Gedruckt mit Unterstützung aus dem Jerome und Margaret Stonborough-Fonds

Über die Berechnung kinetostatisch unbestimmter Systeme

Von

Dr. Rudolf Girtler (Brünn)

(Mit 1 Textfigur)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. Jänner 1928)

In der angewandten Dynamik starrer Körper haben die Probleme sogenannter dynamischer oder mit Heun besser gesagt kinetostatischer Unbestimmtheit, von gelegentlichen Einstreuungen in der Literatur abgesehen, meines Wissens keine prinzipielle Behandlung erfahren. Die nachstehende Arbeit will in dieser Hinsicht einige Schritte tun, und zwar unter Zuhilfenahme des Prinzips des kleinsten Zwanges von Gauß, das einen brauchbaren Ausgangspunkt zur Herleitung von in der Kinetik deformierbarer Körper verwendbaren Sätzen bildet, die, wie nachgewiesen werden wird, unter kinetischen Verhältnissen eine analoge Rolle spielen können, wie die Lehrsätze von Menabrea-Castigliano für innerlich oder äußerlich statisch unbestimmte Systeme in der Statik.

I.

Bevor zur Ableitung dieser Sätze geschritten wird, sei kurz an die Definition der kinetostatischen Unbestimmtheit eines starren Systems und an das Wesen des Gauß'schen Prinzips des kleinsten Zwanges erinnert. Ist der Freiheitsgrad einer Körperkette oder eines Körpersystems von n starren Körpern gleich k, so stehen $z = 6n - k$ stereokinetostatische Gleichungen zur Bestimmung der p unbekannten Reaktionen (Verbindungskräfte) zur Verfügung. Ist die Zahl der unbekannten Reaktionen $p > 6n - k$, so reicht die Annahme der Starrheit zur Bestimmung der Reaktionen nicht aus, die Körperkette heißt dann $p - z$fach kinetostatisch unbestimmt. Diese Unbestimmtheit kann sich sowohl auf mit Bezug auf das Körpersystem innere Verbindungskräfte oder Verbindungsmomente zwischen den einzelnen Gliedern der Kette (innere kinetostatische Unbestimmtheit) erstrecken, als auch auf solche Reaktionen, die mit Bezug auf die Kette als äußere Verbindungskräfte oder Verbindungsmomente bezeichnet werden müssen (äußere kinetostatische Unbestimmtheit).

Das Gauß'sche Prinzip des kleinsten Zwanges[1] sagt bekanntlich aus, daß jede Bewegung eines unfreien Systems in möglichster

[1] Siehe z. B.: Enzyklopädie der math. Wissenschaften, IV., 1, Artikel von Voß, oder Mach, Geschichte der Mechanik, 1904, p. 391.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Übereinstimmung mit der freien Bewegung erfolgt, derart, daß der Zwang Z, das ist die Summe der Produkte der Massen der einzelnen Punkte in die Quadrate ihrer Abweichungen von der freien Bewegung für zwei aufeinanderfolgende Zeitelemente, ein Minimum wird. Dabei wird angenommen, daß jeder Massenpunkt des unfreien Systems zur Zeit t dieselbe Lage und Geschwindigkeit wie die freie Bewegung besitzt und nur dessen Beschleunigung fraglich ist. Letztere muß nach Gauß den Zwang zu einem Minimum machen. Die Beschleunigung wird demnach bei Aufstellung der Minimumsbedingung als Variable zu betrachten sein. Bezeichnen wir die Verbindungskraft, welche im Zeitelement dt die Abweichung eines Systempunktes des unfreien Systems mit der Masse m_i von der freien Bewegung bedingt, mit $\mathfrak{V}_i$, so ist der Abweichungsweg $\mathfrak{s}_i$ von der freien Bewegung für diesen Punkt $\mathfrak{s}_i = \frac{\mathfrak{V}_i dt^2}{2\, m_i}$, also der Zwang Z für das ganze System bei Hinweglassung des Faktors $\frac{dt^4}{4}$, der als konstant anzusehen ist, durch

$$Z = \sum \left(\frac{\mathfrak{V}_i}{m_i}\right)^2 m_i = \sum \frac{1}{m_i}\left(m_i \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} - \mathfrak{P}_i\right)^2 =$$

$$= \sum \frac{1}{m_i}\left[(m_i\ddot{x}_i - P_{i,x})^2 + (m_i\ddot{y}_i - P_{i,y})^2 + (m_i\ddot{z}_i - P_{i,z})^2\right] \qquad (a)$$

gegeben, wenn die variabel gedachte Beschleunigung eines Systempunktes durch $\ddot{\mathfrak{r}}_i = \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2} = i\ddot{x} + j\ddot{y} + k\ddot{z}$ und die an ihm angreifende (wirkende) Kraft durch $\mathfrak{P}_i = iP_{i,x} + jP_{i,y} + kP_{i,z}$ bezeichnet werden. Abgesehen von dem Faktor $\frac{dt^4}{4}$ ist die Dimension eines Zwanges demnach $gr\, cm^2\, \sec^{-4}$. Damit der Zwang bei variabel gedachter Beschleunigung ein Minimum werde, muß die Bedingung

$$\sum (m_i\ddot{\mathfrak{r}}_i - \mathfrak{P}_i)\,\delta\ddot{\mathfrak{r}}_i = \sum (m_i\ddot{x}_i - P_{i,x})\,\delta\ddot{x}_i + (m_i\ddot{y}_i - P_{i,y})\,\delta\ddot{y}_i +$$

$$+ (m_i\ddot{z}_i - P_{i,z})\,\delta\ddot{z}_i = \Theta \qquad (b)$$

erfüllt sein. Sie ist als besondere Form des d'Alembert'schen Prinzips auffaßbar.

Ist die Lage eines Systempunktes zur Zeit $t - dt$ durch $\bar{\mathfrak{r}}_i$ gegeben, so ist dessen Lage, wenn er frei wäre, nach zwei Zeitelementen dt, also zur Zeit $t + dt$, durch

$$\bar{\mathfrak{r}}_i + 2\frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i}{dt}\,dt + \frac{1}{2}\frac{d^2\bar{\mathfrak{r}}}{dt^2}\,dt$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

bestimmt, wenn $\frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i}{dt}$, beziehungsweise $\frac{d^2\bar{\mathfrak{r}}_i}{dt^2}$ die Geschwindigkeit, beziehungsweise die Beschleunigung der freien Bewegung zur Zeit t bedeuten. Weil aber der Punkt im allgemeinen unfrei sein soll, also seine Bewegung an Bedingungsgleichungen geknüpft ist, so ist seine Lage zur Zeit $t+dt$ durch

$$\bar{\mathfrak{r}}_i + 2\frac{d\bar{\mathfrak{r}}_i}{dt}dt + \frac{\mathfrak{P}_i+\mathfrak{V}_i}{2m_i}dt^2$$

festgelegt. Da die Abweichung jetzt durch

$$\frac{dt^2}{2}\left(\frac{d^2\bar{\mathfrak{r}}_i}{dt^2} - \frac{\mathfrak{P}_i+\mathfrak{V}_i}{m_i}\right)$$

gegeben ist, kann der Zwang wieder bei Hinweglassung des als konstant anzusehenden Faktors $\frac{dt^4}{4}$ auch in der Form

$$Z = \sum \frac{1}{m_i}\left[m_i\frac{d^2\bar{\mathfrak{r}}_i}{dt^2} - (\mathfrak{P}_i+\mathfrak{V}_i)\right]^2 = \sum m_i\left(\frac{d^2\bar{\mathfrak{r}}_i}{dt^2} - \frac{d^2\mathfrak{r}_i}{dt^2}\right)^2 =$$

$$= \sum m_i(\ddot{\bar{\mathfrak{r}}}_i - \ddot{\mathfrak{r}}_i)^2 \qquad (1)$$

geschrieben werden, worin $\mathfrak{V}_i$ oder die Beschleunigung der wirklichen Bewegung $\ddot{\mathfrak{r}}_i$ bei Aufstellung der Minimumsbedingung als variabel aufgefaßt werden muß. Im Folgenden werden wir uns der Form (1) des Zwanges bedienen. Schließlich mag noch die Bemerkung eingeschaltet werden, daß durch eine weitere Beschränkung des Freiheitsgrades eines vorliegenden unfreien Systems der Zwang erhöht wird, aber derart, daß diese Erhöhung ein Minimum wird bei gegebenem wirkendem Kraftsystem.

