Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Topologische Beziehungen in sich kompakter Teilmengen euklidischer Räume zu ihren Komplementen sowie Anwendung auf die Prim-Enden-Theorie

Von

Felix Frankl

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Dezember 1927)

In dieser Arbeit[1] werden zunächst die Resultate der Alexanderschen Arbeit »The Jordan-Brouwer Theorem«[2] verschärft und auf beliebige in sich kompakte Teilmengen euklidischer Räume verallgemeinert. Sodann werden die so erhaltenen Sätze auf die Topologie der Ebene und insbesondere auf die Prim-Enden Theorie angewendet.

Wir schicken zunächst eine Definition voraus: Seien C_h und C_{n-h-1} zwei nicht orientierte in die n-dimensionale Kugeloberfläche S_n eingebettete Zykel von den Dimensionen h, beziehungsweise $n-h-1$ und sei $C_h = R\,(D_{h+1})$,[3] so verstehen wir unter der Umschlingungszahl $U(C_h, C_{n-h-1})$ den Kronecker-Index $(D_{h+1} \,.\, C_{n-h-1})$,[4] reduziert Mod. 2. Aus den Lefschetz'schen Sätzen über Kronecker-Indizes folgert man leicht:

Satz 1:[5] *a)* $U(C_h, C_{n-h-1})$ *ist von* D_{h+1} *unabhängig.*

b) Ist $C_h \sim C'_h$ *in* $S_n - C_{n-h-1}$, *so gilt* $U(C_h, C_{n-h-1}) = U(C'_h, C_{n-h-1})$,

c) $U(C_h, C_{n-h-1}) = U(C_{n-h-1}, C_h)$,

d) $U\big((C_h + C_h^*), C_{n-h-1}\big) \equiv U(C_h, C_{n-h-1}) + U(C_h^*, C_{n-h-1})$ *(Mod. 2).*

Ist $U(C_h, C_{n-h-1}) = 1$, so sagen wir: C_h umschlingt C_{n-h-1}.

Sei nun A ein in die S_n eingebetteter Komplex, so gibt es nach Alexander in A ebenso viele unabhängige h-Zykel $C_h^1, C_h^2, \ldots C_h^{z_h}$, wie in $S_n - A$ unabhängige $n-h-1$-Zykel $\Gamma_{n-h-1}^1, \ldots \Gamma_{n-h-1}^{z_h}$. Ver-

---

[1] Diese Arbeit enthält die wichtigsten Resultate meiner Dissertation »Zur Prim-Enden-Theorie« (Wien 1927) sowie die erst später gefundenen Sätze allgemeineren Charakters Nr. 2 und 3; die Sätze 4 und $4a$ waren in der Dissertation nur in geringerer Allgemeinheit bewiesen.

[2] Transactions of the Am. Math. Soc., Bd. 23, p. 333.

[3] $R\,(X)$ bedeutet den Rand von X.

[4] Siehe Veblen, Trans. Am. Math. Soc., Bd. 25, p. 540, und Lefschetz, Trans. Am. Math. Soc., Bd. 28, p. 1; die Umschlingungszahlen kenne ich aus Vietoris' Vorlesungen an der Universität Wien im Sommer 1927. Vgl. auch Lebesgue, C. R., Bd. 152, p. 842.

[5] Dieses Lemma stellt wesentlichen bekannte Tatsachen zusammen.

steht man unter z_h die h-te Zusammenhangszahl von A und unter $\bar{z}_h$ die von $S_n—A$, so drückt sich der Satz so aus: $\bar{z}_h = z_{n-h-1}$. Die Matrix $\|U(C_h^i, \Gamma_{n-h-1}^k)\|$ nennen wir eine h-te Umschlingungsmatrix von A und $S_n—A$. Sie ändert sich nach Satz 1*b* nicht, wenn man ein C_h^i durch einen dazu in A homologen, beziehungsweise Γ_{n-h-1}^k durch einen dazu in $S_n—A$ homologen Zykel ersetzt und erfährt nach Satz 1*d* eine unimodulare Substitution Mod. 2, wenn man zu einer anderen Basis für die h-Zykel von A, beziehungsweise für die $n—h—1$-Zykel von $S_n—A$ übergeht. Wir beweisen nun folgende Verschärfung des Alexander'schen Satzes:

Satz 2. *Ist A ein Komplex in der S_n, so können wir eine Basis $C_h^1, C_h^2, \ldots C_h^{z_h}$ für die h-Zykel von A und eine Basis $\Gamma_{n-h-1}^1, \Gamma_{n-h-1}^2, \ldots \Gamma_{n-h-1}^{z_h}$ für die $n—h—1$-Zykel von $S_n—A$ finden, so daß $U(C_h^i, \Gamma_{n-h-1}^k) = \delta_{ik}$ wird. ($\delta_{ik} = 1$, beziehungsweise $= 0$, wenn $i = k$, beziehungsweise $i \neq k$ ist.) Oder, was dasselbe bedeutet: Jede Umschlingungsmatrix von A und $S_n—A$ hat eine Determinante $\equiv 1$ (Mod. 2).*[1]

Zum Beweis reduzieren wir zunächst A auf sein h-dimensionales Gerüst $A^{(h)}$.[2] Ist p dessen h-te Zusammenhangszahl, so können wir p in $A^{(h)}$ unabhängige h-Zykel $C^1, C^2, \ldots C^p$ finden, von denen jeder einen h-Simplex enthält, der in keinem anderen enthalten ist. Sei nämlich die Matrix, die die Inzidenzen von h- und $h—1$-Simplizes anzeigt, gleich $\|\varepsilon_{ik}\|$, so können wir (bei entsprechender Anordnung der Spalten der Matrix) ein System von p unabhängigen Lösungen der Gleichungen $\sum_k \varepsilon_{ik} x_k = 0$ finden von folgender Gestalt:

$$\begin{array}{l}
 \\
x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1,\alpha_h-p}, \\
x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2,\alpha_h-p}, \\
\ldots \\
x_{p,1}, x_{p,2}, \ldots, x_{p,\alpha_h-p},
\end{array}
\begin{array}{l}
\overbrace{\hphantom{1, 0, \ldots 0}}^{p \text{ Glieder}} \\
1, 0, \ldots 0 \\
0, 1, \ldots 0 \\
\ldots \\
0, 0, \ldots 1.
\end{array}$$

Den Spaltenindizes $1, 2, \ldots \alpha_h$ sollen die h-Simplizes $E^1, \ldots E^{\alpha_h}$ entsprechen.

Von den p daraus gebildeten Zykeln

$$C^i = x_{i1} E^1 + x_{i2} E^2 + \ldots x_{i,\alpha_h-p} E^{\alpha_h-p} + E^{\alpha_h-p+i}$$

enthält jeder einen h-Simplex E^{α_h-p+i}, der in keinem anderen C^k enthalten ist. Bezeichnen wir nun mit Γ^i den zu E^{α_h-p+i} dualen[3]

[1] Vgl. Lebesgue, C. R., Bd. 152, p. 843.

[2] D. h. die Gesamtheit aller h-dimensionalen Simplizes von A (auch der Randsimplizes).

[3] Alexander, l. c. p. 345.

$n-h-1$-Zykel von $S_n-A^{(h)}$, so gilt tatsächlich: $U(C^i, \Gamma^k) = \delta_{ik}$.[1] Nun fügen wir zu $A^{(h)}$ die $h+1$-Simplizes nacheinander wieder hinzu und zeigen, daß dabei der Satz richtig bleibt. Wir nehmen also an, wir seien bereits bei einem Teilkomplex B von A angelangt; seine h-te Zusammenhangszahl sei q. Wir fügen nun den $h+1$-Simplex E hinzu. Die h-Zykel $C^1, \ldots C^q$ von B und die $n-h-1$-Zykel $\Gamma^1, \ldots \Gamma^q$ von S_n-B mögen die gewünschte Umschlingungsmatrix von B und S_n-B liefern. Es gibt nun zwei Möglichkeiten:

1.
$$R(E) \sim 0 \text{ in } B.$$

Dann ist $U(R(E), \Gamma^k) = 0$ und es gibt daher zu Γ^k in $S_n-(B+E)$ einen homologen Zykel $\Gamma^{k\prime}$.[2]

