

# Über Flächen und Kurven gleicher Parallaxe bei stereophotogrammetrischen Aufnahmen

Von

Franz Wilhelm Palm in Wien

(Mit 2 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 27. Oktober 1927)

Für stereophotogrammetrische Aufnahmen sind jene Flächen und Kurven von Interesse, deren Punkte auf den beiden photographischen Platten Bildpunkte ergeben, für welche die Differenzen der gleichnamigen Koordinaten, die wir Parallaxen nennen, konstant sind. H. Dock<sup>1</sup> hat diese Flächen für den Fall wagrechter Hauptachsen, R. Heinz<sup>2</sup> für den Fall windschiefer Hauptachsen nach den Methoden der analytischen Geometrie untersucht. C. Pulfrich<sup>3</sup> hat eine Vorrichtung zur Demonstration der Kurven gleicher Parallaxe beschrieben. In der vorliegenden Arbeit wird das Problem nach den Methoden der projektiven Geometrie in vollster Allgemeinheit behandelt.

## Flächen gleicher erster Parallaxe.

### A. Allgemeine Aufnahmen.

Wir bezeichnen (Fig. 1) die Projektionszentren (optischen Mittelpunkte der Linsen) mit  $O_1, O_2$ , die Bildebenen (photographischen Platten) mit  $\Pi_1, \Pi_2$ , ihre Hauptpunkte mit  $H_1, H_2$ , ihre Mittellinien mit  $h_1, v_1, h_2, v_2$ . Wir wählen die Mittellinien der Platten als Koordinatenachsen. Wir bezeichnen die Zentralrisse eines Raumpunktes  $P$  mit  $P'$  und  $P''$ . Hat  $P'$  die rechtwinkeligen Koordinaten  $\xi_1, \eta_1$ ,  $P''$  die Koordinaten  $\xi_2, \eta_2$ , dann bezeichnen wir die Differenz  $\xi_1 - \xi_2 = \rho$

<sup>1</sup> Hans Dock, Studie über die Herleitung der Abstandsgleichungen für stereophotogrammetrische Aufnahmen mit wagrechten Hauptachsen. Internationales Archiv für Photogrammetrie, Bd. 5, Heft 3, 1917.

Hans Dock, Studie über Form und Lage der Linien gleicher Parallaxe bei stereophotogrammetrischen Aufnahmen mit wagrechten Hauptachsen. Internationales Archiv für Photogrammetrie, Bd. 5, Heft 4, 1919.

Rudolf Heinz, Die Fläche gleicher Parallaxe bei sich kreuzenden photogrammetrischen Hauptachsen. Internationales Archiv für Photogrammetrie, Bd. 5, Heft 4, 1919.

Carl Pulfrich, Über eine Vorrichtung zur Demonstration der Kurven gleicher Parallaxe. Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1912.

Carl Pulfrich, Neue stereoskopische Methoden und Apparate, XXVI. Abschnitt. Verlag Springer, Berlin 1912.

als erste Parallaxe, die Differenz  $y_1 - y_2 = q$  als zweite Parallaxe. Wir bezeichnen die Geraden, welche durch  $O_1$  gehen

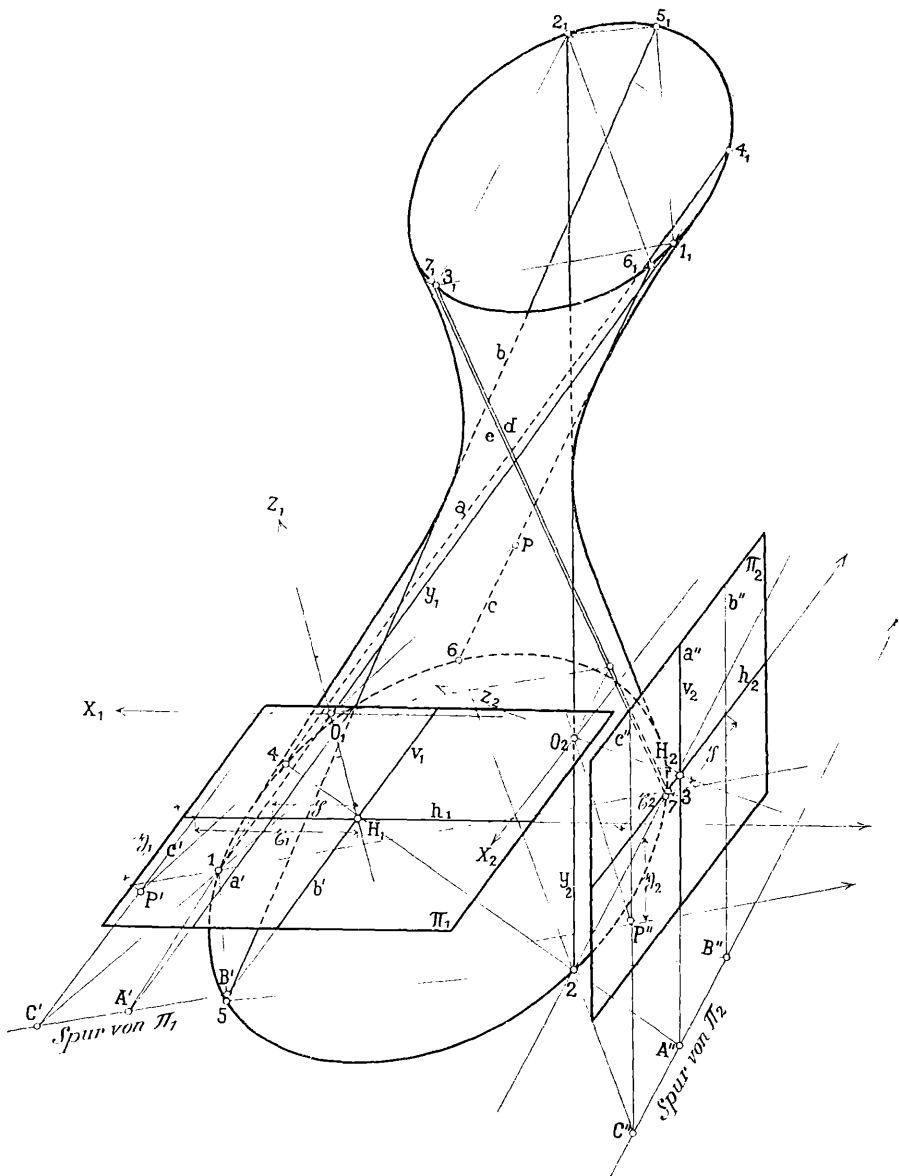


Fig. 1.

und zu  $h_1, v_1$  parallel sind, mit  $x_1, y_1$ , die Hauptachse  $H_1 O_1$  mit  $z_1$  entsprechend die Parallelen durch  $O_2$  zu  $h_2, v_2$  mit  $x_2, y_2$ , die Hauptachse  $H_2 O_2$  mit  $z_2$ . Wir setzen voraus, daß sowohl  $x_1, x_2$  als auch

$y_1, y_2$  und  $z_1, z_2$  windschief sind. In Fig. 1 werden von den Geraden, Ebenen und von der Fläche gleicher Parallaxe die Spurelemente in zwei parallelen Ebenen dargestellt.