Denn liegt ein System von n-Punkten mit dem Freiheitsgrade $k < 3n$ vor, so ist der Zwang durch (1) gegeben. Setzen wir den Freiheitsgrad k durch Hinzufügung neuer Bedingungen auf den Grad $k_1 < k$ herab, derart, daß das wirkende Kraftsystem jetzt zufolge dieser neu hinzutretenden Bedingungen im Gleichgewichte stehen muß, so ist der Zwang gegenüber der freien Bewegung nunmehr

$$Z_1 = \sum m_i(\ddot{\bar{\mathfrak{r}}}_i - \ddot{\mathfrak{r}}_{i,g})^2 \qquad (1a)$$

mit der Bedingung, daß $\ddot{\mathfrak{r}}_{i,g}$ im Falle des Gleichgewichtes verschwindet. Die Minimumsbedingungen für (1) und (1a) besagen, daß

$$\sum m_i(\ddot{\bar{\mathfrak{r}}}_i - \ddot{\mathfrak{r}}_i)\,\delta\,\mathfrak{r}_i = \Theta \text{ und } \sum m_i\,\ddot{\bar{\mathfrak{r}}}_i\,\delta\,\ddot{\mathfrak{r}}_{i,g} = \Theta.$$

Demzufolge muß auch die Erhöhung des Zwanges $\triangle Z$ ein Minimum sein:

$$\triangle Z = Z_1 - Z = \sum m_i[(\ddot{\bar{\mathfrak{r}}}_i - \ddot{\mathfrak{r}}_{i,g})^2 - (\ddot{\bar{\mathfrak{r}}}_i - \ddot{\mathfrak{r}}_i)^2].$$ [1]

[1] Siehe hiezu auch Mach l. c.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

II.

Es liege nunmehr eine elastische, isotrope und homogene, im allgemeinen kinetostatisch unbestimmte (unfreie) Körperkette von überall gleicher Temperatur vor, die in ihren einzelnen Gliedern mit Masse kontinuierlich erfüllt ist, und von der wir voraussetzen wollen, daß die unter dem Einfluß äußerer wirkender Kräfte entstehenden elastischen Verschiebungen $\mathfrak{d} = \mathfrak{u} + \mathfrak{v} + \mathfrak{w}$ nicht nur aus dem spannungslos gedachten Anfangszustand sich ergeben und stetige Funktionen von x, y, z und der Zeit t, sondern auch sehr klein sind und dem Hooke'schen sowie dem Superpositionsgesetze folgen. Die Bewegung, welche das Körpersystem ausführt, können wir uns als eine Übereinanderlagerung zweier Bewegungen vorstellen, jener, welche die Körperkette machen würde, wenn sie starr wäre, und der aus dem Auftreten von mit der Zeit variablen Verschiebungen abgeleiteten elastischen Bewegung. Die letztere allein wird im Folgenden betrachtet. Für jedes Systemglied müssen bei Festhaltung der genannten Voraussetzungen und Einführung rechtwinkliger Koordinaten für jeden Punkt im Innern des Systems die drei Spannungsgleichungen

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + S_x = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \ddot{u} \tag{c}$$

und für jeden Punkt der Oberfläche die drei Grenzbedingungen

$$X_n = \sigma_x \cos(nx) + \tau_{xy} \cos ny + \tau_{xz} \cos(nz), \tag{d}$$

ferner das erweiterte Hooke'sche Gesetz:

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_y + \sigma_z)\right). \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{e}$$

für den Zusammenhang der sechs Verzerrungskomponenten mit den sechs Spannungskomponenten erfüllt sein. In diesen Beziehungen bedeuten bekanntlich $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ die Spannungskomponenten, X_n, Y_n, Z_n die Komponenten der auf ein Flächenelement an der Oberfläche des Systemgliedes mit der Normalen n entfallenden Oberflächenkraft pro Flächeneinheit, S_x, S_y, S_z, die Komponenten der Massenkraft pro Volumseinheit, u, v und w die Verschiebungskomponenten, $e_{xx}, e_{yy}\ e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$ die Dehnungen beziehungsweise Schiebungen, E und G die das elastische Verhalten eines isotropen Körpers bestimmenden Elastizitätskonstanten, μ die Massendichtigkeit. Differenzieren wir die allgemein in der Zahl 6 vorhandenen Beziehungen (e) zweimal nach der Zeit, so erhalten wir solche nach der Form

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 e_{xx}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} = \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} = \frac{1}{E}\left[\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} - \frac{1}{m}\left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial t^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{E}\left[\ddot{\sigma}_x - \frac{1}{m}(\ddot{\sigma}_y + \ddot{\sigma}_z)\right] \\ \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial t^2} &= \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial t^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} = \frac{\partial \ddot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial x} = \frac{1}{G}\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial t^2} = \frac{1}{G}\ddot{\tau}_{xy}.\end{aligned}\right\} \quad (f)$$

Die Größen u, $\dot{v}$ $\dot{w}$ beziehungsweise $\ddot{u}$, $\ddot{v}$, $\ddot{w}$ sind in der Folge als Komponenten der wirklichen Verschiebungsgeschwindigkeiten beziehungsweise Verschiebungsbeschleunigungen bezeichnet. Der Zwang, den die Bewegung der kinetostatisch unbestimmt vorausgesetzten elastischen Körperkette infolge ihrer Abweichung von der freien Bewegung in zwei aufeinanderfolgenden Zeitelementen erfahren soll, ist bei formaler Übertragung der Beziehung (1) auf ein Kontinuum durch

$$Z = \int \mu \left[(\bar{\ddot{u}} - \ddot{u})^2 + (\bar{\ddot{v}} - \ddot{v})^2 + (\bar{\ddot{w}} - \ddot{w})^2\right] dx\, dy\, dz \tag{2}$$

gegeben. $\bar{\ddot{u}}$, $\bar{\ddot{v}}$, $\bar{\ddot{w}}$ sind hierin die Komponenten der Verschiebungsbeschleunigungen, die auftreten würden, wenn das System frei wäre, d. h. es keine Punkte gäbe, die eine Beschränkung ihrer Bewegungsfreiheit erführen. Die wirklichen Verschiebungsbeschleunigungen $\ddot{u}$, $\ddot{v}$, $\ddot{w}$ des kinetostatisch unbestimmten Systems müssen derartig sein, daß sie die Beziehung (2) zu einem Minimum machen. Da zufolge (c) die Differenzen der Komponenten der Verschiebungsbeschleunigungen aus

$$\mu(\bar{\ddot{u}} - \ddot{u}) = \frac{\partial(\bar{\sigma}_x - \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{xy} - \tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{xz} - \tau_{xz})}{\partial z}$$