2. Z. B.
$$R(E) \sim C^r + C^{r+1} + \ldots + C^q \text{ in } B.$$
Dann ist
$$C^r + C^{r+1} + \ldots + C^q \sim 0 \text{ in } B+E$$

und die Zusammenhangszahl von $B+E$ ist gleich $q-1$. Als Basis für die h-Zykel von $B+E$ wählen wir $C^1, C^2, \ldots C^{q-1}$. Ist nun

$$U(R(E), \Gamma^k) = 0 \quad (k \leq q-1),$$

so wählen wir $\Gamma^{k\prime}$ wie vorhin; ist aber $U(R(E), \Gamma^k) = 1$, so folgt aus

$$U(R(E), \Gamma^q) = U(R(E), \Gamma^k) = 1$$
die Gleichung
$$U(\Gamma^k + \Gamma^q, R(E)) = 0$$

und es gibt in $S_n-(B+E)$ einen zu $\Gamma^k + \Gamma^q$ homologen Zykel $\Gamma^{k\prime}$. In beiden Fällen ergibt sicht also:

$$U(C^i, \Gamma^{k\prime}) = \delta_{ik} \quad (i, k \leq q-1), \quad w.z.b.w.$$

Fügt man nun noch die mehr als $h+1$-dimensionalen Simplizes hinzu, so ändert sich an den betrachteten Verhältnissen nichts mehr, wie man leicht erkennt.[2] Damit ist Satz 2 bewiesen.

Nun hat L. Vietoris die kombinatorisch-topologischen Invarianten auf beliebige in sich kompakte metrische Mengen anwendbar gemacht.[3] Die von Vietoris betrachteten Komplexe sind nicht »geometrisch«, sondern bloß »kombinatorisch«, d. h. ihre Simplizes bestehen nur aus den Eckpunkten. In den Homologie- und Zusammenhangsgruppen treten an Stelle der Zykel Fundamentfolgen von

---

1 Dies ist für $h = 0$ trivial und folgt für $h > 0$ aus der Gleichung
$$(R(D_{h+1}) . D_{n-h}) \equiv (D_{h+1} . R(D_{n-h})) \text{ (Mod. 2)}.$$

2 Alexander, l. c. p. 346.

3 Math. Annalen, Bd. 97, p. 454.

Zykeln;[1] diese wollen wir auch für offene Teilmengen O der S_n definieren, und zwar gilt als Fundamentalfolge von O jede Fundamentalfolge einer abgeschlossenen Teilmenge von O;[2] analog definieren wir Homologie von Fundamentalfolgen in offenen Mengen. Haben die h-Fundamentalfolge

$$\{C_h^{(1)}, C_h^{(2)}, \ldots\}$$

und die $n-h-1$-Fundamentalfolge

$$\{C_{n-h-1}^{(1)}, C_{n-h-1}^{(2)}, \ldots\}$$

die Näherungsgrenzen $\bar{C}_h$, $\bar{C}_{n-h-1}$ und gibt es fremde Umgebungen $V(\bar{C}_h)$ und $V(\bar{C}_{n-h-1})$, in denen C_h, beziehungsweise C_{n-h-1} Fundamentalfolgen sind, so können wir auch $U(C_h, C_{n-h-1})$ definieren; füllen wir nämlich die Simplizes der kombinatorischen Komplexe $C_h^{(i)}$, $C_{n-h-1}^{(k)}$ durch geometrische Simplizes aus, so sind für fast alle i, k die Zahlen $U(C_h^{(i)}, C_{n-h-1}^{(k)})$ definiert und gleich und diesen gemeinsamen Wert nennen wir $U(C_h, C_{n-h-1})$. Für diese verallgemeinerten Umschlingungszahlen gilt Satz 1 ebenfalls; Satz 1 b muß dabei so formuliert werden: wenn es fremde Umgebungen $V(\bar{C}_h + \bar{C}'_h)$ und $V(\bar{C}_{n-h-1})$ gibt, in denen $C_h \sim C'_h$, beziehungsweise C_{n-h-1} eine Fundamentalfolge ist, so ist

$$U(C_h, C_{n-h-1}) = U(C'_h, C_{n-h-1}).$$

Nun können wir den Satz 2 auf beliebige abgeschlossene Mengen ausdehnen:

Satz 3. *Ist A eine abgeschlossene Teilmenge der S_n, so kann man eine Basis $C^1, C^2, \ldots$ für die h-Fundamentalfolgen von A und eine Basis $\Gamma^1, \Gamma^2, \ldots$ für die $n-h-1$-Zykel (sc. die geometrischen) von $S_n - A$ finden, so daß $U(C^i, \Gamma^{kh}) = \delta_{ik}$ wird; dabei sind die C^i und die Γ^k in gleicher Anzahl vorhanden, also: $z_h = z_{n-h-1}$.*[3]