Wir ordnen den Parallelen zur Vertikallinie der ersten Platte  $a', b', c'$ , mit den Gleichungen

$$\xi_1 = a_1, \quad \xi_1 = b_1, \quad \xi_1 = c_1,$$

die Parallelen zur Vertikallinie der zweiten Platte  $a'', b'', c''$ , mit den Gleichungen

$$\xi_2 = a_2, \quad \xi_2 = b_2, \quad \xi_2 = c_2,$$

so zu, daß

$$a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = \dots = p$$

ist. In Fig. 1 sind die Geraden  $a', b', a'', b''$  in besonderer Weise angenommen. Ihre Gleichungen sind:

$$\xi_1 = p, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = 0, \quad \xi_2 = -p.$$

Das Parallelstrahlbüschel der Geraden  $a', b', c'$ , ist kongruent und daher projektiv mit dem Parallelstrahlbüschel der Geraden  $a'', b'', c''$ . Projizieren wir das Strahlbüschel  $a', b', c'$ , aus  $O_1$ , so erhalten wir ein Ebenenbüschel  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , mit der Achse  $y_1$ , projizieren wir das Strahlbüschel  $a'', b'', c''$ , aus  $O_2$ , so erhalten wir ein Ebenenbüschel  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ , mit der Achse  $y_2$ . Die Spuren der Ebenen  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$  in den parallelen Begrenzungsebenen sind:

$$A' 1 4 \parallel 1_1 4_1, \quad A'' 2 4 \parallel 2_1 4_1,$$

$$1 B' 5 \parallel 1_1 5_1, \quad B'' 2 5 \parallel 2_1 5_1,$$

$$C' 1 6 \parallel 1_1 6_1, \quad C'' 2 6 \parallel 2_1 6_1.$$

Die beiden Ebenenbüschel sind, weil sie zu den projektiven Strahlbüscheln perspektiv sind, projektiv. Die Schnittgeraden  $a, b, c$ , entsprechender Ebenen  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ , gehören dem geometrischen Ort der Raumpunkte an, deren Bildpunkte dieselbe erste Parallaxe  $p$  haben. Das Erzeugnis der beiden projektiven Ebenenbüschel bezeichnen wir als Fläche gleicher erster Parallaxe.

Wir erhalten somit:

*I. Die Fläche gleicher erster Parallaxe ist eine Regelschar zweiter Ordnung, deren Leitschar die Strahlen  $y_1, y_2$  enthält.<sup>1</sup>*

Wie man aus Fig. 1 unmittelbar erkennt, schneidet  $\Pi_1$  die Fläche  $\Phi$ . Die Schnittkurve ist in der Figur nicht eingezeichnet. Wählen wir insbesondere  $p = 0$ , so erhalten wir den Ort aller

<sup>1</sup> R. Heinz hat der zitierten Arbeit die Gleichung dieser Fläche aufgestellt.

Punkte, die sich parallaxenfrei abbilden, d. h. deren Bildpunkte gleiche Abszissen haben. In diesem Fall sind die die Fläche erzeugenden Ebenenbüschel mit den Achsen  $y_1, y_2$  kongruent, daher gilt:

II. Die Raumpunkte, die sich parallaxenfrei abbilden, erfüllen ein orthogonales Hyperboloid durch  $y_1, y_2$ .

Alle  $\infty^1$  Flächen gleicher erster Parallaxe liegen in dem hyperbolischen Strahlnetz mit den Brennlinien  $y_1, y_2$ . In einem hyperbolischen Strahlnetz liegen aber  $\infty^3$  Regelflächen zweiter Ordnung. Um die Flächen gleicher erster Parallaxe näher zu charakterisieren, betrachten wir ihr Verhalten zur unendlich fernen Ebene. In der nur schematischen Fig. 2 bedeuten  $i$  den absoluten Kegelschnitt,  $X_{1u} Y_{1u} Z_{1u}, X_{2u} Y_{2u} Z_{2u}$  die unendlich fernen Punkte von  $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$ .<sup>1</sup> Da  $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$  rechtwinklige Dreibeine sind, bilden ihre unendlich fernen Punkte Poldreiecke des absoluten Kegelschnitts. Der unendlich ferne Kegelschnitt  $k_u$  der zur Parallaxe  $p$  gehörigen Fläche  $\Phi$  geht durch die Punkte  $Y_{1u}, Y_{2u}$  und durch den Schnittpunkt

$$D_u = [X_{1u} Y_{1u}, X_{2u} Y_{2u}],$$

weil für einen endlichen Wert von  $p$  die Verschwindungsebenen  $x_1 y_1, x_2 y_2$  einander entsprechen. Zur Bestimmung von zwei weiteren Punkten von  $k_u$  wählen wir auf der ersten Platte die Punkte

$$A_1 (x_1 = p, y_1 = 0), \quad B_1 (x_1 = 0, y_1 = 0),$$

auf der zweiten Platte die Punkte

$$A_2 (x_2 = 0, y_2 = 0), \quad B_2 (x_2 = -p, y_2 = 0)$$

und ordnen die Ebenen  $y_1 A_1, y_2 A_2$ , respektive  $y_1 B_1, y_2 B_2$  einander zu. Dies entspricht der Annahme der Geraden  $a', b', a'', b''$  der Fig. 1. Wegen der Gleichheit der Winkel

$$\sphericalangle A_1 O_1 B_1 = \sphericalangle A_2 O_2 B_2 = \varphi$$

bestimmen die unendlich fernen Punkte ihrer Schenkelpaare mit dem absoluten Kegelschnitt gleiche Doppelverhältnisse. Sind  $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}'_1$  die absoluten Punkte der Ebene  $x_1 z_1$ ,  $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}'_2$  die absoluten Punkte der Ebene  $x_2 z_2$ ,  $A_{1u} B_{1u}, A_{2u} B_{2u}$  die unendlich fernen Punkte der Schenkel  $O_1 A_1, O_1 B_1, O_2 A_2, O_2 B_2$ , so gilt

$$(A_{1u} B_{1u} \mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}'_1) = (A_{2u} B_{2u} \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}'_2) = \delta.$$

Der Zusammenhang zwischen dem Winkel  $\varphi$  und dem Doppelverhältnis  $\delta$  ist durch die Laguerre'sche Formel<sup>2</sup>

<sup>1</sup> In Fig. 2 ist der Zeiger  $u$  bei allen Spurelementen der unendlich fernen Ebene weggelassen.

E. Laguerre, Nouv. math. 12 (1853), p. 57.

$$\varphi = -\frac{1}{2i} \log \operatorname{nat} \delta$$

gegeben.

Der Schnittpunkt

$$A_u = (Y_{1u} A_{1u}, Y_{2u} A_{2u})$$

ist der unendlich ferne Punkt der Erzeugenden

$$a = (y_1 A_1, y_2 A_2),$$

der Schnittpunkt

$$B_u = (Y_{1u} B_{1u}, Y_{2u} B_{2u})$$

ist der unendlich ferne Punkt der Erzeugenden

$$b = (y_1 B_1, y_2 B_2).$$

Damit sind fünf Punkte  $Y_{1u}, Y_{2u}, D_u, A_u, B_u$  von  $k_u$  gegeben.

Bestimmen wir in analoger Weise die unendlich fernen Kegelschnitte  $k'_u, k''_u, k'''_u \dots$  der den Werten  $p', p'', p''' \dots$  entsprechenden Flächen  $\Phi', \Phi'', \Phi''' \dots$ . Alle Kegelschnitte gehen durch  $Y_{1u}, Y_{2u}$  und  $D_u$ . Die Reihe der Punkte  $A_u, A'_u, A''_u \dots$  auf  $Y_{2u} Z_{2u}$  ist perspektiv zur Reihe der Punkte  $A_{1u}, A'_{1u}, A''_{1u} \dots$  auf  $X_{1u} Z_{1u}$ , ebenso ist die Reihe der Punkte  $B_u, B'_u, B''_u \dots$  auf  $Y_{1u} Z_{1u}$  perspektiv zu der Reihe der Punkte  $B_{2u}, B'_{2u}, B''_{2u} \dots$  auf  $X_{2u} Z_{2u}$ . Aus der Projektivität der Reihen  $(A_{1u}), (B_{2u})$  folgt die Projektivität der Reihen  $(A_u), (B_u)$ . Da im Schnittpunkt ihrer Träger  $Y_{1u} Z_{1u}$  und  $Y_{2u} Z_{2u}$ , der der Parallaxe  $p = 0$  entspricht, die Punkte  $A_u, B_u$  vereinigt liegen, sind die Punktreihen  $A_u, A'_u, A''_u \dots$  und  $B_u, B'_u, B''_u \dots$  perspektiv mit dem Zentrum  $S_1$ . Daraus folgt, daß alle Kegelschnitte  $k_u, k'_u, k''_u \dots$  im Punkt  $D_u$  dieselbe Tangente  $t_1$  haben. Die Konstruktion der Tangente  $t_1$  mittels des Pascal'schen Satzes ist in Fig. 2 angegeben. Die unendlich fernen Kegelschnitte der Flächen gleicher Parallaxe bilden also ein Kegelschnittbüschel, bei welchem zwei Grundpunkte unendlich nahe zusammengerückt sind. Die Flächen enthalten nicht nur den Netzstrahl  $d$ , d. i. die Schnittgerade der Verschwindungsebenen, sondern auch den unendlich benachbarten Strahl  $e$  (Fig. 1). Wir können sagen:

**III. Die Flächen gleicher Parallaxe  $p$  bilden ein singuläres Büschel von Regelflächen zweiter Ordnung. Die Grundkurve des Büschels ist ein windschiefes Vierseit, von welchem zwei Gegenseiten die Brennlinien  $y_1, y_2$  des hyperbolischen Strahlnetzes sind, während die zwei anderen Gegenseiten zwei unendlich benachbarte Netzstrahlen  $d, e$  sind, d. h. die  $\infty^1$  Flächen berühren einander längs der Schnittgeraden  $d$  der beiden Verschwindungsebenen.**

Wir können den Satz III einfach auch so beweisen: Legen wir die Platten  $\Pi_1, \Pi_2$  übereinander, so schneiden die beiden kongruenten

Parallelstrahlbüschel  $a', b', c' \dots$  und  $a'', b'', c''$  die horizontale Mittel-  
linie in gleichlaufenden kongruenten Punktreihen, die auseinander  
durch eine Verschiebung um  $p$  entstehen. Fassen wir die gleich-  
laufenden kongruenten Punktreihen als Grenzfall gleichlaufender  
ähnlicher Punktreihen auf, so rückt der zweite, vom unendlich  
fernen Punkt verschiedene Doppelpunkt immer näher an diesen

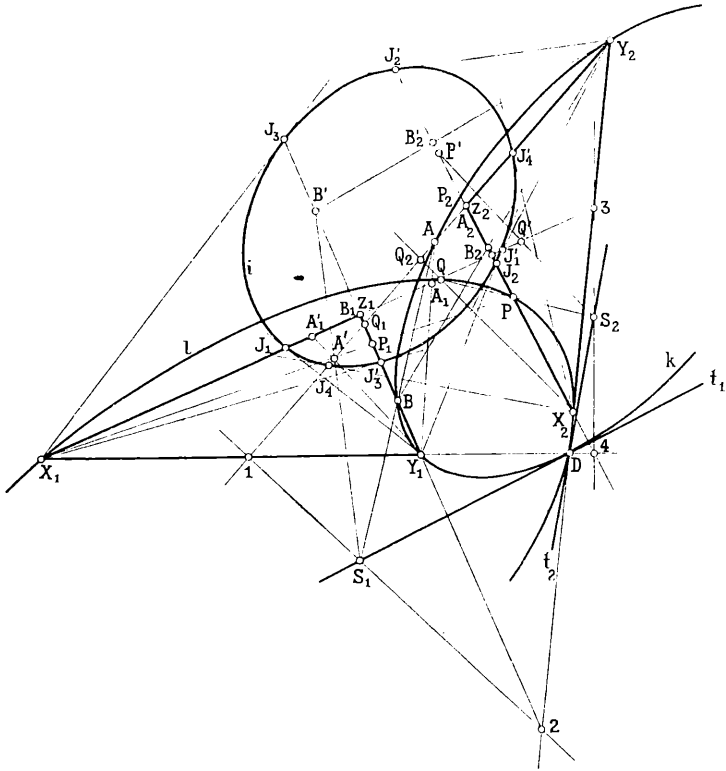


Fig.

heran. Projizieren wir die in  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  liegenden Parallelstrahl-  
büschel aus  $O_1$  und  $O_2$ , so entsprechen einander in den Ebenen-  
büscheln  $\gamma_1, \gamma_2$  nicht nur die Verschwindungsebenen  $x_1 \gamma_1, x_2 \gamma_2$ ,  
sondern auch die Ebenen, die aus diesen durch eine unendlich  
kleine Drehung entstehen. Die Fläche gleicher Parallaxe  $p$  geht  
durch die Schnittgerade  $d$  der Verschwindungsebenen und durch  
die Schnittgerade  $e$  der beiden unendlich benachbarten Ebenen.  
Der Schluß ist nur zulässig, wenn  $p$  nicht unendlich groß ist.  
Diese Voraussetzung trifft zu, weil  $p$  durch die Dimensionen der  
Platten begrenzt ist. Legen wir dem  $p$  innerhalb dieser Grenzen  
alle möglichen Werte bei, so erhalten wir  $\infty^1$  Regelflächen zweiter  
Ordnung, welche die Achsen der erzeugenden Ebenenbüschel  $\gamma_1, \gamma_2$

und die unendlich benachbarten Netzstrahlen  $d$  und  $e$  gemeinsam haben. Damit ist der Satz III bewiesen.

Das Kegelschnittbüschel, welches die Flächen gleicher Parallaxe  $p$  in der unendlich fernen Ebene bestimmen, enthält zwei in Geradenpaare zerfallende Kegelschnitte. Sie bestimmen die Richtebenen der zwei in dem Büschel von Regelflächen zweiter Ordnung enthaltenen hyperbolischen Paraboloiden. Eines dieser Paraboloiden zerfällt. Der Wert von  $p$ , der dem anderen hyperbolischen Paraboloid entspricht, ist leicht zu ermitteln: Wir ordnen der Ebene durch  $y_1$  parallel zu  $y_2$  die Ebene durch  $y_2$  parallel zu  $y_1$  zu. Die erste Ebene schneidet  $\Pi_1$  in einer Parallelen zu  $v_1$ , die zweite Ebene schneidet  $\Pi_2$  in einer Parallelen zu  $v_2$ . Die Abszissendifferenz dieser beiden Geraden gibt den verlangten Wert von  $p$  an.

Wenn die Flächen gleicher Parallaxe  $p$  einander längs des Netzstrahls  $d$  berühren, so ist nach dem Chasles'schen Satz über die Berührungskorrelation<sup>1</sup> das Büschel der Berührungsebenen projektiv zur Reihe der Berührungspunkte. Wenn man den Ebenen des Büschels  $d$  die Punkte von  $d$  projektiv zuordnet und in jeder Ebene durch  $d$  jenes Strahlbüschel auswählt, dessen Scheitel der entsprechende Punkt ist, so erhält man ein parabolisches Strahlnetz. In einem parabolischen Strahlnetz liegen  $\infty^3$  Regelflächen zweiter Ordnung. Eine Gerade des Raumes  $g$  wird von den Ebenen des Büschels  $d$  in einer perspektiven Punktreihe geschnitten. Wegen der Berührungskorrelation ist die Punktreihe auf  $g$  zur Punktreihe auf  $d$  projektiv. Die beiden Punktreihen  $d$  und  $g$  erzeugen eine in dem parabolischen Netz enthaltene Regelfläche zweiter Ordnung.

Wir können daher sagen:

*IV. Die Flächen gleicher Parallaxe  $p$  sind die Regelflächen zweiter Ordnung, welche dem hyperbolischen Strahlnetz mit den Brennlinien  $y_1, y_2$  und dem parabolischen Strahlnetz mit der Brennlinie  $d$  gemeinsam sind.*

Die  $\infty^3$  Strahlen des hyperbolischen Netzes  $y_1, y_2$  sind die Doppelstrahlen von  $\infty^1$  gescharten Kollineationen. Durch das Strahlnetz und zwei homologe Punkte  $P, P'$ , die auf einem Netzstrahl beliebig angenommen werden, ist eine dieser gescharten Kollineationen eindeutig bestimmt. Ordnen wir dem Punkt  $P$  insbesondere denjenigen Punkt  $P'$  zu, welcher durch die Brennpunkte seines Netzstrahls, d. h. durch die Schnittpunkte des Netzstrahls mit den Brennlinien  $y_1, y_2$  harmonisch getrennt wird, so erhalten wir einen geschart involutorischen Raum, dessen Involutionen die Brennlinien des hyperbolischen Netzes sind.  $P$  und  $P'$  sind konjugiert bezüglich aller  $\infty^3$  in dem hyperbolischen

<sup>1</sup> Chasles, Sur les surfaces engendrées par une droite. Corr. math. et phys. 11, Bruxelles 1839.

