

Graphische Kinematik der räumlich schwingenden Kurbelschleife

Von

Karl Federhofer (Graz)

(Mit 3 Textfiguren und 2 Tafeln)

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Jänner 1929)

In einem im Vorjahre erschienenen Buche¹ habe ich den Versuch gemacht, mit Benützung der von B. Mayor und R. v. Mises für die Zwecke der graphischen Raumkraftstatik entwickelten Methoden der Abbildung von Raumvektoren auf eine Ebene eine graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems aufzubauen. Schon in der Kinematik des ebenen Systems erweist sich die graphische Methode der rein rechnerischen wesentlich überlegen — weshalb sie sich hier auch völlig eingebürgert hat — in erhöhtem Maße ist dies der Fall bei den kinematischen Untersuchungen des räumlichen Systems. Als Beleg hierfür kann auf die in der genannten Schrift und in einer demnächst erscheinenden neuen Arbeit² des Verfassers gezeigten Anwendungen verwiesen werden.

In der vorliegenden Arbeit wird der Bewegungszustand der in der einschlägigen Fachliteratur noch nicht behandelten räumlich schwingenden Kurbelschleife auf zeichnerischem Wege untersucht, wobei auch die Verwendung der kinematischen Diagramme für die Beschreibung der räumlichen Punktbeziehung gezeigt werden soll.

I. Diagramme der räumlichen Bewegung eines Massenpunktes.

a) Von R. Mehmke³ stammt eine einfache Konstruktion für die Beschleunigung eines Massenpunktes, die auch dann gilt, wenn die Bahn des Punktes eine Raumkurve ist. Man bedient sich dabei des polaren und lokalen Hodographen, also jener Geschwindigkeitsdiagramme, die sich ergeben, wenn einmal die aufeinanderfolgenden Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v} von einem festen Punkte aus aufgetragen werden, das anderemal diese Geschwindigkeitsvektoren in den jeweiligen Lagen des Massenpunktes angesetzt werden. Beidemal erfüllen die so erhaltenen Endpunkte der Vektoren \mathbf{v} stetige Kurven.

¹ K. Federhofer, Graphische Kinematik und Kinetostatik des räumlichen Systems. J. Springer, Wien, 1928.

² Graphische Kinematik der Taumelscheibe. Zeitschr. f. angew. Math. Mechanik, 1929.

³ Jahresber. d. Deutsch. Math. Vereinigung 1903, 12. Bd., p. 561.

Mit Hilfe dieser beiden Kurven wird die Beschleunigung \mathfrak{b} für irgendeine Lage M des Massenpunktes gefunden, indem man (Fig. 1) im zugehörigen Punkte G des lokalen Hodographen die Tangente t zieht und diese mit der durch M gelegten Parallelen zur Tangente τ im entsprechenden Punkte V des polaren Hodographen zum Schnitt bringt. Ist Q dieser Schnittpunkt, so ist

$$\mathfrak{b} = \overrightarrow{QM}.$$

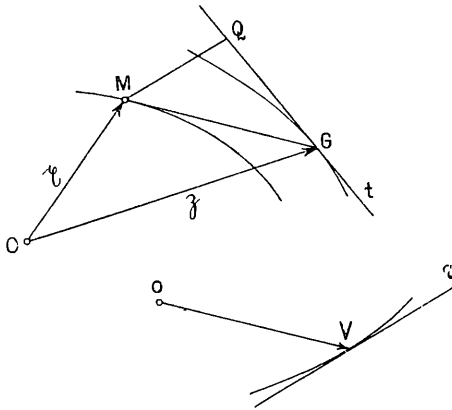


Fig. 1.

Die Richtigkeit der Konstruktion ist leicht einzusehen. Denn bedeutet \mathfrak{z} den Ortsvektor des Massenpunktes M bezüglich des Aufpunktes O , so ist zufolge der Konstruktion

$$\mathfrak{z} = \overrightarrow{OG} = \mathfrak{r} + \mathfrak{z},$$

woraus

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z} + \mathfrak{z};$$

somit

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{b} = \mathfrak{z} - \mathfrak{z}. \quad (1)$$

Nun stimmen aber die Richtungen von $\mathfrak{b} = \mathfrak{z}$ und von \mathfrak{z} mit den Richtungen der Tangenten τ , beziehungsweise t überein, so daß durch das Dreieck QMG die in Gleichung (1) ausgedrückte Vektorbeziehung erfüllt ist.