usw. gegeben sind, so lautet die Minimumsbedingung

$$\begin{aligned}\delta Z = \Theta = \int \Bigg\{ &(\bar{\ddot{u}} - \ddot{u})\left[\frac{\partial \delta(\bar{\sigma}_x - \sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial \delta(\bar{\tau}_{xy} - \tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial \delta(\bar{\tau}_{xz} - \tau_{xz})}{\partial z}\right] + \\ &(\bar{\ddot{v}} - \ddot{v})\left[\frac{\partial \delta(\bar{\tau}_{yx} - \tau_{yx})}{\partial x} + \frac{\partial \delta(\bar{\sigma}_y - \sigma_y)}{\partial y} + \partial \delta(\bar{\tau}_{yz} - \tau_{yz})\right] + \\ &(\bar{\ddot{w}} - \ddot{w})\left[\frac{\partial \delta(\bar{\tau}_{zx} - \tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial \delta(\bar{\tau}_{yz} - \tau_{zy})}{\partial y} + \frac{\partial \delta(\bar{\sigma}_z - \sigma_z)}{\partial z}\right]\Bigg\} dx\, dy\, dz\end{aligned}$$

wobei die Variation nach den wirklich auftretenden Spannungskomponenten σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy} ... vorzunehmen ist. Hiezu wäre noch zu bemerken, daß zwar im Gauß'schen Zwang für den betrachteten Zeitaugenblick die Beschleunigungen der wirklichen Bewegungen der einzelnen Massenelemente als Variable zu gelten haben, bei

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

vorausgesetzten gleichen Lagen und Geschwindigkeiten der Massenelemente einerseits bei der wirklichen Bewegung, anderseits bei der freien Bewegung. Da aber die Variation der Beschleunigung an die Beziehung (*c*) gebunden ist, so kann offenbar an die Stelle der Variation des Beschleunigungszustandes jene des Spannungszustandes treten. Führen wir die Variation in den eckigen Klammerausdrücken durch, wobei die mit einem Querstrich versehenen Spannungen als konstant zu betrachten sind und integrieren hierauf partiell nach x, y, z, so erhalten wir bei Beachtung der Beziehungen (*d*)

$$\Theta = \int_v \left[\delta\sigma_x \frac{\partial(\ddot{u}-\bar{\ddot{u}})}{\partial x} + \delta\sigma_y \frac{\partial(\ddot{v}-\bar{\ddot{v}})}{\partial y} + \delta\sigma_z \frac{\partial(\ddot{w}-\bar{\ddot{w}})}{\partial z} + \delta\tau_{xy}\left(\frac{\partial(\ddot{u}-\bar{\ddot{u}})}{\partial y} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\partial(\ddot{v}-\bar{\ddot{v}})}{\partial x} \right) + \delta\tau_{yz}\left(\frac{\partial(\ddot{v}-\bar{\ddot{v}})}{\partial z} + \frac{\partial(\ddot{w}-\bar{\ddot{w}})}{\partial y} \right) + \delta\tau_{zx}\left(\frac{\partial(\ddot{w}-\bar{\ddot{w}})}{\partial x} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial(\ddot{u}-\bar{\ddot{u}})}{\partial z} \right) \right] dx\,dy\,dz - \int_0 \left[\delta X_n(\ddot{u}-\bar{\ddot{u}}) + \delta Y_n(\ddot{v}-\bar{\ddot{v}}) + \delta Z_n(\ddot{w}-\bar{\ddot{w}}) \right] do,$$

worin das erste Integral über das Volumen, das zweite Integral über die Oberfläche des elastischen Systems zu nehmen ist. Letzteres kann als verschwindend angenommen werden, und zwar aus dem folgenden Grunde. Die Variationen, die an den Oberflächenkräften des elastischen Systems vorgenommen werden können, beziehen sich teils auf das angreifende Kraftsystem P, das am freien System vorhanden ist, teils auf das System der Verbindungskräfte (Reaktionen), das am unfreien Körper zum Kraftsystem P hinzutritt. Beide Variationen dürfen 0 gesetzt werden. Es verschwindet dann in der vorstehenden Beziehung das Oberflächenintegral und die verbleibende Restgleichung drückt die Bedingung aus, die das Spannungssystem des elastischen Körpers bei einem gegebenen Oberflächen- und Massenkraftsystem erfüllen muß. Wir können somit unter den angegebenen Voraussetzungen schreiben:

$$\delta Z = 0 = \int_v \left[\left(\delta\sigma_x \frac{\partial(\ddot{u}-\bar{\ddot{u}})}{\partial x} + \delta\sigma_y \frac{\partial(\ddot{v}-\bar{\ddot{v}})}{\partial y} + \delta\sigma_z \frac{\partial(\ddot{w}-\bar{\ddot{w}})}{\partial z} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \delta\tau_{zx}\left(\frac{\partial(\ddot{w}-\bar{\ddot{w}})}{\partial x} + \frac{\partial(\ddot{u}-\bar{\ddot{u}})}{\partial z} \right) \right] dx\,dy\,dz. \qquad (3)$$

Wenn wir uns für den betrachteten Zeitaugenblick zu dem System der an dem gegebenen kinetostatisch unbestimmten elastischen Körperverband angreifenden (wirkenden) Kräften und den Verbindungskräften durch Wahl neuer Stützpunkte und Abänderung der Art der Verbindung der einzelnen Teile des Körperverbandes ein in jedem einzelnen Falle zu bestimmendes fingiertes System von Verbindungskräften oder Verbindungsmomenten so hinzufügen, daß ein Gleichgewichtszustand hergestellt wird, so läuft dieser Vorgang auf eine Erhöhung des Zwanges hinaus im Vergleich

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

zu dem Zwang, welchen der gegebene Körperverband erleidet. Die Minimumsbedingung für diesen Zwang, den wir mit Z_1 bezeichnen wollen, lautet gemäß (3), da $\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x}, \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y}, \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z}$ usw. für das Gleichgewichtssystem verschwinden.

$$\delta Z_1 = \int \left[\delta \sigma_x \frac{\partial \overline{\ddot{u}}}{\partial x} + \delta \sigma_y \frac{\partial \overline{\ddot{v}}}{\partial y} + \delta \sigma_z \frac{\partial \overline{\ddot{w}}}{\partial z} + \right.$$
$$\left. + \delta \tau_{zx} \left(\frac{\partial \overline{\ddot{w}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\ddot{u}}}{\partial z} \right) \right] dx\, dy\, dz. \qquad (4)$$

Die Deutung der Beziehung (3) beziehungsweise (4) ist einfach. Die infolge der Existenz von Verschiebungsbeschleunigungen in zwei aufeinanderfolgenden Zeitelementen dt sich ergebende Deformationsarbeit für ein Volumenelement $dx\, dy\, dz$ einer Normalspannung, z. B. σ_x, ist durch

$$\sigma_x \frac{1}{2} \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} dx\, dt^2\, dy\, dz,$$

die Deformationsarbeit einer Schubspannung, z. B. τ_{xy}, ist unter den gleichen Einschränkungen durch

$$dt^2 \tau_{xy} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial y} dy\, dx\, dz + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial x} dx\, dy\, dz \right)$$

gegeben. Die gesamte, über den gegebenen elastischen Körperverband sich erstreckende, in zwei aufeinanderfolgenden Zeitelementen infolge der Existenz von Verschiebungsbeschleunigungen geleistete Deformationsarbeit ist demnach

$$D = \frac{dt^2}{2} \int_v \left[\sigma_x \frac{\partial \ddot{u}}{dx} + \sigma_y \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial y} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial x} \right) + \right.$$
$$\left. + \tau_{yz} \left(\frac{\partial \ddot{v}}{\partial z} + \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{u}}{\partial z} \right) \right] dx\, dy\, dz = \frac{dt^2}{2} \int_v a\, dx\, dy\, dz, \qquad (5)$$

worin $a \frac{dt^2}{2}$ die Deformationsarbeit pro Volumseinheit für eine beliebige Stelle des Körperverbandes bedeutet.