Strahlnetz  $y_1, y_2$  enthaltenen Regelflächen zweiter Ordnung. Drei windschiefe Netzstrahlen des hyperbolischen Strahlnetzes  $y_1, y_2$  bestimmen eine aus lauter Netzstrahlen bestehende Regelschar zweiter Ordnung. Die Leitstrahlen dieser Schar, der auch  $y_1, y_2$  angehören, sind paarweise einander zugeordnet und bilden eine in dem involutorischen Raum enthaltene hyperbolisch involutorische Regelschar, welche die Brennlinsen  $y_1, y_2$  zu Doppelstrahlen hat. Drei windschiefe Netzstrahlen des parabolischen Strahlnetzes mit der Brennlinie  $d$  bestimmen eine aus lauter Netzstrahlen bestehende Regelschar zweiter Ordnung. Die Leitstrahlen dieser Schar, der auch  $d$  angehört, sind paarweise einander zugeordnet und bilden eine in dem involutorischen Raum enthaltene parabolisch involutorische Regelschar, welche die Brennlinie  $d$  des parabolischen Strahlnetzes zum Doppelstrahl hat. Es erfolgt also die involutorische Paarung der Leitstrahlen beim ersten Strahlnetz so, daß entsprechende Strahlen durch  $y_1$  und  $y_2$  harmonisch getrennt werden, beim zweiten Strahlnetz so, daß jeder Leitstrahl den Strahl  $d$  als entsprechenden Strahl hat. Nun sind für die den beiden Strahlnetzen gemeinsamen Flächen die Strahlen jeder Schar die Leitstrahlen der anderen Schar.

Daher können wir sagen:

**V. Die Flächen gleicher erster Parallaxe sind gleich geschart involutorische Regelflächen zweiter Ordnung.**

Die Pole einer Ebene  $\varepsilon$  bezüglich aller  $\infty^3$  in dem hyperbolischen Strahlnetz enthaltenen Regelscharen zweiter Ordnung liegen in einer Ebene  $\varepsilon_1$ , welche mit  $\varepsilon$  ihren Netzstrahl  $l$  gemeinsam hat und von  $\varepsilon$  durch  $y_1$  und  $y_2$  harmonisch getrennt wird, denn  $y_1, y_2$  liegen auf allen  $\infty^3$  Regelscharen zweiter Ordnung des Netzes. Die Ebenen  $l y_1$  und  $l y_2$  sind die durch den Netzstrahl  $l$  an alle  $\infty^3$  Regelflächen legbaren Tangentialebenen. Die Tangentialebenen  $l y_1, l y_2$  trennen  $\varepsilon$  harmonisch von der durch ihren Pol  $E$  gehenden Ebene  $\varepsilon_1$ . Die Ebenen des Raumes sind also paarweise konjugiert bezüglich aller  $\infty^3$  in dem hyperbolischen Strahlnetz liegenden Regelflächen zweiter Ordnung. Der unendlich fernen Ebene des geschart involutorischen Raumes mit den Involutionsachsen  $y_1, y_2$  ist eine eigentliche Ebene, die Fluchtebene, zugeordnet. Diese enthält den in der unendlich fernen Ebene liegenden Netzstrahl und die Mittelpunkte aller Punktinvolutionen des involutorischen Raumes. Sie ist folglich zu den beiden Involutionsachsen  $y_1, y_2$  parallel und halbiert ihr gemeinsames Lot. Weil die Fluchtebene der unendlich fernen Ebene bezüglich aller  $\infty^3$  Regelflächen konjugiert ist, enthält sie die Mittelpunkte aller dieser Flächen, unter denen sich die Flächen gleicher Parallaxe  $p$  befinden.

Die Flächen gleicher Parallaxe  $p$  liegen aber auch in dem parabolischen Strahlnetz mit der Brennlinie  $d$ , das wir als Grenzfall eines hyperbolischen Strahlnetzes auffassen. Die Mittelpunkte der  $\infty^3$  in diesem Strahlnetz liegenden Regelflächen zweiter Ordnung



liegen daher in der Fluchtebene des involutorischen Raumes, dessen Involutionenachsen unendlich benachbart sind. Der Fußpunkt ihres gemeinsamen Lotes in  $d$  ist der Zentralpunkt der Erzeugenden  $d$ . Da die Flächen gleicher Parallaxe  $p$  die den beiden Strahlnetzen gemeinsamen Regelflächen zweiter Ordnung sind, gilt der Satz:

*VI. Die Mittelpunkte der Flächen gleicher erster Parallaxe liegen auf der Geraden, in der sich die Fluchtebenen der beiden geschart involutorischen Räume schneiden, denen die Flächen angehören.*

Die Konstruktion dieser Mittelpunktsgeraden ist leicht durchzuführen. Die Fluchtebene des ersten involutorischen Raumes ist die Symmetrieebene des gemeinsamen Lotes von  $y_1, y_2$ . Die Fluchtebene des zweiten involutorischen Raumes ist die asymptotische Ebene der Erzeugenden  $d$ .

Wir gelangen zu dem im Satz VI formulierten Ergebnis auch auf folgendem Wege. Fassen wir die  $\infty^1$  Flächen gleicher erster Parallaxe auf als Inzidenzflächen von  $\infty^1$  polaren Räumen, so sind je zwei dieser Räume zueinander kollinear. Sie erzeugen aber nicht einen tetraedralen oder Reye'schen Komplex, weil die Flächen ein spezielles Büschel von Flächen zweiter Ordnung bilden. Sie sind ja zugleich die  $\infty^1$  Flächen einer Schar von Flächen zweiter Ordnung. Haben die Büschel von Flächen zweiter Ordnung die charakteristische Eigenschaft, die auch als Definition des Büschels<sup>1</sup> dienen kann, daß die Polarebenen eines Punktes bezüglich der  $\infty^1$  Flächen des Büschels ein Ebenenbüschel erster Ordnung bilden, so gilt für die Scharen von Flächen zweiter Ordnung die duale Eigenschaft: die Pole einer Ebene bezüglich der  $\infty^1$  Flächen einer Schar von Flächen zweiter Ordnung bilden eine Punktreihe erster Ordnung. Die Pole der unendlich fernen Ebene bezüglich der  $\infty^1$  Flächen der Schar, d. h. die Mittelpunkte der Flächen gleicher erster Parallaxe bilden eine Punktreihe erster Ordnung.

Schneiden wir das Büschel von Flächen gleicher erster Parallaxe mit einer Ebene, so erhalten wir die in der Ebene liegenden Kurven gleicher erster Parallaxe. Für diese gilt der Satz:

*VII. Die in einer Ebene liegenden Kurven gleicher erster Parallaxe bilden ein Kegelschnittbüschel, dessen Grundpunkte die Schnittpunkte der Ebene mit den Seiten des windschiefen Vierseits  $y_1 y_2 d e$  sind.*

Da die Seiten  $d, e$  des windschiefen Vierseits unendlich benachbart sind, bilden die in der Ebene liegenden Kurven gleicher Parallaxe  $p$  ein spezielles Kegelschnittbüschel. Die Kegelschnitte

<sup>1</sup> Th. Reye, Geometrie der Lage, III. Bd., p. 43.

gehen durch die Spurpunkte von  $y_1, y_2$  und berühren einander im Spurpunkt von  $d$ .