Zum Beweis zerlegen wir die S_n simplizial und bilden von dieser Zerlegung die Folge der regulären Unterteilungen; die Vereinigung der Simplizes der ν-ten Unterteilung, die zu A nicht fremd sind, nennen wir $A_{(\nu)}$.[4] Dann ist

$$A = \mathop{D}_{\nu=1}^{\infty} A_{(\nu)}.$$

Die h-te Zusammenhangszahl von $A_{(\nu)}$ sei p_ν und es möge in $A_{(\nu)}$ genau k_ν unabhängige h-Zykel geben, die in $A_{(\nu)}$ zu Fundamentalfolgen von A homolog sind.

Schreiben wir nun eine Reihe von p_1 unabhängigen h-Zykeln von $A_{(1)}$ auf, die mit k_1 Zykeln der eben beschriebenen Art beginnt:

$$C^{1\prime}, C^{2\prime}, \ldots C^{k_1\prime}, C^{k_1+1\prime}, \ldots C^{p\prime}$$

[1] Vietoris, l. c. p. 458.

[2] In offenen Mengen ist jede Fundamentalfolge einem geometrischen Zykel homolog.

[3] Wie ich erst nach Fertigstellung dieser Arbeit erfuhr, wurden ähnliche Sätze für $n = 2$ und $h = 1$ bereits bewiesen von Brouwer, Math. Ann., Bd. 72, p. 422 und Alexandroff, Math. Ann., Bd. 96, p. 527.

[4] Die Vermutung, daß sich der Alexander'sche Satz mit Hilfe einer derartigen Approximation werde beweisen lassen, teilte mir Herr Prof. Vietoris mit.

und bilden mit ihr eine Umschlingungsmatrix von $A_{(1)}$ und $S_n - A_{(1)}$:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & C^{1'} & C^{2'} & C^{k'} & C^{k_1+1'} & & .\, C^{p_1'} \\
\hline
\Gamma^{1'} & a_{11} & a_{12} & .\, a_{1\,k_1} & a_{1,\,k_1+1} & & .\, a_{1\,p_1} \\
\Gamma^{2'} & a_{21} & a_{22} & .\, a_{2\,k_1} & a_{2,\,k_1+1} & & .\, a_{2\,p_1} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \\
\end{array}$$

Dabei ist Det. $|a_{ik}| \equiv 1$ (Mod. 2). Entwickelt man $|a_{ik}|$ nach Laplace nach den ersten k_1-Spalten, so erkennt man, daß die Determinante mindestens einer Matrix aus den ersten k_1-Spalten $\equiv 1$ (Mod. 2) ist. Eine solche bringen wir in die linke obere Ecke und verwandeln sie in eine Diagonalmatrix. Dadurch erhalten wir:

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & C^{1} & C^{2} & .\, C^{k_1} & C^{k_1+1'} & & .\, C^{p_1'} \\
\hline
\Gamma^{1} & 1 & 0 & .\, 0 & b_{1,\,k_1+1} & & ..\, b_{1\,p_1} \\
\Gamma^{2} & 0 & 1 & 0 & b_{2,\,k_1+1} & & .\, b_{2\,p_1} \\
 & & & & & & \\
\Gamma^{k_1} & 0 & 0 & 1 & b_{k_1,\,k_1+1} & & .\, b_{k_1\,p_1} \\
\Gamma^{k_1+1'} & b_{k_1+1,\,1}\,. & & & & & \\
 & & & & & & \\
\Gamma^{p_1'} & & & & & & \\
\end{array}$$

Die Zykel $\Gamma^1, \Gamma^2, \ldots \Gamma^{k_1}$ sind in $S_n - A$ unabhängig, denn setzen wir z. B. $\Gamma^1 + \ldots + \Gamma^s = R(\Delta)$ und entspricht dem Zykel C^1 in A die Fundamentalfolge

$$\{C^{(1)}, C^{(2)}, \quad .\},$$

so trifft Δ nach der Definition der Umschlingungszahlen fast alle (geometrischen) $C^{(i)}$ und daher auch ihre Näherungsgrenze, welche in A enthalten ist. Zu $C^1, C^2, \quad .\, C^{k_1}$ gibt es auch in $A_{(2)}$ homologe Zykel, welche wir ebenso bezeichnen wollen; wir nehmen nun eine Basis für die h-Zykel von $A_{(2)}$, welche mit $C^1, C^2, \quad C^{k_1}$ beginnt; die darauf folgenden Basiszykel

