ein analoger Satz auch für die (gewöhnlichen) Krümmungslinien der Monge'schen Flächen gelten muß. Es ist recht verwunderlich, daß diese Tatsache bis heute übersehen wurde, wo doch die Monge'schen Flächen die Aufmerksamkeit vieler Geometer auf sich gezogen haben.[2] Ich habe nun die Sache näher untersucht und Emil Müllers Behauptung durchaus bestätigt gefunden.

Es gilt nämlich folgender Satz:

Alle Monge'schen Flächen besitzen neben der durch die isotropen Erzeugenden gebildeten Schar von Krümmungslinien noch eine weitere isolierte, d. h. in dieser Schar nicht enthaltene Krümmungslinie $\mathfrak{C}$. Bei den Monge'schen Flächen konstanter Krümmung, also bei den Serret'schen Flächen, und nur bei diesen, ist $\mathfrak{C}$ eine uneigentliche Kurve, nämlich der absolute Kegelschnitt. $\mathfrak{C}$ ist dann und nur dann eine Gerade, und zwar eine isotrope, wenn die Zentrakurve der Fläche in einer isotropen Ebene liegt.

---

[1] Zyklographische Abbildung von Flächen und die Geometrie von Kurvenscharen in der Ebene. Sitzungsber. Wien IIa, *129* (1920), p. 377. Es handelt sich um eine Pseudogeometrie, in der das absolute Gebilde jener reelle uneigentliche Kegelschnitt ist, der von allen zur Grundrißebene unter 45° geneigten Geraden, den pseudoisotropen Geraden, getroffen wird. Die Pseudokugeln sind Drehhyperboloide mit lotrechter Achse, deren Asymptotenkegel einen Achsenwinkel von 45° hat; die C-Flächen sind Regelflächen mit pseudoisotropen Erzeugenden oder, was dasselbe ist, Hüllflächen von Scharen von Pseudokugeln, wobei je zwei benachbarte Pseudokugeln einander berühren usw.

[2] Es sei nur die ausführliche Arbeit von L. Berwald: Über Flächen mit einer einzigen Schar zueinander windschiefer Minimalgeraden (Sitzungsber. München, math.-naturw. Klasse, 1913, p. 143 bis 211) erwähnt, wo sich auch zahlreiche Literaturnachweise finden.

Es sei in Vektorform $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ die Parameterdarstellung einer Monge'schen Fläche. Die Parameter seien so gewählt, daß die Kurven $u =$ konst. die isotropen Erzeugenden sind. Dann ist

$$\mathfrak{x}_v^2 = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_{vv} = 0;$$

letztere Gleichung ist an die stets erfüllbare Bedingung geknüpft, daß v in der Flächendarstellung nur linear vorkommt. Sind E, F, G und L, M, N die Koeffizienten der ersten und zweiten Grundform, so ist $G = N = O$ und die Formen lauten:[1]

$$\begin{aligned} ds^2 &= (E\,du + 2\,F\,dv)\,du, \\ (L\,du &+ 2\,M\,dv)\,du = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien wird

$$(EM - FL)\,du^2 = 0 \tag{2}$$

und liefert zunächst natürlich die Schar der isotropen Erzeugenden $u =$ konst. Falls aber $EM - FL$ nicht von v unabhängig ist, was wir zunächst ausschließen wollen, so gibt

$$EM - FL = 0 \tag{3}$$

eine Relation zwischen u und v, also eine Kurve auf $(\mathfrak{x})$, die der Gleichung (2) genügt und somit eine Krümmungslinie ist. Die Außerachtlassung dieser Tatsache dürfte wohl die Ursache sein, daß bisher stets die isotropen Erzeugenden für die einzigen Krümmungslinien der Monge'schen gehalten wurden.