Den Punkten einer Geraden  $g$  bezüglich zweier Kegelschnitte  $k_1, k_2$  des Büschels sind die Strahlen zweier projektiver Strahlbüschel konjugiert, deren Scheitel die Pole  $G_1, G_2$  der Geraden  $g$  sind. Das Erzeugnis dieser beiden projektiven Strahlbüschel ist ein Kegelschnitt, der Ort der doppelt konjugierten Punkte. Wenn zwei Punkte bezüglich zweier Kegelschnitte des Büschels konjugiert sind, so sind sie bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels konjugiert. Der durch die projektiven Strahlbüschel  $G_1, G_2$  erzeugte Kegelschnitt ist der Ort der Pole von  $g$  bezüglich der  $\infty^1$  Kegelschnitte des Büschels. Wählen wir  $g$  als die unendlich ferne Gerade der Ebene, so sind ihre Pole bezüglich der Kegelschnitte des Büschels die Mittelpunkte derselben. Daher gilt der Satz:

*VIII. Die Mittelpunkte der in einer Ebene liegenden Kurven gleicher erster Parallaxe liegen auf einem Kegelschnitt, welcher durch die Eckpunkte des allen Kurven gemeinsamen degenerierten Poldreiecks und durch die Halbierungspunkte der von je zwei gemeinsamen Punkten begrenzten Strecken hindurchgeht.*

Denn jeder Pol ist dem Schnittpunkt der Geraden mit der Polaren bezüglich aller Kegelschnitte des Büschels konjugiert und jeder solche Halbierungspunkt ist der Zentralpunkt der involutorischen Reihen, welche auf den gemeinsamen Geraden des Büschels durch die konjugierten Punkte bezüglich der Kegelschnitte des Büschels zustande kommen.

Wenn ein Punkt  $P$  eine Punktreihe  $g$  beschreibt, so beschreiben seine Polarebenen  $\pi_1, \pi_2$  bezüglich zweier Flächen  $\Phi_1, \Phi_2$  des Büschels von Flächen gleicher erster Parallaxe zwei zu  $g$  projektive Ebenenbüschel um die reziproken Polaren  $g_1, g_2$  von  $g$  bezüglich  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ . Die zu  $P$  konjugierte Gerade, die Schnittlinie der beiden Ebenen  $\pi_1, \pi_2$ , beschreibt eine Regelschar zweiter Ordnung.

Die Polaren von  $g$  bezüglich der Flächen sind die Leitstrahlen der Schar.<sup>1</sup> Jede Ebene des Büschels mit der Achse  $g$  schneidet aus dem Büschel von Flächen gleicher Parallaxe ein Büschel von Kurven gleicher Parallaxe aus. Der Geraden  $g$  ist bezüglich dieses Kegelschnittbüschels ein Kegelschnitt konjugiert.

In den  $\infty^1$  Kegelschnittbüscheln, welche durch die  $\infty^1$  Ebenen des Ebenenbüschels aus den  $\infty^1$  Flächen gleicher Parallaxe ausgeschnitten werden, sind der Geraden  $g$   $\infty^1$  Kegelschnitte konjugiert, die auf der Regelfläche zweiter Ordnung liegen, welche der Geraden  $g$  bezüglich aller Flächen gleicher Parallaxe kon-

<sup>1</sup> Th. Reye, Geometrie der Lage, III. Bd., p. 46.

jugiert ist. Wählen wir  $g$  als unendlich ferne Gerade, so ergibt sich der Satz:

**IX.** *Die Mittelpunkte der in parallelen Ebenen liegenden Kurven gleicher erster Parallaxe liegen auf einer Regelfläche zweiter Ordnung.*

Jeder unendlich fernen Geraden ist eine Regelfläche zweiter Ordnung als Ort der Mittelpunkte aller ebenen Kurven gleicher Parallaxe konjugiert, deren Stellung durch die unendlich ferne Gerade gegeben ist. Den  $\infty^2$  Geraden der unendlich fernen Ebene sind  $\infty^2$  Regelflächen als Träger der Mittelpunkte von ebenen Kurven gleicher Parallaxe zugeordnet. Da die Pole der unendlich fernen Ebene bezüglich der Flächen gleicher Parallaxe auf einer Geraden liegen (Satz VI), gilt:

**X.** *Die Mittelpunkte aller  $\infty^1$  ebenen Kurven gleicher Parallaxe bilden ein spezielles Bündel von Flächen zweiter Ordnung. Auf einer Fläche des Bündels liegen die Mittelpunkte aller ebenen Kurven gleicher Parallaxe, deren Ebenen parallel sind. Die  $\infty^2$  Flächen des Bündels gehen durch eine Gerade, daher zerfällt die Kernkurve<sup>1</sup> sechster Ordnung des Bündels in lauter Geraden.*

### B. Besondere Aufnahmen.

Wir erhalten die verschiedenen Sonderfälle durch die Annahmen besonderer gegenseitiger Lagen der Achsen der rechtwinkligen Achsenkreuze  $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$ . Wir wollen die üblichen Bezeichnungen verkantete, verschwenkte, gekippte Aufnahmen etwas allgemeiner fassen, als dies in der photogrammetrischen Praxis geschieht. Wir wollen durch diese Bezeichnungen die relative Lage der Bildebenen und Hauptachsen zum Ausdruck bringen, unbekümmert um die absolute Aufstellung der Platten im Raum. Es kommt also eine Bezugnahme auf die lotrechte Aufstellung einer Bildebene, die in der Praxis besondere Bedeutung hat, nicht in Betracht. Wir nennen zwei Aufnahmen verkantet, verschwenkt, gekippt, wenn nur die beiden  $z$ -Richtungen, respektive die  $y$ -,  $x$ -Richtungen übereinstimmen, während die beiden anderen Achsenpaare gegeneinander um einen Winkel  $\alpha$  gedreht erscheinen, den wir den Winkel der Verkantung, Verschwenkung oder Kippung nennen.

Ein weiterer Sonderfall ergibt sich durch die Annahme parallel gestellter Achsenkreuze. Wir nennen diese Aufnahmen gleich orientierte Aufnahmen<sup>2</sup> und reihen hier den in der photo-

<sup>1</sup> Th. Reye nennt den Ort der Spitzen der in dem Bündel von Flächen zweiter Ordnung enthaltenen Kegel die Kernkurve des Bündels.

Th. Reye, Geometrie der Lage, III. Bd., p. 138, 139.

In der photogrammetrischen Literatur bezeichnet als parallel verschwenkte Aufnahmen. H. Dock, Photogrammetrie und Stereophotogrammetrie. Berlin, 1923.

grammetrischen Literatur als Normalfall bezeichneten Fall ein. Schließlich wäre noch der Fall sich schneidender Achsen zu erwähnen, wie er z. B. bei Panoramenaufnahmen auftritt.

### 1. Panoramenaufnahmen.

Die Achsen  $y_1, y_2$  schneiden sich in einem Punkt  $S$ . Das hyperbolische Strahlennetz, in dem alle Flächen gleicher Parallaxe liegen, artet aus. Es besteht aus den Strahlen der Verbindungsebene  $y_1 y_2$  und aus den Strahlen des Bündels  $S$ .

**XI.** *Die Flächen gleicher Parallaxe  $p$  bilden ein Büschel von Kegeln zweiter Ordnung, welche die Mantellinien  $y_1, y_2, d$  gemeinsam haben und einander längs  $d$  berühren.*

Für  $p = 0$  sind die den Kegel erzeugenden projektiven Ebenenbüschel kongruent, daher gilt:

**XIa.** *Die Punkte, welche sich parallaxenfrei abbilden, liegen auf einem orthogonalen Kegel.*

### 2. Verkantete Aufnahmen.

Die Aufnahmerichtungen stimmen überein, die Bildebenen sind parallel.

**XII.** *Die Flächen gleicher Parallaxe  $p$  sind hyperbolische Paraboloiden. Alle Flächen haben die durch die Stellung der Bildebenen gegebene Richtebene gemeinsam, während die  $\infty^1$  zweiten Richtebenen ein Ebenenbüschel bilden, dessen Achse den Verkantungswinkel halbiert.*

**XIIa.** *Die Punkte, welche sich parallaxenfrei abbilden, liegen auf einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid, welches zerfällt, wenn die Platten Ausschnitte derselben Ebene sind.*

### 3. Gekippte Aufnahmen.

Die horizontalen Mittellinien der beiden Platten sind parallel.