Setzen wir in (5) für $\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x}, \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y}$ usw. die aus (f) folgenden Werte und benützen, daß

$$E = \frac{2(m+1)}{m} G,$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

so erhalten wir:

$$D = \frac{dt^2}{2} \int_v \frac{1}{G} \left[\frac{\sigma_x \ddot{\sigma}_x + \sigma_y \ddot{\sigma}_y + \sigma_z \ddot{\sigma}_z}{2} - \frac{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)(\ddot{\sigma}_x + \ddot{\sigma}_y + \ddot{\sigma}_z)}{2(m+1)} + \right.$$

$$\left. + \tau_{xy} \ddot{\tau}_{xy} + \tau_{yz} \ddot{\tau}_{yz} + \tau_{zx} \ddot{\tau}_{zx} \right] dx\, dy\, dz. \qquad (5a)$$

Variieren wir diesen Ausdruck nach den Spannungskomponenten und beachten, daß für zwei aufeinanderfolgende Zeitelemente die Variation der Spannungskomponenten als konstant betrachtet werden müssen, also z. B.

$$\delta \ddot{\sigma}_x = \frac{d^2}{dt^2} (\delta \sigma_x) = \theta$$

sein muß, so ergibt sich:

$$\delta D = \frac{dt^2}{2} \int_v \frac{1}{G} \left[\frac{\delta \sigma_x \ddot{\sigma}_x + \delta \sigma_y \ddot{\sigma}_y + \delta \sigma_z \ddot{\sigma}_z}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{(\delta \sigma_x + \delta \sigma_y + \delta \sigma_z)(\ddot{\sigma}_x + \ddot{\sigma}_y + \ddot{\sigma}_z)}{2(m+1)} + \delta \ddot{\tau}_{xy} \ddot{\tau}_{xy} + \qquad \delta \ddot{\tau}_{zx} \tau_{zx} \right] dx\, dy\, dz$$

oder bei Berücksichtigung von (f) wird

$$\delta D = \frac{dt^2}{2} \int_v \left[\delta \sigma_x \frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \delta \sigma_y \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} + \partial \sigma_z \frac{\partial \ddot{w}}{\partial z} + \right.$$

$$\left. \delta \tau_{zx} \left(\frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{u}}{\partial y} \right) \right] dx\, dy\, dz. \qquad (5b)$$

Der Ausdruck (3) besagt demnach in leicht ersichtlicher Weise, daß die in zwei beliebigen aufeinanderfolgenden Zeitelementen infolge der Abweichung der wirklichen Bewegung von der freien Bewegung dank des Auftretens von Deformationsbeschleunigungen sich ergebende Abweichungsarbeit ein Minimum werden muß, wenn diese Abweichungsarbeit als Funktion der Spannungskomponenten angesehen wird; ganz Analoges läßt sich zufolge (4) von der Abweichungsarbeit behaupten, die infolge der Abweichung des Gleichgewichtszustandes von der freien Bewegung geleistet wird. Die notwendig bestehende Bedingung für die Erhöhung des Zwanges $Z_1 - Z$, welche sich für das Gleichgewicht gegenüber der vorliegenden Bewegung des kinetostatisch unbestimmten Systems ergibt, besagt also, daß die Abweichungsarbeit, die infolge der Abweichung des kinetostatisch unbestimmten Systems vom Gleichgewichtszustande in je zwei aufeinanderfolgenden Zeitelementen geleistet wird, ein Minimum werden muß.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Analytisch ergibt sich diese Aussage durch Differenzbildung der Beziehungen (3) und (4), bei Beachtung von (5) und (5*b*):

$$\delta(Z_1 - Z) = \frac{2}{dt^2}\,\delta D \qquad .(\mathrm{I})$$

Es ist hiedurch eine Verallgemeinerung des Castigliano-Menabrea'schen Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit ausgesprochen, die zur Bestimmung der kinetostatisch unbestimmten Größen in völlig analoger Weise verwendet werden kann wie das bezügliche statische Prinzip in den Fällen statischer Unbestimmtheit.

Wir stellen uns nunmehr vor, das kinetostatisch-unbestimmte System stehe unter dem Einfluß der wirkenden Kräfte $P_1 \ldots P_n$ und eventuell wirkender Momente M_r und gewisser Reaktions(Verbindungs)kräfte. In jedem Zeitaugenblick gelten dann die Gleichungen *c*—*f* auf p. 54 und 55. Für zwei aufeinanderfolgende Zeitelemente können die Kräfte P_r, M_r und die Reaktionskräfte ebenso konstant angesehen werden wie die zugehörigen Spannungen und elastischen Verschiebungsbeschleunigungen in beliebigen Punkten des Systemes. Die Verschiebungsbeschleunigungen in den Richtungen der Kräfte P_r sollen m_r, jene in den Richtungen kinetostatisch unbestimmter Größen $X_1 \ldots X_p$, $ii_1 \ldots ii_p$ genannt werden. Infolge der Linearität sämtlicher zur Verfügung stehenden Gleichungen, einerseits für den starren Körper der kinetostatischen Gleichungen zur Bestimmung der Reaktionen und der dynamischen Gleichungen zur Bestimmung der Lagekoordinaten als Funktionen der Zeit, anderseits für den elastischen Körper der Spannungsgleichungen, des erweiterten Hookeschen Gesetzes und der Grenzbedingungen,[1] kann behauptet werden, daß zunächst die Spannungskomponenten sich in der folgenden Form ausdrücken lassen:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= a_{xx} P_1 + b_{xx} P_2 + \quad n_{xx} P_n + \bar{a}_{xx} X_1 + \bar{b}_{xx} X_2 + \ldots \bar{p}_{xx} X_p + \alpha_1 \\ \tau_{yz} &= a_{yz} P_1 + b_{yz} P_2 + \quad n_{yz} P_n + \bar{a}_{yz} X_1 + \ldots \bar{p}_{yz} X_p + \alpha_6 \end{aligned}\right\} \qquad (g)$$

In diesen Beziehungen sind die Koeffizienten $a_{xx} \ldots n_{xx}$, $\bar{a}_{xx} \ldots \bar{p}_{xx}$ nicht von den Kräften P beziehungsweise X abhängig, und es erscheinen von den Reaktionskräften nur die kinetostatisch nicht bestimmbaren $X_1 \ldots X_p$. Die übrigen Reaktionsgrößen lassen sich aus den kinetostatischen Gleichungen für den starren Körper durch $P_1 \ldots P_n$, M_r und $X_1 \ldots X_p$ und gewissen anderen Größen linear nach P_r, M_r und $X_1 \ldots X_p$ ausdrücken. Diese anderen Größen hängen von den Trägheitskräften der einzelnen Massenteilchen, die vorhanden wären, wenn der Körper starr wäre, und

[1] Siehe hiezu auch den Beweisgang von Müller-Breslau für den statischen Fall: Neuere Methoden der Festigkeitslehre, 1904.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

von den Anfangsbedingungen ab; die Trägheitskräfte sind aber unter Zuhilfenahme der dynamischen Gleichungen für den starren Körper, d. i. jener dem Freiheitsgrade entsprechenden Zahl von Gleichungen, welche die Reaktionskräfte nicht enthalten (allgemein als Lagrange'sche Gleichungen bezeichnet), bestimmbar, u. zw. entweder direkt als lineare Funktionen der Kräfte P — ihr Einfluß auf die Spannungskomponenten kommt dann in den linearen $P_1 \ldots P_n$ enthaltenden Gliedern zum Ausdruck — oder als Größen, die durch lineare Funktionaloperationen dieser Kräfte erhalten werden. In letzterem Falle wird ihr Einfluß auf die Spannungskomponenten in den Gliedern $\alpha_1 \ldots \alpha_6$ der Beziehungen (g) erscheinen.