Aus der Ableitung ist ersichtlich, daß die Konstruktion auch für den Raum gilt, wobei sie in zwei Rissen durchzuführen ist, und daß hiebei der Krümmungsmittelpunkt der Bahnkurve nicht benötigt wird.

b) Wird der Geschwindigkeitsvektor durch seinen Grundriß und sein Bild auf die Grundrißebene abgebildet, so entfällt bei der

beschriebenen Konstruktion des Beschleunigungsvektors die Zeichnung der beiden Hodographen im Aufrisse, dafür tritt aber ein neues Diagramm in der Grundrißebene hinzu.

Die Bilder aller Geschwindigkeiten des bewegten Massenpunktes hüllen eine ebene Kurve ein, wir wollen sie den Bildhodographen B nennen (Fig. 2).

Aus dem im Grundrisse gezeichneten polaren Hodographen und dem zugehörigen Bildhodographen kann dann das Bild der Beschleunigung leicht entnommen werden; man zieht im Endpunkte des Geschwindigkeitsvektors v' die Tangente τ' an den polaren Hodographen und legt an den Bildhodographen die zu v'' parallele

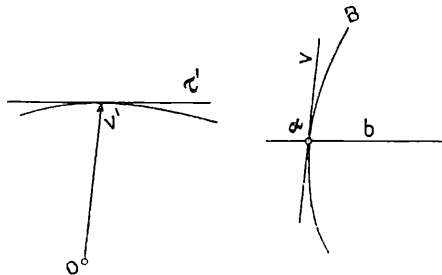


Fig.

Tangente; ist α ihr Berührungspunkt, so geht das Bild der Beschleunigung b durch α und ist parallel zu τ' ; denn es ist

$$b \, dt = (v + d v) - v,$$

woraus folgt, daß sich die Bilder der Geschwindigkeiten des Massenpunktes in zwei unendlich benachbarten Lagen und jenes der Beschleunigung in einem Punkte — im Berührungspunkte α — schneiden müssen.

Die Bildlänge b' der Beschleunigung b wird sodann aus dem lokalen Hodographen in der Strecke $Q'M'$ gewonnen.

Dem Punkte α kommt eine besondere Bedeutung zu: er ist der charakteristische Bildpunkt der Schmiegungeebene der räumlichen Bahn des Punktes M . Denn der Bildpunkt einer Ebene wird im Schnitte der Bilder zweier in der Ebene liegenden Vektoren erhalten. In der Schmiegungeebene liegen die Vektoren v und b , somit ist der Schnitt ihrer Bilder der charakteristische Bildpunkt der Schmiegungeebene. Der Bildhodograph stellt mithin den geometrischen Ort der Bildpunkte aller aufeinanderfolgenden Schmiegungeebenen der Raumkurve vor.

Ist die Bahnkurve eine ebene Kurve, dann schrumpft der Bildhodograph in einen Punkt zusammen. Für die Bewegung des Punktes auf einer geraden wird der Bildhodograph eine gerade Linie.

Da die Binormale der Bahnkurve auf der Geschwindigkeit und Beschleunigung senkrecht steht, so ist ihr Bild die Antipolare des

Punktes α . Das Bild der Hauptnormalen der Bahnkurve ist die Verbindungslinie des Punktes α mit dem Antipole des Bildes der Geschwindigkeit \mathbf{v} , denn die Hauptnormale liegt in der Schmiegungebene und steht senkrecht auf \mathbf{v} . Wird die Beschleunigung \mathbf{b} nach den Richtungen der Tangente und der Normalen zerlegt, so daß

$$\mathbf{b} = b_2 + b_1,$$

so ist

$$b_1 = \frac{v^2}{\rho}, \quad (2)$$

worin ρ den Krümmungshalbmesser der Bahnkurve bedeutet, und man hat aus (2) die Möglichkeit der Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes. Umgekehrt kann bei bekannter Krümmung der Bahnkurve aus Gleichung (2) b_1 und damit auch die Gesamtbeschleunigung konstruiert werden, ohne den lokalen Hodographen aufzuzeichnen.