Um den eben ausgeschlossenen Fall zu untersuchen, wo

$$(EM - FL)_v = 0$$

ist, machen wir noch die zweite Schar von isotropen Kurven auf $(\mathfrak{x})$ zu Parameterlinien $v =$ konst., so daß auch noch $E = 0$ ist. Aus $\mathfrak{x}_v^2 = 0$ folgt durch Differentiation nach u

$$\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uv} = 0$$

und wegen

$$F = \mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_{vv} = 0$$

erhält man

$$F_v = \mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_{vv} + \mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{x}_v = 0;$$

---

[1] Die Flächen, in deren sämtlichen Punkten die beiden Grundformen eine gemeinsame Wurzel haben ($G = N = 0$ bei geeigneter Wahl der Parameter), sind mit den Monge'schen Flächen identisch. Vgl. Scheffers, Einführung in die Theorie der Flächen, 2. Aufl., p. 131, Satz 12.

in die Gleichungen von Mainardi-Codazzi eingesetzt, gibt das

$$L_v - M_u = -\frac{F_u}{F} M$$

oder

$$F L_v = F M_u - F_u M$$

und

$$M_v = F_v = 0;$$

für den Hauptkrümmungsradius $R = \frac{F}{M}$ folgt wegen

$$(EM - FL)_v = -(\dot{F}L)_v = -FL_v = 0,$$

schließlich

$$R_v = \left(\frac{F}{M}\right)_v = 0,$$

$$R_u = \left(\frac{F}{M}\right)_u = \frac{F_u M - F M_u}{M^2} = -\frac{F L_v}{M^2} = 0,$$

d. h. R ist konstant; es handelt sich also, wenn wir von den Kugeln absehen, um eine Serret'sche Fläche. Daß bei diesen der absolute Kegelschnitt eine Krümmungslinie ist, kann man leicht folgendermaßen sehen. Bekanntlich[1] ist jede Serret'sche Fläche Hüllfläche einer Schar von Kugeln mit festem Halbmesser, deren Mittelpunkte auf einer isotropen Raumkurve, der Zentrakurve der Fläche, liegen. Dann kommt man von einer Kugel K zur benachbarten K' durch eine infinitesimale Parallelverschiebung von K längs einer (isotropen) Erzeugenden. K und K' berühren einander also im uneigentlichen Punkt dieser Erzeugenden, d. h. in einem Punkt des absoluten Kegelschnittes.

Ist die Zentrakurve $\mathfrak{Z}$ nicht isotrop, so läßt sich die Existenz der Krümmungslinie $\mathfrak{C}$ ebenfalls leicht rein geometrisch nachweisen. Die Monge'sche Fläche ist dann Hüllfläche von ∞^1 Kugeln mit den Mittelpunkten auf $\mathfrak{Z}$, wobei sich wie oben je zwei benachbarte Kugeln berühren. Der Ort dieser Berührungspunkte ist eine Filarevolvente $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{Z}$; die Flächennormalen längs $\mathfrak{C}$ bilden eine Torse mit der Gratlinie $\mathfrak{Z}$, d. h. $\mathfrak{Z}$ ist in der Tat Zentrakurve und $\mathfrak{C}$ die isolierte Krümmungslinie der Fläche. Ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u)$ die Parameterdarstellung von $\mathfrak{Z}$, bezogen auf die Bogenlänge u und sind $\mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}$, beziehungsweise Tangenten-, Hauptnormalen- und Binormalenvektor von $(\mathfrak{y})$, so ist

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} - u\,\mathfrak{t} + v\,(\mathfrak{h} + i\,\mathfrak{b})$$

bei willkürlich wählbarem Vorzeichen von $i = \sqrt{-1}$ eine Darstellung

[1] Scheffers, a. a. O., p. 294, Satz 114.

der beiden Monge'schen Flächen mit der Zentrakurve $\mathfrak{Z}$.[1] Man findet

$$E = v^2 \varkappa^2 + u^2 \varkappa^2 + 2 i u v \varkappa \tau,$$

$$F = - u \varkappa, \quad G = 0,$$

$$L = 2 u v \varkappa^2 \tau - i \varkappa^3 (u^2 + v^2) - i v \varkappa^2,$$

$$M = i u \varkappa^2, \quad N = 0$$

und die Differentialgleichung der Krümmungslinien wird

$$- i u v \varkappa^3 \, d u^2 = 0,$$

wo $\varkappa$ die Krümmung von $(\mathfrak{y})$ ist. Für $v = 0$ ergibt sich die Filarevolvente $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} - u \mathfrak{t}$$

von $\mathfrak{Z}$, in der sich die beiden Flächen durchsetzen.

Bei den Monge'schen Flächen, deren Zentrakurven in isotropen Ebenen liegen, und nur bei diesen sind die Filarevolventen, d. h. die isolierten Krümmungslinien (isotrope) Gerade.[2] Zu einer gegebenen Zentrakurve gehört nur eine einzige Monge'sche Fläche.