In dem in der Figur (siehe p. 65) dargestellten, in zwei Kugelhalbgelenken A, B gelagerten Rahmen, der unter dem Einflusse eines in der Zeit variablen Momentes M_z um die z-Achse rotiert, sind z. B. die auf die einzelnen Massenelemente zur Wirksamkeit gelangenden tangentialen Trägheitskräfte von der jeweiligen Winkelbeschleunigung $b = \frac{d^2 \varphi}{d t^2} = \frac{d w}{d t}$ linear abhängig und infolge dessen, weil die dynamische Gleichung $J_z \frac{d w}{d t} = M_z$ erfüllt sein muß, worin J_z das Trägheitsmoment des Rahmens mit Bezug auf die z-Achse als Umdrehungsachse darstellt, auch vom wirkenden Moment M_z linear abhängig. Dagegen sind die zentrifugalen Trägheitskräfte der einzelnen Massenteilchen von w^2 abhängig, also, weil $J_z \frac{w^2}{2} = \int M_z \, d\varphi + C$, von den Anfangsbedingungen und von M_z linear unter dem Integralzeichen abhängig.

In den Gliedern $\alpha_1 \ldots \alpha_6$ sollen außer den Trägheitskräften, welche der Körper hätte, wenn er starr wäre, noch die Trägheitskräfte, welche er infolge seiner elastischen Bewegung besitzt, ihren teilweisen Ausdruck finden. Lagert man die Trägheitskräfte der elastischen Bewegung über die Trägheitskräfte, welche das elastische System besäße, wenn es starr wäre, so erhält man die Trägheitskräfte des elastischen Systems. Man kann sich eben die Sache so vorstellen, daß man sich vorerst das System durch die äußeren Kräfte P, die Reaktionskräfte und die Trägheitskräfte, die vorhanden wären, wenn das System starr wäre, belastet denkt und dann, um Gleichgewicht zu erhalten, noch die Trägheitskräfte der elastischen Bewegung hinzugibt. Diese Trägkeitskräfte der elastischen Bewegung sind Funktionen der äußeren Belastung P, X und der Trägheitskräfte des dem elastischen System zugeordneten starren Systems sowie der Anfangsbedingungen. Soweit sie linear nach P, X im gewöhnlichen Sinne des Wortes sind, finden sie ihren Ausdruck in den nach P, X linearen Gliedern der Beziehung (g), andernfalls in den Gliedern $\alpha_1 \ldots \alpha_6$. Um hiezu ein Beispiel anzuführen, das gleichzeitig einen speziellen Fall darstellt: Beim doppelseitig eingespannten, an seiner Oberfläche kräftefreien schwingenden

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Balken erscheinen die Biegungsspannungs-Komponenten bei Zugrundelegung der üblichen Näherungstheorie als lineare Funktionen des kinetostatisch unbestimmten Einspannungsmomentes X und der jetzt allein vorhandenen Trägheitskräfte der elastischen Bewegung bestimmbar (die außer X noch vorhandenen Auflagerreaktionen sind durch X und diese Trägheitskräfte ausdrückbar, u. zw. aus der zur Verfügung stehenden kinetostatischen Gleichung). Die Trägheitskräfte der elastischen Bewegung folgen aus den zur Verfügung stehenden dynamischen Gleichungen oder näherungsweise aus der entsprechend umgewandelten Differentialgleichung der elastischen Linie.[1] Führt man in die Differentialgleichung der elastischen Linie die gewonnen gedachte Durchbiegung als Funktion der Längskoordinaten und der Zeit ein und drückt das in der Differentialgleichung vorkommende Biegungsmoment durch X und die Trägheitskräfte aus, so erhält man hiedurch eine Integralgleichung zur Bestimmung der Trägheitskraft pro Balkenelement als Funktion von X und der Anfangsbedingungen. Die Durchführung dieser Rechnung ist nicht Sache dieser Abhandlung.

Das Verschwinden der Glieder $\alpha_1 \ldots \alpha_6$ ist für das Gleichgewicht der Kräfte P und der auftretenden Reaktionen eine notwendige Bedingung. Verschwinden sämtliche Kräfte P und X bis auf $P_1 = 1$, so reduziert sich z. B. σ_x auf a_{xx} und einen nicht verschwindenden Teil von α_1. Das Nullsetzen der Werte X bedeutet die Verwandlung des kinetostatisch unbestimmten Systems in ein kinetostatisch bestimmtes, nach bekannten Analogien in der Statik.

Wir denken uns jetzt dem gegebenen Kraftsystem Änderungen $\delta P_1 \ldots \delta P_n$ überlagert, derart, daß der augenblicklich herrschende, durch einen bestimmten Wert der Verschiebungsbeschleunigungen betonte kinetische Zustand nicht gestört wird, d. h. es sollen $\delta P_1 \ldots \delta P_n$ samt den ihnen entsprechenden Reaktionskräften für sich im Gleichgewichte stehen, also im Innern, beziehungsweise an der Oberfläche des Systems Beziehungen von der Form

$$\frac{\partial \delta \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta t_{\tau y}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \tau_{yz}}{\partial z} = \Theta. \qquad (c')$$

$$\delta X_n = \delta \sigma_x \cos nx + \delta \tau_{xy} \cos ny + \delta \tau_{xz} \cos nz. \qquad (d')$$

entsprechen. Multiplizieren wir die drei Gleichungen von der Form (c') mit $\frac{d t^2}{2} \ddot{u}\, dx\, dy\, dz$, $\frac{d t^2}{2} \ddot{v}\, dx\, dy\, dz$, $\frac{d t^2}{2} \ddot{w}\, dx\, dy\, dz$, das ist, abgesehen vom Faktor $\frac{d t^2}{2}$ den für zwei aufeinanderfolgende Zeitelemente konstanten Produkten aus den Komponenten der Verschiebungsbeschleunigungen in das Volumen $dx\, dy\, dz$ eines

[1] Siehe hiezu beispielsweise Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. IV, IV. Abschnitt.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Elementarkörpers, dem diese Verschiebungsbeschleunigungen entsprechen, addieren hierauf die so veränderten drei Gleichungen (c') und integrieren über das ganze System, so erhalten wir bei partieller Integration nach x, y und z und Beachtung der Beziehung (d')

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\,t^2}{2}\int_v \Bigg[\delta\,\sigma_x \frac{\partial\,\ddot{u}}{\partial\,x} + \delta\,\sigma_y \frac{\partial\,\ddot{v}}{\partial\,y} + \delta\,\sigma_z \frac{\partial\,\ddot{w}}{\partial\,z} + \\ &\qquad + \delta\,\tau_{xy}\left(\frac{\partial\,\ddot{u}}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\ddot{v}}{\partial\,x}\right) + \\ &\qquad\qquad \delta\,\tau_{zy}\left(\frac{\partial\,\ddot{w}}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\ddot{v}}{\partial\,z}\right)\Bigg]\,d\,x\;d\,y\;d\,z \\ &- \frac{d\,t^2}{2}\int_o \left(\delta\,X_n\,\ddot{u} + \delta\,Y_n\,\ddot{v} + \delta\,Z_n\,\ddot{w}\right)\,d\,o = \Theta, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wobei sich das erste Integral über das Volumen, das zweite Integral über die Oberfläche des elastischen Systems erstreckt. (6) besagt, daß zu einer beliebigen Zeit die infolge der Beschleunigung der Verschiebungen sich ergebende virtuelle Deformationsarbeit, die auf Grund der Ausführung auf p. 58 als virtuelle Abweichungsarbeit angesehen werden kann, gleich der virtuellen Arbeit der Oberflächenkräfte ist.[1] Die Arbeiten sind virtuelle, weil die Variationen der Spannungskomponenten und der Oberflächenkräfte gedachte, nicht in der Zeit erfolgende sind.