II. Geschwindigkeitszustand der räumlich schwingenden Kurbelschleife.

Dieser Mechanismus besteht aus einer Kurbel OA , die sich um den festen Punkt O in einer zur Bildebene (Grundrißebene) parallelen Ebene dreht, während die in A gelenkig angeschlossene Stange AB in einer um den Punkt O_1 drehbaren Hülse gleiten kann, wobei der Mittelpunkt O_1 der Hülse außerhalb der Führungsebene von A liegt. Es ist für einen gleichförmigen Umlauf der Kurbel OA mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ der Verlauf der Geschwindigkeiten \mathbf{v}_c des beliebigen Stangenpunktes C darzustellen. Die Geschwindigkeit des Punktes A ist dann durch die Länge OA dargestellt, dieses Maß wird auch als Abbildungskonstante gewählt. Jener Punkt B der Stange, der sich augenblicklich mit dem festen Drehpunkt O_1 der Hülse deckt, hat eine Geschwindigkeit \mathbf{v}_B , deren Richtung mit AB zusammenfällt.

Konstruiert man die Bilder von \mathbf{v}_A und \mathbf{v}_B (v_A geht durch $O' \perp O'A'$, v_B ist durch den Punkt $T // A'B'$ zu legen, wobei $Tf // A''B''$), so liefert der Schnittpunkt der beiden Bilder den Antipol e_ω der momentanen Drehachse des Stabes AB , denn diese steht senkrecht auf den Geschwindigkeiten aller Punkte des Systems AB ; die Antipolare von e_ω gibt das Bild ω der momentanen Drehachse.

Ermittelt man ferner den auf ω gelegenen Antipol e_{AB} des Bildes der Geraden AB , so wird in der Verbindungslinie $e_\omega e_{AB}$ das Bild der relativen Geschwindigkeit \mathbf{v}_{BA} des Punktes B gegen A erhalten.

Im Geschwindigkeitsdreieck oab wurde $\overrightarrow{oa} = v_A$ gemacht, $ab // v_{BA}$, $ob // v_B$; hiemit ist in ob die Bildlänge v'_B der gesuchten Geschwindigkeit des Punktes B gefunden, und es ergibt sich jene des Punktes C aus der Ähnlichkeit der Punktreihen ACB und acb ; $\overrightarrow{oc} = v'_c$.

Die Bilder der Geschwindigkeiten aller Systempunkte schneiden sich, da sie senkrecht stehen auf der augenblicklichen Drehachse, im Punkte e_ω ; dadurch ist auch das Bild v_c festgelegt.

In Tafel I wurden für zwölf Stellungen der Kurbel OA die entsprechenden Lagen des Punktes C eingetragen, womit sich die Punktbahn α' dieses Punktes zeichnen ließ. Die nach dem eben beschriebenen Verfahren ermittelten Geschwindigkeiten v_c ermöglichen die Zeichnung des lokalen und polaren Hodographen β' und γ' , für letzteren, dessen Pol in O_2 liegt, wurde für die Zwecke einer Kontrolle auch der Aufriß γ'' eingetragen.

Schließlich enthält die Tafel I auch den Bildhodographen δ . Hiemit ist alles vorbereitet, um die Beschleunigung b_c des Punktes C für jede Lage des Getriebes zu entnehmen.

Denn die Tangente τ' im Punkte c'_2 an den polaren Hodographen γ' gibt die Richtung b'_c ; zieht man hiezu durch C' die Parallele bis zum Schnitte Q mit der Tangente t an die Kurve β' , so ist die Bildlänge $\vec{b}_c = \vec{QC}$

Die Parallele zu τ' durch den Punkt δ des Bildhodographen gibt das Bild b_c der Beschleunigung des Punktes C und es muß die hieraus folgende Richtung b''_c übereinstimmen mit der Tangente an γ'' im Punkte c''_2 .

III. Beschleunigungszustand.

Die im Vorstehenden erläuterte Konstruktion der Beschleunigung setzt die Zeichnung der Hodographen voraus und erweist sich dann als sehr zweckmäßig, wenn nach den Beschleunigungen für den ganzen Umlauf des Getriebes gefragt wird. Es soll nun gezeigt werden, wie für irgend eine Lage des Getriebes die Beschleunigungen einzelner Punkte unmittelbar, ohne vorherige Zeichnung der Hodographen, konstruiert werden können.