**XIII.** *Die Flächen gleicher Parallaxe sind einschalige Hyperboloide.*

**XIIIa.** *Die Punkte, welche sich parallaxenfrei abbilden, liegen auf einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid, von welchem die eine Richtebene zu  $z_1$  und  $z_2$  parallel ist, während die zweite die Symmetrieebene von  $z_1 z_2$  ist.*

### 4. Verschwenkte Aufnahmen.

Die Vertikallinien der beiden Platten sind parallel. Die Flächen gleicher Parallaxe  $p$  ergeben sich als Erzeugnisse projektiver Ebenenbüschel, deren Achsen  $y_1, y_2$  parallel sind.

**XIV.** Die Flächen gleicher Parallaxe  $p$  bilden ein Büschel von Zylindern zweiter Ordnung, welche durch  $y_1, y_2$  gehen und sich der Schnittgeraden  $d$  der beiden Verschwindungsebenen berühren.<sup>1</sup>

Für  $p = 0$  sind die den Zylinder erzeugenden projektiven Ebenenbüschel kongruent, daher gilt:

**XIV a.** Die Punkte, welche sich parallaxenfrei abbilden, liegen auf einem Drehzylinder.

Dies ist das einzige Auftreten von Drehflächen unter den Flächen gleicher Parallaxe. Beim allgemeinen Fall enthält das Flächenbüschel keine Drehflächen, weil deren unendlich ferne Kurven durch vier gegebene Punkte gehen und den absoluten Kegelschnitt doppelt berühren müßten.

Der Querschnitt des Zylinderbüschels ist das Büschel von Kegelschnitten, welche durch die Spurpunkte von  $y_1, y_2, d$  gehen und sich im letzteren Spurpunkt berühren. Unter diesen Kurven gleicher Parallaxe finden wir den  $p = 0$  entsprechenden Kreis als Erzeugnis gleichlaufend kongruenter Strahlbüschel. Die Erzeugung der Kegelschnitte durch projektive Strahlbüschel ermöglicht eine einfache konstruktive Behandlung. Für den Kegelschnitt ihrer Mittelpunkte sind auf Grund des Satzes VIII unmittelbar fünf Punkte gegeben. In der photogrammetrischen Praxis wird zwischen einem Konvergenzfall und einem Divergenzfall<sup>2</sup> unterschieden. Diese Unterscheidung fällt bei der projektiven Behandlung des Problems weg.

### 5. Gleich orientierte Aufnahmen.

Die Achsenkreuze  $x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2$  sind parallel gestellt. Es sind also nicht bloß die Achsen  $y_1, y_2$  der die Flächen gleicher Parallaxe erzeugenden Ebenenbüschel parallel, sondern auch die Verschwindungsebenen. Die Zylinder haben zwei unendlich benachbarte unendlich ferne Mantellinien gemeinsam, daher gilt:

**XV.** Die Flächen gleicher Parallaxe  $p$  bilden ein Büschel ähnlicher parabolischer Zylinder durch  $y_1, y_2$ .

<sup>1</sup> Die Untersuchungen von H. Dock erstrecken sich auf die Sonderfälle 4 und 5. Dabei spielt die lotrechte Aufstellung der Bildebenen eine wesentliche Rolle. Daß die Flächen gleicher Parallaxe Zylinderflächen durch drei Geraden sind, finden wir auch in der zitierten Arbeit. Doch scheint Herrn Dr. Dock entgangen zu sein, daß  $d$  die Schnittgerade der beiden Verschwindungsebenen ist, daß also  $d$  nicht nur in der durch  $O_1$  parallel zu  $\Pi_1$  gelegten Ebene, sondern auch in der durch  $O_2$  parallel zu  $\Pi_2$  gelegten Ebene liegt, ferner daß die Flächen gleicher Parallaxe ein Büschel von einander längs  $d$  berührenden Zylinderflächen bilden. In der zitierten Arbeit ist für den Querschnitt des Zylinderbüschels die Kurve der Mittelpunkte angegeben. Unsere projektiven Untersuchungen gelten nicht nur für den Querschnitt, sondern für jeden beliebigen Schnitt.

<sup>2</sup> H. Lüscher, Photogrammetrie (Einfache Stereo- und Luftphotogrammetrie) Verlag Teubner, Leipzig, 1920.

Für  $p = 0$  haben die beiden die Fläche erzeugenden Ebenenbündel mit den Achsen  $j'_1, j'_2$  die Verbindungsebene  $j'_1 j'_2$  entsprechend gemeinsam, sind also perspektiv, daher gilt:

**XV a.** Die Punkte, welche sich parallaxenfrei abbilden, liegen auf einem Ebenenpaar, nämlich der Verbindungsebene  $j'_1 j'_2$  und der unendlich fernen Ebene.

Der Querschnitt des Bündels parabolischer Zylinder ist ein Bündel ähnlicher Parabeln.

Wenn die beiden gleich orientierten Platten Ausschnitte derselben Ebene sind, liegt der sogenannte »Normalfall« vor. Die beiden projektiven Ebenenbündel haben die Verschwindungsebenen entsprechend gemeinsam, sind also perspektiv. Daher gilt:

**XVI.** Die Flächen gleicher Parallaxe bilden ein singuläres Bündel von in parallele Ebenenpaare zerfallenden Zylindern.

XVI a ist mit XV a gleichlautend.

Der Querschnitt des Bündels von in parallele Ebenen zerfallenden Zylindern ist ein Bündel von in parallele Geradenpaare zerfallenden ähnlichen Parabeln. Eine dieser Geraden ist  $O'_1 O'_2$ .<sup>1</sup>

### Flächen gleicher zweiter Parallaxe.

Wir ordnen den Parallelen zur Mittellinie  $h_1$  der ersten Platte  $a', b', c'$  mit den Gleichungen

$$y_1 = a_1, y_1 = b_1, y_1 = c_1, \dots$$

die Parallelen zur Mittellinie  $h_2$  der zweiten Platte  $a'', b'', c''$ , mit den Gleichungen

$$y_2 = a_2, y_2 = b_2, y_2 = c_2, \dots$$

so zu, daß

$$a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = \dots = q.$$

Projizieren wir das Parallelstrahlbündel der Geraden  $a', b', c'$ , aus  $O_1$ , das Parallelstrahlbündel der Geraden  $a'', b'', c''$ , aus  $O_2$ , so erhalten wir ein Ebenenbündel  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , mit der Achse  $x_1$  und ein Ebenenbündel  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ , mit der Achse  $x_2$ . Die beiden Ebenenbündel sind, weil sie zu den kongruenten und daher projektiven Parallelstrahlbündeln perspektiv sind, zueinander projektiv. Ihr Erzeugnis bezeichnen wir als Fläche gleicher zweiter Parallaxe  $q$ . Wir erhalten den zu Satz I analogen Satz:

**I\*.** Die Fläche gleicher zweiter Parallaxe  $q$  ist eine Regelschar zweiter Ordnung, deren Leitschar die Strahlen  $x_1, x_2$  enthält.

<sup>1</sup> Der fünfte Sonderfall: gleich orientierte Aufnahmen, ist in den Arbeiten von Dock, Heinz und Pulfrich behandelt. Gewöhnlich wird bei XVI die Ebene  $j'_1 j'_2$  weggelassen und nur die dazu parallele Ebene als Fläche gleicher Parallaxe bezeichnet.