$$C^{k_1+1}, \qquad C^{k_2}$$

sollen in $A_{(2)}$ zu Fundamentalfolgen von A homolog sein. Dazu nehmen wir eine Basis für die $n-h-1$-Zykel von $S_n - A_{(2)}$, die mit $\Gamma^1, \ldots \Gamma^{k_1}$ beginnt. Die Umschlingungsmatrix können wir dann auf die Form bringen:

	C^1	C^2	C^{k_1}	$C^{k_1+1'}$	$C^{k_2'}$	$. C^{p_2'}$
Γ^1	1	0	0	0		$.0$
Γ^2	0	1	0	0		$.0$
Γ^{k_1}	0	0	1	0		$.0$
$\Gamma^{k_1+1'}$	0	0	0	c_{11}		$. c_{1, p_2-k_1}$
$\Gamma^{p_2'}$	0	0	0	$c_{p_2-k_1, 1}$		$. c_{p_2-k_1, p_2-k_1}$

Dabei ist $|c_{ik}| \equiv 1$ (Mod. 2); infolgedessen ist mindestens eine ihrer Unterdeterminanten aus den Spalten $k_1+1, \quad . k_2$ kongruent 1 (Mod. 2); eine solche schaffen wir wieder in die linke obere Ecke, verwandeln sie in eine Diagonalmatrix und erhalten schließlich:

(*)

	$C^1 .$	C^{k_2}	$C^{k_2+1'}$	$C^{p_2'}$
Γ^1	1	$.0$	0	0
Γ^{k_2}	0	$.1$	0	0
$\Gamma^{k_2+1'}$	0	$.0$	d_{11}	d_{1, p_2-k_2}
$\Gamma^{p_2'}$	0	$.0$	$d_{p_2-k_2, 1}$	$d_{p_2-k_2, p_2-k_2}$

Dabei sind $C^{k_1+1}, \ldots C^{k_2} \sim 0$ in $A_{(1)}$ wie man leicht erkennt.

Diesen Vorgang wiederholen wir mit $A_{(3)}$, $A_{(4)}$ u. s. f. und erhalten dadurch eine endliche oder unendliche Matrix:

	$C^1,$	$C^2,$	$C^3,$
Γ^1	1	0	0
Γ^2	0	1	0
Γ^3	0	0	1

Es muß nur noch gezeigt werden, daß 1. die C^i und 2. die Γ^k Basen bilden.

1. Wir zeigen zunächst: Ist eine Fundamentalfolge

$$\{C^{(1)}, C^{(2)}, \quad .\} = C$$

von A in allen $A_{(\nu)}$ homolog 0, so ist sie auch in A homolog 0.

Sei also

$$C^{(i)} = R(D_\nu^{(i)}),\ D_\nu^{(i)} \leq A_{(\nu)},\ D_\nu^{(i)} < \varepsilon_\nu^{(i)},^{1}\ \lim_{i \to \infty} \varepsilon_\nu^{(i)} = 0.$$

Man kann annehmen, daß auch

$$\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i^{(i)} = 0$$

ist. Ordnen wir jedem Eckpunkt von $D_i^{(i)}$ einen möglichst nahen Punkt von A zu, so erhalten wir einen Komplex

$$E^{(i)} < A,\ C^{(i)} = R(E^{(i)}),\ E^{(i)} < \varepsilon_i,\ \lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0\ \ w.z.b.w.$$

C sei also in $A_{(\nu_1)}$ zum erstenmal nicht ~ 0, sondern

$$\sim \sum_{i=1}^{k_{\nu_1}} a_i\, C^i;$$

ist dann

$$C_{(1)} = C + \sum_{i=1}^{k_{\nu_1}} a_i\, C^i \sim 0 \text{ in } A,$$

so ist die Behauptung bewiesen; andernfalls ist $C_{(1)}$ etwa in $A_{(\nu_2)}$ zum erstenmal nicht ~ 0, sondern

$$\sim \sum_{i=k_{\nu_1}+1}^{k_{\nu_2}} a_i\, C^i;$$

so fahren wir fort; sind unendlich viele Schritte erforderlich, so existiert eine Zahlenfolge

$$\varepsilon_\mu,\ \lim_{\mu \to \infty} \varepsilon_\mu = 0,\ C_{(\mu)} \sim_{\varepsilon_\mu} 0 \text{ in } A;$$

also ist

$$C \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, C^i \text{ in } A,\ \ w.z.b.w.$$