Es sei vorausgeschickt, daß für die Geschwindigkeit v_A des Kurbelendpunktes A die Gleichung gilt:

$$v_A = v_r + v_s,$$

wo v_s die Geschwindigkeit des augenblicklich mit A sich deckenden Punktes der Hülse und v_r die Geschwindigkeit von A relativ zur Hülse bedeutet. Hierbei hat v_r die Richtung der Stange, v_s steht auf AB und auf der momentanen Drehachse \mathfrak{w} senkrecht. Im Dreieck $A'a(a)$ (Tafel II) ist der durch obige Gleichung gegebene Zusammenhang der drei Geschwindigkeiten dargestellt. Da $v_s \perp AB$ und $\perp \mathfrak{w}$, so ist das Bild $v_s // e_\omega e_{AB}$, während $v_r // AB$ und man hat in

$$v_s = A'(a)$$

$$v_r = (a)a$$

die Bildlängen der System- und Relativgeschwindigkeit ermittelt.

Mit $\omega = 1$ ist die Beschleunigung des Punktes A

$$\mathfrak{b}_A = \overrightarrow{A O}.$$

Diese setzt sich geometrisch zusammen aus der Beschleunigung \mathfrak{b}_s des mit A sich deckenden Punktes der Hülse, aus der relativen Beschleunigung \mathfrak{b}_r der Gleitbewegung in der Hülse und aus der Coriolisbeschleunigung \mathfrak{b}_z , so daß

$$\mathfrak{b}_A = \overrightarrow{A O} = \mathfrak{b}_s + \mathfrak{b}_r + \mathfrak{b}_z.$$

Die Systembeschleunigung \mathfrak{b}_s besteht aus der Normalbeschleunigung $\mathfrak{b}_{s,1} = \frac{v_s^2}{O_1 A}$ (denn die momentane Drehachse steht senkrecht auf AB) und aus einem von der Winkelbeschleunigung abhängigen, vorläufig unbekanntem Teile $\mathfrak{b}_{s,2}$.

Da die Coriolisbeschleunigung gemäß

$$\mathfrak{b}_z = 2 \omega \times \mathfrak{v}_r$$

konstruierbar ist, so fassen wir die der Konstruktion sofort zugänglichen Vektoren in obiger Gleichung in einem Vektor \mathfrak{r} zusammen, so daß

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{b}_A - \mathfrak{b}_{s,1} - \mathfrak{b}_z = \mathfrak{b}_{s,2} + \mathfrak{b}_r$$

wird.

Um hierin $\mathfrak{b}_{s,1}$ gemäß $\frac{v_s^2}{O_1 A}$ zu erhalten, hat man auf die Gerade $(a) O_1$ in der Ebene $A (a) O_1$ die Normale zu fällen bis zum Schnitte N mit AB ; dann ist $\overrightarrow{N A} = \mathfrak{b}_{s,1}$.

Die Projektion von $N (a)$ ist daher parallel zu $e_{(a) O_1} e_\omega$, wobei $e_{(a) O_1}$ auf dem Bilde ω liegt im Schnitte mit der durch O' gezogenen Normalen zu $O'_1 (a)$. Der Absolutbetrag von \mathfrak{b}_z ist wegen $\omega \perp \mathfrak{v}_r$ gleich $2 \omega v_r$; er wird zufolge

$$\omega = \frac{v_s}{AB} = tg [(a) O_1 A]$$

erhalten, indem auf AB von B aus die Strecke $O_1 m = 2 v_r$ aufgetragen und in m die Senkrechte zu AB bis zum Schnitte n mit $(a) O_1$ gezogen wird. Dann ist

$$\overrightarrow{nm} = \mathfrak{b}_z.$$

Die Projektion \mathfrak{b}'_z von \mathfrak{b}_z erhält man daher, indem $O'_1 m' = 2 v'_r$ gemacht und $m' n' // A' (a)$ gezogen wird; es ist $\overrightarrow{n' m'} = \mathfrak{b}'_z$.