Die Beziehung (6) können wir durch Einsetzen der Variation der Spannungskomponenten unter Rücksicht auf (g), der zufolge zum Beispiel $\frac{\partial\,\sigma_x}{\partial\,P_r} = r_{xx} + \frac{\partial\,\alpha_1}{\partial\,P_r}$

und

$$\delta\sigma_x = a_{xx}\,\delta P_1 + b_{xx}\,\delta P_2 + \ldots n_{xx}\,\delta P_n + \bar{a}_{xx}\,\delta X_1 + \ldots \bar{p}_{xx}\,\delta X_p + \delta\alpha_1,$$

wobei α_1 sowie jeder Wert α in den beiden Grenzfällen sämtliche Werte P oder keinen enthalten kann, in der Form

$$\begin{aligned} &\frac{d\,t^2}{2}\int_v \Bigg[\delta\,P_1\left(\frac{\partial\,\sigma_x}{\partial\,P_1}\,\ddot{e}_{xx} + \ldots \frac{\partial\,\tau_{yz}}{\partial\,P_1}\,\ddot{e}_{yz}\right) + \\ &\qquad + \delta\,P_n\left(\frac{\partial\,\sigma_x}{\partial\,P_n}\,\ddot{e}_{xx} + \qquad \frac{\partial\,\tau_{yz}}{\partial\,P_n}\right) + \\ &\qquad + \partial X_1\left(\frac{\partial\,\sigma_x}{\partial\,X_1}\,\ddot{e}_{xx} + \qquad \frac{\partial\,\tau_{yz}}{\partial\,X_1}\,\ddot{e}_{yz}\right) + \end{aligned}$$

[1] Diese Beziehung könnte man unmittelbar auch aus dem Prinzip des kleinsten Zwanges herleiten, wenn man die Variation der Oberflächenkräfte nicht gleich Null setzt. (Siehe hiezu p. 56 und 57.)

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$+ \delta X_p \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial X_p} \ddot{e}_{xx} + \qquad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial X_p} \right) \Bigg] d x \, d y \, d z =$$

$$= \frac{d t^2}{2} \left[\sum_{r=1}^{r=n} \delta P_r \ddot{m}_r + \sum_{r=1}^{r=p} \delta X_r \ddot{u}_r \right]$$

schreiben.

Wir erkennen unschwer, daß z. B.

$$\frac{d t^2}{2} \int_v \delta P_1 \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial P_1} \ddot{e}_{xx} + \qquad \cdot \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial P_1} \right) d x \, d y \, d z$$

die Variation der in zwei aufeinanderfolgenden Zeitelementen sich ergebende Abweichungsarbeit D der Gleichung $5\,a$ auf p. 58 nach P_1 vorstellt, wenn diese Arbeit, wie möglich, als Funktion der wirkenden Kräfte P und der kinetostatisch unbestimmten Größen X aufgefaßt wird. Bei Ausführung der genannten Variation ist darauf zu achten, daß die zweiten Ableitungen der Spannungskomponenten nach der Zeit als konstant anzusehen sind, da laut Voraussetzung nur der Spannungszustand variiert wird. Bezeichnen wir diese Abweichungsarbeit, bezogen auf die Volumseinheit, mit $\frac{d t^2}{2} a$, so kann die letzte Gleichung auch in der Form

$$\frac{d t^2}{2} \int_v \Bigg[\left(\delta P_1 \frac{\partial a}{\partial P_1} + \qquad \delta P_n \frac{\partial a}{\partial P_n} \right) +$$

$$+ \left(\delta X_1 \frac{\partial a}{\partial X_1} + \qquad + \delta X_p \frac{\partial a}{\partial X_p} \right) \Bigg] d x \, d y \, d z =$$

$$= \frac{d t^2}{2} \left[\sum_{r=1}^{r=n} \delta P_r \ddot{m}_r + \sum_{r=1}^{r=p} \delta X_r \ddot{u}_r \right]$$

aufgeschrieben werden. Setzen wir sämtliche Variationen mit alleiniger Ausnahme von δP_r gleich Null, so erhalten wir aus der letzten Gleichung

$$\frac{d t^2}{2} \frac{\partial A}{\partial P_r} = \frac{d t^2}{2} \int_v \frac{\partial a}{\partial P_r} d x \, d y \, d z = \frac{d t^2}{2} \ddot{m}_r, \qquad \ldots \text{(II)}$$

d. h. differenziert man die in zwei aufeinander folgenden Zeitelementen im ganzen Körperverband infolge der Existenz von Verschiebungsbeschleunigungen sich ergebende Abweichungsarbeit $\frac{d t^2}{2} A$ als Funktion der äußeren Kräfte P und der kinetostatisch

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

unbestimmten Größen X betrachtet nach einer solchen Kraft, so erhält man die in die Kraft fallende Verschiebungsbeschleunigung $\times \frac{d\,t^2}{2}$ im Angriffspunkt der Kraft.

Aus (g) kann unmittelbar gefolgert werden, daß die Verschiebungsbeschleunigungen $\ddot{m}_1 \ldots \ldots \ddot{m}_n$, beziehungsweise $\ddot{u}_1 \ldots \ddot{u}_p$ in den Richtungen der Kräfte P, beziehungsweise X Beziehungen von der Form

$$\left.\begin{array}{l} \ddot{m}_1 = a_{11}\,P_1 + a_{12}\,P_2 + \ldots \ldots a_{1n}\,P_n + \bar{a}_{11}\,X_1 + \ldots \bar{a}_{1p}\,X_p + \beta_1 \\ \vdots \\ \ddot{m}_n = a_{n_1}\,P_1 + a_{n_2}\,P_2 + \ldots \ldots a_{nn}\,P_n + \bar{a}_{n_1}\,X_1 + \ldots \bar{a}_{np}\,X_p + \beta_n \end{array}\right\} \quad (h)$$

erfüllen.

Da $\frac{\partial^2 A}{\partial P_r \partial P_n} = \frac{\partial^2 A}{\partial P_n \partial P_r}$, so ergibt sich

$$a_{rn} + \frac{\partial \beta_r}{\partial P_n} = a_{nr} + \frac{\partial \beta_n}{\partial P_r} \qquad \text{(III)}$$