1 D. h. jeder Simplex von $D^i_{(\nu)}$ hat einen Durchmesser $< \varepsilon^i_{(\nu)}$.

2. Die Basen

$$C^1, C^2, \ldots C^{k_1}, C^{k_1+1'}, \ldots C^{p_1'} \text{ und } \Gamma^1, \Gamma^2, \ldots \Gamma^{k_1}, \Gamma^{k_1+1'}, \ldots \Gamma^{p_1'}$$

mögen eine Umschlingungsmatrix von $A_{(1)}$ und $S_n - A_{(1)}$ liefern analog der Matrix (*) auf p. 694. Mögen nun in dem Ausdruck

$$C = \sum_{i=1}^{k_1} a_i C^i + \sum_{i=k_1+1}^{p_1} b_i C^{i'}$$

nicht alle b_i verschwinden. Dann gibt es für genügend große ν keinen h-Zykel mehr in $A_{(\nu)}$, der in $A_{(1)}$ zu C homolog ist; andernfalls wäre nämlich C in $A_{(1)}$ zu einer Fundamentalfolge von A homolog. (Andernfalls gäbe es in jedem $A_{(\gamma)}$ einen Zykel $C_{1\gamma}$, der in $A_{(1)}$ zu $C = C_{11}$ homolog ist; da es in $A_{(2)}$ nur endlich viele untereinander nicht homologe Zykel gibt, sind von den Zykeln $C_{12}, C_{13}, \ldots$ unendlich viele in $A_{(2)}$ homolog; diese nennen wir $C_{22}, C_{23}, \ldots$; von diesen sind wieder unendlich viele in $A_{(3)}$ homolog, und zwar $C_{33}, C_{34} \ldots$ so fahren wir fort. Die Zykel $C_{11}, C_{22}, \ldots$ konvergieren offenbar in $A_{(1)}$ gegen eine Fundamentalfolge von A, woraus die Behauptung folgt.) Weiters ist jede Linearkombination von

$$\Gamma^{k_1+1'}, \ldots \Gamma^{p_1'} \text{ in } S_n - A^{(\nu)} \text{ homolog } 0;$$

denn sie umschlingt nur solche h-Zykel von $A_{(1)}$ und daher von $A_{(\nu)}$, welche von der eben beschriebenen Form C sind; diese sind aber in $A_{(\nu)}$ nicht mehr vertreten. Wäre sie aber in $S_n - A_{(\nu)}$ nicht homolog 0, so müßte sie einen h-Zykel von $A_{(\nu)}$ umschlingen.

Ist nun Γ ein $n-h-1$-Zykel von $S_n - A$, so können wir annehmen, er liege in $S_n - A_{(1)}$; dann ist

$$\Gamma \sim \sum_{i=1}^{k_1} c_i \Gamma^i + \sum_{i=k_1+1}^{p_1} d_i \Gamma^{i'} \text{ in } S_n - A_{(1)}. \quad \sum_{i=k_1+1}^{p_1} d_i \Gamma^{i'}$$

ist aber nach dem Vorigen in $S_n - A_{(\nu)}$ und daher auch in $S_n - A$ homolog 0; also ist

$$\Gamma \sim \sum_{i=1}^{k_1} c_i \Gamma^i \text{ in } S_n - A, \; w.z.b.w.$$

Damit ist Satz 3 bewiesen.[1]

Wir kombinieren nun unseren Satz mit folgendem Satz von Vietoris:[2]

---

[1] Aus Satz 3 kann man eine neue Formulierung des bekannten Moore'schen Satzes über stetige Abbildungen der Ebene ableiten, nämlich: Wird eine Ebene stetig mit einfach zusammenhängenden Urbildmengen auf eine Menge B abgebildet, so ist B der Ebene homöomorph.

[2] Vietoris, l. c. p. 454.

Wird eine in sich kompakte Menge A stetig auf eine Menge B abgebildet derart, daß die Zusammenhangszahlen der Urbildmengen verschwinden, so sind die Zusammenhangszahlen von A mit denen von B identisch.