Für die Flächen gleicher zweiter Parallaxe  $q$  übernehmen die Geraden  $x_1, x_2$  dieselbe Rolle, die für die Flächen gleicher erster Parallaxe  $p$  die Geraden  $y_1, y_2$  spielen. Wir können also den Sätzen I bis X zehn gleichlautende Sätze I\* bis X\* gegenüberstellen. Auf einen Umstand möchten wir besonders hinweisen. Die  $\infty^1$  Flächen gleicher erster Parallaxe gehen durch die Schnittgerade  $d$  der beiden Verschwindungsebenen und durch die Schnittgerade  $e$  der Ebenen, die aus den Verschwindungsebenen durch eine unendlich kleine Drehung um die Achsen  $y_1, y_2$  entstehen. Analog gilt für die  $\infty^1$  Flächen gleicher zweiter Parallaxe: Sie gehen durch die Schnittgerade  $d$  der beiden Verschwindungsebenen und durch die Schnittgerade  $f$  der Ebenen, die aus den Verschwindungsebenen durch eine unendlich kleine Drehung um die Achsen  $x_1, x_2$  entstehen. Es gilt also:

**III\*.** *Die Flächen gleicher zweiter Parallaxe bilden ein singuläres Büschel von Regelflächen zweiter Ordnung. Die Grundkurve des Büschels ist ein windschiefes Vierseit, von welchem zwei Gegenseiten die Brennlinsen  $x_1, x_2$  des hyperbolischen Netzes sind, während die zwei anderen Gegenseiten zwei unendlich benachbarte Netzstrahlen  $d, f$  sind, d. h. die  $\infty^1$  Flächen berühren einander längs der Schnittgeraden  $d$  der beiden Verschwindungsebenen.*

Es berühren sich demnach längs  $d$  nicht nur die Flächen gleicher erster Parallaxe, sondern auch die Flächen gleicher zweiter Parallaxe, aber die beiden Berührungskorrelationen sind verschieden. Diese Tatsache veranschaulicht sehr deutlich die schematische Fig. 2. Der unendlich ferne Kegelschnitt  $l_u$  der Fläche gleicher zweiter Parallaxe  $\Psi$  geht durch die Punkte  $X_{1u}, X_{2u}$  und  $D_u$ . Wir bestimmen zwei weitere Punkte  $P_u, Q_u$  genau so wie früher die Punkte  $A_u, B_u$  für den Kegelschnitt  $k_u$ . Wir treffen unter den Ebenen der Büschel  $x_1, x_2$  folgende Auswahl: Wir ordnen den Geraden  $\eta_1 = q, \eta_1 = 0$  von  $\Pi_1$  die Geraden  $\eta_2 = 0, \eta_2 = -q$  von  $\Pi_2$  zu. Die diese Geraden aus  $O_1$ , respektive  $O_2$  projizierenden Ebenen bestimmen zwei Strahlen  $p, q$  der Regelschar  $\Psi$ . Die unendlich fernen Punkte von  $p, q$  sind die Punkte  $P_u, Q_u$ . Die den Werten  $q', q'', q''', \dots$  entsprechenden Flächen  $\Psi', \Psi'', \Psi''', \dots$  haben unendlich ferne Kegelschnitte  $l'_u, l''_u, l'''_u, \dots$ , welche durch  $X_{1u}, X_{2u}, D_u$  gehen und je ein Punktepaar  $P'_u Q'_u, P''_u Q''_u, P'''_u Q'''_u, \dots$  enthalten, das analog wie  $P_u Q_u$  zustande kommt. Die Reihe der Punkte  $P_u, P'_u, P''_u, P'''_u, \dots$  auf  $X_{2u} Z_{2u}$  ist zur Reihe der Punkte  $Q_u, Q'_u, Q''_u, Q'''_u, \dots$  auf  $X_{1u} Z_{1u}$  perspektiv mit dem Zentrum  $S_2$ . Daraus folgt, daß alle Kegelschnitte  $l_u, l'_u, l''_u, l'''_u, \dots$  im Punkt  $D_u$  dieselbe Tangente  $t_2$  haben. Die Konstruktion der Tangente  $t_2$  mittels des Pascal'schen Satzes ist in Fig. 2 angegeben.

Der zu Satz IV analoge Satz IV\* besagt, daß die Flächen gleicher zweiter Parallaxe die dem hyperbolischen Strahlnetz mit den Brennlinsen  $x_1, x_2$  und dem parabolischen Strahlnetz mit der Brenn-

linie  $d$  gemeinsamen Regelflächen zweiter Ordnung sind. Die Flächen  $\Phi$  gleicher erster Parallaxe und die Flächen  $\Psi$  gleicher zweiter Parallaxe liegen in parabolischen Strahlnetzen mit gemeinsamer Brennnlinie  $d$ . Einer Tangentialebene  $\pi$  durch  $d$  entspricht in der Berührungskorrelation, die zu  $\Phi$  gehört, ein Berührungspunkt  $P_1$ , in der Berührungskorrelation, die zu  $\Psi$  gehört, ein Berührungspunkt  $P_2$ . Nach dem Chasles'schen Satz ist das Büschel der Berührungsebenen  $\pi$  projektiv zur Reihe der Berührungspunkte  $P_1$  und zur Reihe der Berührungspunkte  $P_2$ . Daher sind die zwei Reihen von Berührungspunkten  $P_1$  und  $P_2$  projektiv und haben zwei reelle getrennte, zwei reelle zusammenfallende oder zwei konjugiert imaginäre Doppelpunkte  $D_1 D_2$ , d. h. es gibt zwei Tangentialebenen durch  $d$ , deren Berührungspunktepaare sich decken.

Anders ausgedrückt: Die zwei parabolischen Strahlnetze mit derselben Brennnlinie  $d$  haben zwei Strahlbüschel gemeinsam. Die Strahlen dieser Büschel sind die gemeinsamen Tangenten in den zwei Punkten  $D_1, D_2$ , in denen sich die Flächen berühren.

Wir erhalten also den folgenden Satz über den Zusammenhang der beiden singulären Büschel von Regelflächen zweiter Ordnung:

**XVII.** *Alle  $\infty^1$  Flächen gleicher erster Parallaxe berühren alle  $\infty^1$  Flächen gleicher zweiter Parallaxe in den Doppelpunkten der beiden projektiven Reihen von Berührungspunkten auf der Schnittgeraden der Verschwindungsebenen.*

Die konstruktive Behandlung der Berührungskorrelationen erfolgt durch Verwendung der Spuren der Tangentialebenen. Die Vervollständigung wird am einfachsten durch Einpassen mit dem Papierstreifen durchgeführt.

Wir verzichten auf die Übertragung der Resultate des Kapitels »Besondere Aufnahmen« auf die Flächen gleicher zweiter Parallaxe.

## Kurven gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe.

### I.

Bringen wir jede Fläche  $\Phi$  des Büschels von Flächen gleicher erster Parallaxe mit jeder Fläche  $\Psi$  des Büschels von Flächen gleicher zweiter Parallaxe zum Schnitt, so erhalten wir  $\infty^2$  Kurven, deren Punkte Bildpunkte mit konstanter Abszissendifferenz  $p$  und mit konstanter Ordinatendifferenz  $q$  haben.

Wir nennen eine solche Kurve eine Kurve gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe. Da alle Flächen  $\Phi$  und alle Flächen  $\Psi$  die Schnittgerade  $d$  der beiden Verschwindungsebenen enthalten, sind die  $\infty^2$  Schnittkurven Raumkurven dritter Ordnung. Die Projektionszentren  $O_1$  und  $O_2$  liegen auf den  $\infty^1$  Flächen  $\Phi$  und auf den  $\infty^1$  Flächen  $\Psi$ , daher auch auf den  $\infty^2$  Raumkurven dritter Ordnung. Nach Satz XVII berühren die  $\infty^1$  Flächen  $\Phi$  die



$\infty^1$  Flächen  $\Psi$  in den Doppelpunkten der beiden projektiven Reihen von Berührungspunkten auf der Schnittgeraden der Verschwindungsebenen, daher müssen die  $\infty^2$  Schnittkurven in den Berührungspunkten  $D_1, D_2$  der Flächen Doppelpunkte haben. Wir können zusammenfassend sagen:

**XVIII.** Die  $\infty^2$  Kurven gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe sind Raumkurven dritter Ordnung, welche durch die Projektionszentren  $O_1$  und  $O_2$  und durch die Doppelpunkte  $D_1, D_2$  der projektiven Reihen von Berührungspunkten auf der Schnittgeraden  $d$  der beiden Verschwindungsebenen hindurchgehen.