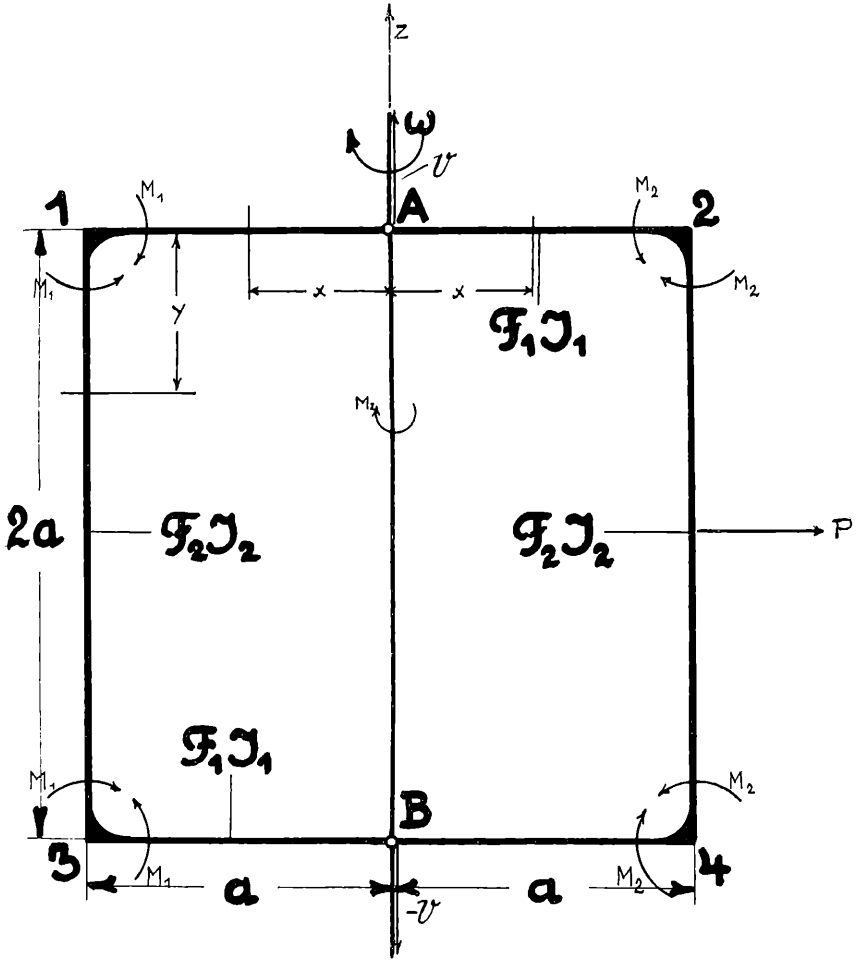
ein Satz, der die Gegenseitigkeit von Verschiebungsbeschleunigungen zum Ausdrucke bringt, die sich einstellen, wenn einmal das System nur durch $P_n = 1$, das anderemal nur durch $P_r = 1$ belastet erscheint.

III.

Besonders einfach gestaltet sich die Anwendung des Vorstehenden, wenn man, um zu einer angenäherten Lösung zu kommen, auf die Trägheitskräfte des elastischen Systems im Vergleich zu den Trägheitskräften, welche das System hätte, wenn es starr wäre, keine Rücksicht nimmt, und wenn letztere Kräfte sich leicht angeben lassen, wie im folgenden Beispiel. Der in der Figur dargestellte Rahmen 1, 2, 3, 4, der in A und B zwei feste Kugelhalbgelenke besitzt, die die Stäbe 1 2 beziehungsweise 3 4 als Ganze (ununterbrochen) bestehen lassen und durch ein gegebenes, mit der Zeit variables Drehmoment M_z und eine variable Kraft P, normal zur Umdrehungsachse z und stets in der Ebene des Rahmens wirkend, beansprucht ist, und für welchen die Flächen und Trägheitsmomente der Stäbe des Rahmens, die in den Knickpunkten steif miteinander verbunden sein sollen, durch F_1, J_1 beziehungsweise F_2, J_2 gegeben sind, hätte, wenn er starr wäre, einen Freiheitsgrad. Seine Winkelbeschleunigung um die z-Achse wäre aus $M_z = b\,J_z$ bestimmbar, wenn J_z das Trägheitsmoment des ganzen Rahmens in Bezug auf die z-Achse und b die Winkelbeschleunigung bezeichnen. Die Reaktionen in A und B sind aus den zur Verfügung stehenden fünf kinetostatischen Gleichungen nicht vollständig bestimmbar (äußerliche einfache kinetostatische

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Unbestimmtheit), desgleichen nicht die in den Punkten 1 und 3 beziehungsweise 2 und 4 übertragenen inneren Biegungs-, beziehungsweise Torsionsmomente (fünffache innerliche kinetostatische Unbestimmtheit). Sieht man von der durch die tangentiellen Trägheitskräfte bewirkten Torsions- und Biegungsbeanspruchung ab, was



wir im folgenden annehmen wollen, so bleibt zweifache innerliche kinetostatische Unbestimmtheit übrig. Für die in Betracht gezogenen linearen Beanspruchungen auf Zug und Biegung der Stäbe ergibt sich für die infolge der Deformationsbeschleunigungen geleistete Abweichungsarbeit vom Gleichgewichte die gemeinsame Formel $\frac{d\,t^2}{2}\int\frac{\sigma_x\,\ddot{\sigma}_x}{E}\,d\,x\,d\,y\,d\,z$, die für den Fall der Biegung bei

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Anwendung der technischen Annäherungstheorie spezialisiert in $\frac{d\,t^2}{2}\int\frac{M_B\,\ddot{M}_B}{E\,J_o^2}\,d\,x\,d\,y\,d\,z = \frac{d\,t^2}{2}\int\frac{M_B\,\ddot{M}_B}{E\,J_o}\,d\,x$ übergeht, wenn M_B das Biegungsmoment, $\ddot{M}_B$ die zweite Ableitung des Biegungsmomentes nach der Zeit, J_o das Trägheitsmoment mit Bezug auf die Nullinie des Querschnittes, E den Elastizitätsmodulus bedeuten. Der Rechnungsgang stellt sich wie folgt dar. Es wird die Deformationsarbeit

$$D = \frac{d\,t^2}{2}\Big(A+B+C+D+E+F+G+H\Big),$$

worin

$$A = \frac{2}{E}\left[\frac{\gamma}{2\,g}\,w^2\Big(a^2-x^2\Big)+\frac{\gamma}{g}\,\frac{F_2}{F_1}\,a^2\,w^2\right]F_1\,a\,\frac{d^2(w^2)}{d\,t^2}\cdot$$

$$\left[\frac{\gamma}{2\,g}\Big(a^2-x^2\Big)+\frac{\gamma}{g}\,\frac{F_2}{F_1}\,a^2\right]$$

$$B = \frac{2}{E}\left[\frac{\gamma}{2\,g}\,w^2\Big(a^2-x^2\Big)+\frac{\gamma}{g}\,\frac{F_2}{F_1}\,a^2\,w^2+\frac{P}{2\,F_1}\right]F_1\,a\,\cdot$$

$$\left\{\frac{d^2\,w^2}{d\,t^2}\left[\frac{\gamma}{2\,g}\Big(a^2-x^2\Big)+\frac{\gamma}{g}\,\frac{F_2}{F_1}\,a^2\right]+\frac{\ddot{P}}{2\,F_1}\right\}$$

$$C = 2\int^{a}\frac{M_1\,(a+x)-(Va-M_2)\,(a-x)}{2\,a\;E\,J_1}$$

$$\frac{(\ddot{V}a-M_1)\,(a-x)-\ddot{M}_2\,(a+x)}{2\,a}\,d\,x$$

$$D = 2\int_o^{a}\frac{(Va-M_1)\,(a-x)-M_2\,(a+x)}{2\,a\;E\,J_1}\cdot$$

$$\frac{(\ddot{V}a-\ddot{M}_1)\,(a-x)-\ddot{M}_2\,(a+x)}{2\,a}\,d\,x$$

$$E = \frac{V\ddot{V}a^2+(M_1-M_2)\,(\ddot{M}_1-\ddot{M}_2)}{a\;E\,F_2}$$

$$F = \int^{2\,a}\frac{F_2\,\frac{\gamma}{g}\,a^2\,w^2\,y-M_1-F_2\,\frac{\gamma}{2\,g}\,a\,y^2\,w^2}{E\,J_2}\;\frac{d^2}{d\,t^2}$$

$$\left[F^2\,\frac{}{g}\,a^2\,w^2\,y-M_1-F_2\,\frac{\gamma}{2\,g}\,a\,y^2\,w^2\right]d\,y$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

$$G = \int_0^a \frac{F_2 \frac{\gamma}{g} a^2 w^2 y - M_2 - F_2 \frac{\gamma}{2g} a y^2 w^2 + \frac{P}{2} y}{E J_2} \frac{d^2}{d t^2} \left[F_2 \frac{\gamma}{g} a^2 w^2 y - M_2 - F_2 \frac{\gamma}{2g} a y^2 w^2 + \frac{P}{2} y \right] d y$$

$$H = \int_0^{2a} \frac{F_2 \frac{\gamma}{g} a^2 w^2 y - M_2 - F_2 \frac{\gamma}{2g} a y^2 w^2 + \frac{P}{2} \left(2a - y\right)}{E J_2} \frac{d^2}{d t^2} \left[F_2 \frac{\gamma}{g} a^2 w^2 y - M_2 - F_2 \frac{\gamma}{2g} a y^2 w^2 + \frac{P}{2} \left(2a - y\right) \right] d y .$$

In diesen Ausdrücken bedeuten V, M_1, M_2 die kinetostatisch unbestimmbaren Größen (siehe Figur), γ das spezifische Gewicht des verwendeten Materials, g die Beschleunigung der Schwere, w die Winkelgeschwindigkeit. Die Größen a, x, y sind aus der Figur ersichtlich.