Dadurch erhalten wir:

Satz 4. *Sei eine abgeschlossene Teilmenge A der S_n stetig auf eine Menge B abbildbar derart, daß die Zusammenhangszahlen der Urbildmengen verschwinden; ist dann z_h die h-te Zusammenhangszahl von B und $\bar{z}_h$ die von*

$$S_n - A, \text{ so gilt: } \bar{z}_h = z_{n-h-1}.$$

Daraus folgert man leicht:

Satz 4 *a. Sei eine abgeschlossene Teilmenge A der S_n $(n \geqq 2)$ stetig auf eine Menge B abbildbar derart, daß die 0-ten, 1-ten. $n-1$-ten Zusammenhangszahlen der Urbildmengen verschwinden, wobei B zusammenhängend sei und auch durch Weglassung eines einzigen Punktes niemals zerfalle; sind dann $G_1, G_2, .$ diejenigen Komponenten von $S_n - A$, deren Grenzen ganz in einzelnen Urbildmengen liegen, z_h die h-te Zusammenhangszahl von B und $\bar{z}_h$ die von*

$$S_n - (A + \Sigma\, G_i), \text{ so gilt: } \bar{z}_h = z_{n-h-1}.$$

Ist nämlich U irgendeine Urbildmenge, so ist $A - U$ zusammenhängend und liegt daher in einer einzigen Komponente von $S_n - U$; alle übrigen Komponenten sind zu A fremd und daher identisch mit denjenigen G_i, deren Grenzen ganz in U liegen; vereinigen wir diese mit U, so erhalten wir eine Menge $\overline{U}$, deren Zusammenhangszahlen verschwinden; man kann nun

$$A + \sum_i G_i$$

stetig auf B abbilden derart, daß die $\overline{U}$ die Urbildmengen sind; damit ist der Satz auf Satz 4 zurückgeführt.

Der Satz gilt insbesondere, wenn B eine S_{n-1} ist; in diesem Falle läßt sich leicht beweisen, daß beide Komponenten von

$$S_n - (A + \Sigma\, G_i)$$

an alle Urbildmengen grenzen. Spezialisierung auf $n = 2$ ergibt:

Satz 4 *b. Ist ein beschränktes Kontinuum A der Ebene E stetig mit zusammenhängenden Urbildmengen auf einen Kreis abbildbar, so enthält $E - A$ genau zwei Komponenten, die »ausgezeichneten«, die an alle Urbildmengen grenzen; die Grenzen anderer eventuell noch existierender Komponenten liegen ganz in einzelnen Urbildmengen.*

Das Urbild eines abgeschlossenen Kreisbogens bei einer solchen Abbildung heiße ein Bogenurbild, die Urbilder seiner Endpunkte Endelemente des Bogenurbildes. Die beiden Bogenurbilder mit den Endelementen K_1 und K_2 bezeichnen wir mit $[K_1 K_2]$ und $K_2 K_1]$. Zieht man nun in einer ausgezeichneten Komponente G von $E—A$ einen Querschnitt $\underset{\sim}{Q}$, der die Urbildmengen K_1 und K_2 verbindet, so zerfällt G in zwei Komponenten G_1 und G_2; dabei ist

$$R(G_1) \leq \underset{\sim}{Q} + [K_1 K_2] \text{ und } R(G_2) \leq \underset{\sim}{Q} + [K_2 K_1].$$

Dies erkennt man, wenn man beachtet, daß

$$\underset{\sim}{Q} + [K_1 K_2] \text{ und } \underset{\sim}{Q} + [K_2 K_1]$$

sich in Satz $4b$ für A einsetzen lassen. Daraus folgert man leicht:

Satz 5. *Erfüllt A die Bedingungen des Satzes $4\,b$ und ist G eine ausgezeichnete Komponente von $E—A$, so gilt:*

a) Der Durchschnitt des Endes einer Kette von Querschnitten[1] *von G enthält entweder den Durchschnitt eines Bogenurbildes mit $R(G)$ oder liegt ganz in einer Urbildmenge.*

b) Der Durchschnitt jeder Urbildmenge und jedes Bogenurbildes mit $R(G)$ ist als Ende einer Kette von Querschnitten von G darstellbar.