Projizieren wir die  $\infty^2$  Schnittkurven aus  $O_1$  und  $O_2$ , so erhalten wir je  $\infty^2$  Kegel zweiter Ordnung und in ihren Spurkurven in  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  je  $\infty^2$  Kegelschnitte. Die Bildkurven in  $\Pi_1$  gehen durch  $O'_2, D'_1, D'_2$ , die Bildkurven in  $\Pi_2$  durch  $O'_1, D''_1, D''_2$ . Die Punkte  $D_1, D_2$  liegen in beiden Verschwindungsebenen, daher liegen ihre Bildpunkte  $D'_1, D''_1, D'_2, D''_2$  unendlich fern. Die Bildkurven der  $\infty^2$  Kurven haben dieselben unendlich fernen Punkte, sind also ähnliche Kegelschnitte. Wir können daher sagen:

**XIX.** Die Bildkurven der Kurven gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe bilden die Bündel von ähnlichen Kegelschnitten, welche durch  $O'_2$ , respektive  $O'_1$  gehen. Je nachdem die Doppelpunkte  $D_1, D_2$  der projektiven Reihen von Berührungspunkten auf der Schnittgeraden  $d$  der Verschwindungsebenen reell getrennt, reell zusammenfallend oder konjugiert imaginär sind, erhalten wir Bündel ähnlicher Hyperbeln, Parabeln oder Ellipsen.

Wir verzichten auf eine Behandlung der vielen möglichen Kombinationen von Sonderfällen der Flächen gleicher erster Parallaxe und der gleicher zweiter Parallaxe.

## II.

Wir können zu den Kurven gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe unabhängig von den Flächen  $\Phi$  und  $\Psi$  auch auf direktem Wege gelangen. Wir ordnen jedem Punkt  $P'$  ( $x_1, y_1$ ) in  $\Pi_1$  den Punkt  $P''$  ( $x_2, y_2$ ) in  $\Pi_2$  so zu, daß

$$x_2 = x_1 - p \quad \text{und} \quad y_2 = y_1 - q$$

ist, d. h. wir ordnen dem ebenen Feld  $\Pi_1$  das in der Richtung von  $h_2$  um  $-p$ , in der Richtung von  $v_2$  um  $-q$  verschobene Feld  $\Pi_2$  zu. Die Bündel, welche diese Felder aus  $O_1$  und  $O_2$  projizieren, sind kollinear und erzeugen eine Strahlkongruenz erster Ordnung dritter Klasse, die Bisekantenkongruenz einer Raumkurve dritter Ordnung, welche durch die Scheitel  $O_1, O_2$  der erzeugenden Bündel hindurchgeht. Die Raumkurve dritter Ordnung ist der Ort der

singulären Punkte<sup>1</sup> der Kongruenz, d. h. der Punkte, in denen sich homologe Strahlen der Bündel schneiden. Damit ist gezeigt, daß die Punkte gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe auf einer kubischen Raumkurve liegen.

Die Ebenen des Bündels  $O_1$  durch die Geraden in  $\Pi_1$

$$x_1 = p, x_1 = 0, y_1 = q, y_1 = 0$$

schneiden die Ebenen des Bündels  $O_2$  durch die Geraden in  $\Pi_2$ :

$$x_2 = 0, x_2 = -p, y_2 = 0, y_2 = -q$$

in vier Bisekanten der kubischen Raumkurve. Die Raumkurve dritter Ordnung ist durch die Punkte  $O_1, O_2$  und die vier Bisekanten eindeutig bestimmt und kann etwa in der von Reye<sup>2</sup> angegebenen Weise linear konstruiert werden.

Wir können auch die Tangenten der kubischen Raumkurve in den Punkten  $O_1, O_2$  sehr einfach ermitteln. Bezeichnen wir die Koordinaten des Punktes  $O'_2$  mit  $x_1, y_1$ , die Koordinaten der Punktes  $O''_1$  mit  $x_2, y_2$ , so geht die Tangente in  $O_2$  durch den Punkt von  $\Pi_2$  mit den Koordinaten  $x_1 - p, y_1 - q$  und die Tangente in  $O_1$  durch den Punkt von  $\Pi_1$  mit den Koordinaten  $x_2 + p, y_2 + q$ .

#### Sonderfälle.

1. Die Bündel  $O_1, O_2$  haben eine Ebene entsprechend gemeinsam. Das Erzeugnis der kollinearen Bündel ist eine Strahlkongruenz erster Ordnung zweiter Klasse. Der Fall tritt bei allgemeinen Aufnahmen nicht ein, wohl aber bei verschwenkten und bei gekippten Aufnahmen. Für diese gilt:

**XX.** *Bei verschwenkten und bei gekippten Aufnahmen gibt es  $\infty^1$  Kurven gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe, welche in einen Kegelschnitt und eine seiner Unisekanten zerfallen. Diese Kurven entsprechen einem beliebigen Wert von  $q$  ( $p$ ) und einem festen Wert von  $p$  ( $q$ ), welcher durch die einzige gemeinsame doppeltprojizierende Ebene gegeben ist.*

2. Die Bündel  $O_1, O_2$  haben einen Strahl entsprechend gemeinsam, aber nicht alle durch ihn gehenden Ebenen. Das Erzeugnis der kollinearen Bündel ist eine lineare Strahlkongruenz oder ein Strahlnetz. Die kubische Raumkurve zerfällt in drei Geraden, nämlich in die Gerade  $O_1 O_2$  und die Brennlinien  $u, v$  des Strahlnetzes. Die Bündel  $O_1, O_2$  haben zwei Ebenen entsprechend gemeinsam, d. s. die projizierenden Ebenen der Brennlinien  $u, v$ .

<sup>1</sup> Th. Reye, Geom. d. Lage, II. Bd., p. 160.

Th. Reye, Geom. d. Lage, II. Bd., p. 171.

Der Fall tritt ein, wenn die Bildpunkte  $O'_2, O''_1$  der Projektionszentren entsprechende Punkte der kongruenten ebenen Felder  $\Pi_1, \Pi_2$  sind.

**XXI.** *Unter den  $\infty^2$  Zahlenpaaren  $p, q$  gibt es ein einziges, für welches die Kurve gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe in drei Geraden zerfällt. Dieses Zahlenpaar ist durch die Parallaxen der Bildpunkte der Projektionszentren gegeben.*

*Die Bildkurven sind die einzigen zerfallenden Kegelschnitte in den Bündeln ähnlicher Kegelschnitte durch die Bildpunkte der Projektionszentren.*

Je nachdem die Punkte  $D_1, D_2$  reell getrennt, reell zusammenfallend oder konjugiert imaginär sind, erhalten wir zwei reelle getrennte Geraden durch  $O'_2, O''_1$ , respektive zwei reelle zusammenfallende oder zwei konjugiert imaginäre Geraden. Die Konstruktion der Brennlinsen  $u, v$  kann so durchgeführt werden:  $O_1 O_2$  ist ein Netzstrahl. Wir bestimmen drei weitere Netzstrahlen  $a, b, c$  als Schnittgeraden homologer Ebenen der Sehstrahlenbündel. Die Brennlinsen sind die Geraden, welche mit diesen vier Netzstrahlen inzident sind.

3. Die Bündel  $O_1, O_2$  haben drei Ebenen entsprechend gemeinsam. Wenn die Bündel drei Ebenen gemeinsam haben, dann haben sie alle Ebenen des Büschels  $O_1 O_2$  entsprechend gemeinsam. Die Bündel sind perspektiv kollinear, sie sind Scheine einer Ebene, der Perspektivitätsebene.

**XXII.** *Alle Punkte gleicher erster und gleicher zweiter Parallaxe liegen in einer Ebene, wenn die Sehstrahlenbündel alle doppeltprojizierenden Ebenen entsprechend gemeinsam haben.*

Diese Voraussetzungen sind beim Normalfall gegeben, wenn wir  $p$  beliebig,  $q = 0$  annehmen. Wählen wir insbesondere  $p = 0, q = 0$ , so erhalten wir als Ort aller Punkte, die sich in beiden Richtungen parallaxenfrei abbilden, die unendlich ferne Ebene.

---

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1927

Band/Volume: [136\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Palm Franz Wilhelm

Artikel/Article: [Ober Flächen und Kurven gleicher Parallaxe bei stereophotogrammetrischen Aufnahmen. 569-587](#)