Für die Minimumsbedingungen gelten:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial D}{\partial M_1} = \theta, \quad \frac{\partial D}{\partial M_2} = \theta, \quad \frac{\partial D}{\partial V} = \theta \text{ oder entwickelt} \\
&\frac{2a^4}{3EJ_2} F_2 \frac{\gamma}{g} \frac{d^2(w^2)}{d t^2} = \ddot{M}_1 \left(\frac{2a}{EJ_2} + \frac{4a}{3EJ_1} + \frac{1}{a F_2 E} \right) + \\
&\qquad + \ddot{M}_2 \left(\frac{2a}{3EJ_1} - \frac{1}{a F_2 E} \right) - \frac{\ddot{V} a^2}{2EJ_1} \\
&\frac{1}{EJ_2} \left[\frac{2a^4}{3} F_2 \frac{\gamma}{g} \frac{d^2(w^2)}{d t^2} + \frac{\ddot{P} a^2}{2} \right] = \\
&= \ddot{M}_1 \left(\frac{2a}{3EJ_1} - \frac{1}{a F_2 E} \right) + \ddot{M}_2 \left(\frac{2a}{EJ_2} + \frac{4a}{3EJ_1} + \frac{1}{a F_2 E} \right) - \\
&\qquad - \frac{\ddot{V} a^2}{2EJ_1}
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\theta = -\ddot{M}_1 \frac{a^2}{2EJ_1} - \ddot{M} \frac{a^2}{2EJ_1} + \frac{\ddot{V} a}{E F_2} .$$

Von diesen drei linearen Gleichungen mit den Unbekannten $\ddot{M}_1$, $\ddot{M}_2$, $\ddot{V}$ haben die Größen der zwei ersten Gleichungen die Dimension $\sec^{-2}$, also einer Winkelbeschleunigung, die Größen der dritten Gleichung die Dimension $cm \sec^{-2}$, also einer linearen Beschleunigung. In leicht ersichtlicher Weise besagen die ersten zwei Gleichungen, daß die Summe der Verdrehungswinkelbeschleunigungen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

in den Punkten 1, 3 und 2, 4, die durch die Wirksamkeit von M_1, M_2 und V hervorgerufen werden, gleich der entsprechend den Fliehkräften in den Stäben 1, 3 und 2, 4, beziehungsweise entsprechend der Kraft P entstandenen Verdrehungswinkelbeschleunigung ist. In analoger Weise besagt die dritte Gleichung, daß die Verschiebungsbeschleunigungen der Punkte A und B gleich Null sind. Die Gleichheit der Koeffizienten bei diagonalsymmetrischen Gliedern auf der linken Seite der drei Gleichungen bestätigt den erweiterten Maxwell'schen Satz und ist eigentlich im vorliegenden Falle, in dem man auf die Trägheitskräfte der elastischen Bewegung verzichtet hat, selbstverständlich.

Die weitere Behandlung der Gleichungen (6) bei gegebenen Anfangsbedingungen bietet keinerlei Schwierigkeiten; nach Ausrechnung der Größen V, M_1 und M_2 könnten die in den einzelnen Stäben auftretenden Zug- und Biegungsspannungen bei Heranziehung der technischen Annäherungstheorien leicht bestimmt werden.

Zusammenfassung.

1. Für ein den gegebenen Bedingungen entsprechend sich bewegendes, festes, isotropes, elastisches Körpersystem, das, wenn es starr wäre, kinetostatisch unbestimmt im Sinne der Auseinandersetzung auf p. 51 wäre, das ferner den auf p. 54 angegebenen Anforderungen genügt, gilt der Satz, daß unter allen mit den Bedingungen des Systems und dem gegebenen Kraftsystem vereinbarten Spannungszuständen jener eintritt, der die infolge der elastischen Verschiebungsbeschleunigungen sich ergebende Abweichungsarbeit vom Gleichgewichtszustande in jedem Zeitaugenblick zu einem Minimum macht, wenn diese Abweichungsarbeit als Funktion der Spannungskomponenten angesehen wird (Gleichung (I) auf p. 59 und die Gleichungen 3, 4, 5, 5 *b* auf p. 56, 57 und 58). Hiedurch wird eine Erweiterung des Castigliano'schen Prinzips über das Minimum der Formänderungsarbeit, das sich auf statische Fälle bezieht, ausgesprochen.

2. Der im Punkt 1 ausgesprochene Satz kann dazu verwendet werden, um die äußeren und zwischen den einzelnen Gliedern eines Systems nach Punkt 1 übertragenen Verbindungskräfte (Reaktionen), die kinetostatisch nicht bestimmbar sind, auszuwerten. Man hat nur die Spannungskomponenten in dem Ausdruck (I), p. 59, für die Abweichungsarbeit als Funktion der kinetostatisch nicht bestimmbaren Größen darzustellen und die Differentialquotienten der Abweichungsarbeit nach diesen Größen gleich Null zu setzen.

Drückt man die Spannungskomponenten im Ausdrucke für die im Punkte 1 genannte Abweichungsarbeit als Funktion der äußeren Kräfte aus, so ergibt sich als Ableitung dieser Abweichungsarbeit nach einer äußeren Kraft die in die Richtung der Kraft fallende, mit dem halben Quadrate des Zeitdifferentials multiplizierte

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Komponente der Verschiebungsbeschleunigung der elastischen Bewegung (Gleichung II auf p. 63). Hiedurch wird es möglich, auf eine einfache Weise die in jedem Zeitaugenblick vorhandene Verschiebungsbeschleunigung zu bestimmen.

4. Eine in einem Punkt A der Oberfläche eines elastischen Systems nach Punkt 1 angreifende Kraft $\mathfrak{P} = 1$ ruft in der Richtung einer an einer zweiten Stelle B der Oberfläche angreifenden zweiten Kraft $\mathfrak{P} = 1$ eine Verschiebungsbeschleunigung hervor, die gleich der von der zweiten Kraft in der Richtung der ersten Kraft an der Stelle A hervorgerufenen Verschiebungsbeschleunigung gleich ist. (Beziehung III auf p. 64). Die Verschiebungsbeschleunigungen beziehen sich dabei nur auf die elastische Bewegung.

5. Besonders einfach gestaltet sich die Verwendung des Satzes nach Punkt 1 zur Bestimmung von kinetostatisch unbestimmten Größen, wenn die Trägheitskräfte der elastischen Bewegung gegenüber den Trägheitskräften, welche dem System zukommen würde, wenn es starr wäre, vernachlässigbar sind. (Beispiel auf p. 62 u. ff.)

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1928

Band/Volume: 137_2a

Autor(en)/Author(s): Girtler Rudolf

Artikel/Article: Über die Berechnung kinetostatisch unbestimmter Systeme. 51-69