$5\,b$) schließt man daraus, daß in jedem Bogenurbild Urbildmengen liegen, die von G aus geradlinig erreichbar sind.

Aus Satz 5 folgt weiters:

Satz 6. *Der Rand R eines (einfach zusammenhängenden) ebenen Gebietes kann auf (bis auf Homöomorphien des Bildkreises in sich) höchstens eine Art mit zusammenhängenden und in R nirgendsdichten Urbildmengen auf einen Kreis abgebildet werden.*

Nehmen wir nämlich an, es wären zwei Abbildungen T_1 und T_2 möglich.

Nach Satz $5\,b$ können wir jede T_1-Urbildmenge U_1 als Ende einer Kette darstellen; dieses enthält nach Satz $5\,a$ entweder ein ganzes T_2-Bogenurbild oder liegt ganz in einer T_2-Urbildmenge U_2; da U_1 in R nirgendsdicht ist, ist nur der zweite Fall möglich, also: $U_1 \leq U_2$. Ebenso zeigt man $U_2 \leq U_1$, mithin $U_1 = U_2$. Daraus folgt der Satz.

Hat nun ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet der Ebene nur einfache Randpunkte,[2] so können die Prim-Enden als Urbildmengen einer solchen Abbildung des Randes aufgefaßt werden. Daraus ergibt sich:

---

[1] Carathéodory, Math. Annalen, Bd. 73, p. 33..

l. c. p. 363.

Satz 7. *Die Prim-Enden eines einfach zusammenhängenden Gebietes der Ebene können ohne Benützung des Gebietes durch die Topologie des Randes charakterisiert werden, und zwar sind sie die Urbildmengen der im wesentlichen einzigen in Satz 6 beschriebenen Abbildung.*

In diesem Fall nennen wir die Bogenurbilder Prim-Enden-Bögen.

Zum Schluß können wir noch beweisen:

Satz 8. *Damit die Prim-Enden-Bögen* $[P_1 P_2]$ *eines einfach zusammenhängenden beschränkten Gebietes* G *der Ebene zwischen* P_1 *und* P_2 *irreduzibel seien, ist notwendig und hinreichend, daß, wenn* H *die andere ausgezeichnete Komponente von* $E-R(G)$ *ist,* $R(G) = R(H)$ *sei.*

1. Die Bedingung ist hinreichend. Gäbe es ein echtes Teilkontinuum C von $[P_1 P_2]$, das P_1+P_2 umfaßt und etwa den Punkt a des Prim-Endes $P \leq [P_1 P_2]$ nicht enthält, so wäre $G+(a)+H$ zusammenhängend und läge ganz in einer Komponente von $E-([P_1 P_2]+C)$. Nun läßt sich aber $[P_1 P_2]+C$ in Satz $4b$ für A einsetzen, wenn man C und die dazu fremden Prim-Enden aus $[P_1 P_2]$ als Urbildmengen nimmt; es gibt also zwei ausgezeichnete Komponenten von $E-([P_1 P_2]+C)$. Jede von ihnen enthält eine ausgezeichnete Komponente von $E-R(G)$, während wir doch eben festgestellt haben, daß G und H in derselben Komponente von $E-([P_1 P_2]+Q)$ liegen.

2. Die Bedingung ist notwendig. Im gegenteiligen Fall gäbe es einen Prim-Enden-Bogen $[P_1 P_2]$ und ein Prim-Ende

$$P \neq P_1, P_2, P \leq [P_1 P_2],$$

welches nicht ganz in $R(H)$ enthalten ist. Da $[P_1 P_2]R(H)$ nach Satz $5b$ zusammenhängend ist, wäre dann

$$P_1+P_2+[P_1 P_2]R(H)$$

ein echtes Teilkontinuum von $[P_1 P_2]$, das P_1+P_2 enthält.

In diesem Fall sind die Prim-Enden identisch mit den Kuratowski'schen Tranchen;[1] mit den Hahn'schen Prim-Teilen[2] sind sie im allgemeinen nicht identisch; es gibt sogar ein Beispiel für ein Gebiet, dessen Prim-Enden alle mehrpunktig und zueinander fremd sind und dessen Rand daher nirgends zusammenhängend im kleinen ist.[3]

---

[1] Kuratowski, Fund. Math., Bd. 10, p. 250.

[2] Hahn, Wiener Berichte, 1921, p. 224.

[3] Siehe meine Dissertation.