Selbstverständlich gelten in der Müller'schen Pseudogeometrie durchaus analoge Sätze für die C-Flächen.

Ich gebe zum Schluß noch die Bestimmung der isolierten Krümmungslinien für die von L. Beerwald a. a. O. angegebenen Darstellungen der Monge'schen Flächen:

1. Fläche erster Art

$$x = \xi_0 + R \left(u + i \frac{1 - u^2}{2} v \right),$$

$$y = \eta_0 + R \left(- i u - \frac{1 + u^2}{2} v \right),$$

$$z = \zeta_0 + R (-1 + i u v).$$

Die Koeffizienten der Grundformen sind

$$E = - R^2 v^2 + R'^2, \qquad F = i R^2, \; G = 0,$$

$$L = \frac{1}{R} (2 R'^2 - R R'' - i R R' v - R^2 v^2), \; M = i R, \; N = 0.$$

[1] Wegen der Willkürlichkeit des Anfangspunktes $u = 0$ der Bogenlänge gehören zu einer gegebenen Zentrakurve zwei Scharen von Monge'schen Flächen.

[2] Scheffers, a. a. O., p. 290.

Der Hauptkrümmungshalbmesser $R = R(u)$ ist eine willkürliche analytische Funktion. Für $R =$ konst. ergeben sich die Kugeln. Man erhält

$$EM - FL = i R (- R'^2 + R R'' + i R R' v);$$

gleich Null gesetzt liefert das die isolierte Krümmungslinie

$$v = - i \frac{R'^2 - R R''}{R R'}. \tag{4}$$

Die Zentrakurve ist

$$x_1 = \xi_0 + \frac{1 - u^2}{2} R',$$

$$y_1 = \eta_0 + i \frac{1 + u^2}{2} R',$$

$$z_1 = \zeta_0 + u R';$$

für sie ist

$$x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2 = R'^2$$

und ihre Filarevolvente

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1'}{R'} R,$$

$$y_2 = y_1 - \frac{y_1'}{R'} R,$$

$$z_2 = z_1 - \frac{z_1'}{R'} R$$

ist mit der isolierten Krümmungslinie identisch, wie sich durch Einsetzen von (4) in die Flächendarstellung unmittelbar ergibt.

2. Fläche zweiter Art:

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{y} + R (v \mathfrak{y}' + i \mathfrak{y}'').$$

Der Hauptkrümmungsradius $R = R(u)$ ist eine willkürliche analytische Funktion, $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(u)$ eine isotrope Kurve, bezogen auf Study's natürlichen Parameter u, also

$$\mathfrak{y}'^2 = 0, \quad \mathfrak{y}' \mathfrak{y}'' = 0, \quad \mathfrak{y}''^2 = -1, \quad (\mathfrak{y}' \mathfrak{y}'' \mathfrak{y}''') = -1, \quad \mathfrak{y}'''^2 = J.$$

Ferner wird

$$E = - R^2 (v^2 + J) + 2 i R + R'^2, \qquad F = i R^2, \; G = 0,$$

$$L = \frac{1}{R} (2 R'^2 - R R'' + i R - i R R' v - R^2 v^2 - R^2 J),$$

$$M = i R, \quad N = 0,$$

also

$$EM - FL = iR(-R'^2 + iR + RR'' + iRR'v). \tag{5}$$

Für die isolierte Krümmungslinie wird

$$v = -i\left(\frac{R'}{R} - \frac{i}{R'} - \frac{R''}{R'}\right). \tag{6}$$

Die Zentrakurve ist

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{y} - iR'\mathfrak{y}', \quad \mathfrak{z}'^2 = R'^2$$

und ihre Filarevolvente

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{z} - \frac{R}{R'}\mathfrak{z}' = \mathfrak{y} - iR\left(\frac{R'}{R} - \frac{i}{R'} - \frac{R''}{R'}\right)\mathfrak{y}' + iR\mathfrak{y}''$$

ist mit der isolierten Krümmungslinie identisch, wie sich durch Einsetzen von (6) in die Flächendarstellung unmittelbar ergibt. Für $R =$ konst. erhält man die Serret'schen Flächen; (5) ist dann unabhängig von v.