In einem seitlich gezeichneten Beschleunigungsplan sind die drei Teile \mathfrak{b}_A , $-\mathfrak{b}_{s,1}$, $-\mathfrak{b}_z$ zu einem Vektor \mathfrak{r} zusammengefaßt, dessen Bild r mit Benutzung der Hilfslinie h gefunden wird.

Die Zerlegung von r in die Teile $\mathfrak{h}_{s,2}$ und \mathfrak{h}_r ist nun leicht zu bewirken, denn die Richtung von \mathfrak{h}_r ist bekannt, das Bild b_r fällt zusammen mit jenem von v_r und AB , während $\mathfrak{h}_{s,2}$ jedenfalls senkrecht stehen muß auf der Stange AB , weshalb das Bild davon durch e_{AB} zu legen ist. Somit ist in der Geraden se_{AB} das Bild des Vektors $\mathfrak{h}_{s,2}$ gewonnen, wo s den Schnittpunkt von r mit b_r bedeutet. Die zugehörigen Bildlängen sind im Beschleunigungsplane durch Zerlegung von r nach den angegebenen Richtungen zu finden. Die Beschleunigung jenes Punktes B der Stange, der augenblicklich mit dem Mittelpunkt O_1 der Hülse zusammenfällt, ist nun

$$\mathfrak{h}_B = \mathfrak{h}_r + \mathfrak{h}_z,$$

denn seine Systembeschleunigung verschwindet.

Damit ist b_B im Beschleunigungsplane gefunden, das Bild b_B geht durch e_ω , da \mathfrak{h}_r und \mathfrak{h}_z senkrecht stehen auf der momentanen Drehachse w .

Macht man

$$A' \alpha' = b_A,$$

$$B' \beta' = b_B,$$

so ergibt sich die Bildlänge der Beschleunigung des Punktes C mit $b_c = \overrightarrow{C' \gamma'}$, wobei der Punkt γ' auf der Geraden $\alpha' \beta'$ bestimmt ist durch

$$\alpha' \gamma' \gamma' \sim A' C' B'$$

Die Bilder aller Beschleunigungen der Punkte der Geraden AB sind einer Ebene parallel, somit schneiden sie sich im Punkte s_1 , dem Schnittpunkte der Bilder b_A und b_B ; daher ist das Bild b_c durch s_1 zu legen.

IV. Analytische Beschreibung der Bewegung der Kurbelschleife.

Um die Überlegenheit der hier gezeigten graphischen Methode gegenüber der gebräuchlichen rein rechnerischen zu erkennen, genügt es, letztere in ihrer Anwendung auf das gestellte Problem kurz anzudeuten.

Da der Mechanismus der Kurbelschleife zwangläufig ist, wenn — wie dies hier geschehen ist — auf die Drehung der Stange AB um die eigene Achse keine Rücksicht genommen wird, so ist die jeweilige Stellung des Getriebes durch eine Koordinate festgelegt; wir wählen hierfür den Drehwinkel φ der Kurbel (Fig. 3).

Sind $x_0, 0, z_0$ die Koordinaten des festen Kurbelendes O bezüglich des in den Mittelpunkt O_1 der Hülse gelegten orthogonalen

Achsenkreuzes $X Y Z$ und bedeutet r die Länge des Kurbelarmes $O A$, so ergeben sich die Koordinaten des durch $\overline{A C} = c$ festgelegten Punktes C zu:

$$x = (x_0 + r \cos \varphi) \left(1 - \frac{c}{W}\right)$$

$$y = r \sin \varphi \left(1 - \frac{c}{W}\right)$$

$$z = z_0 \left(1 - \frac{c}{W}\right),$$

worin zur Abkürzung gesetzt wurde

$$W = \sqrt{x_0^2 + r^2 + z_0^2 + 2 x_0 r \cos \varphi}$$

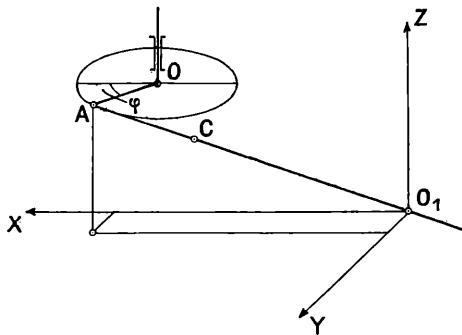


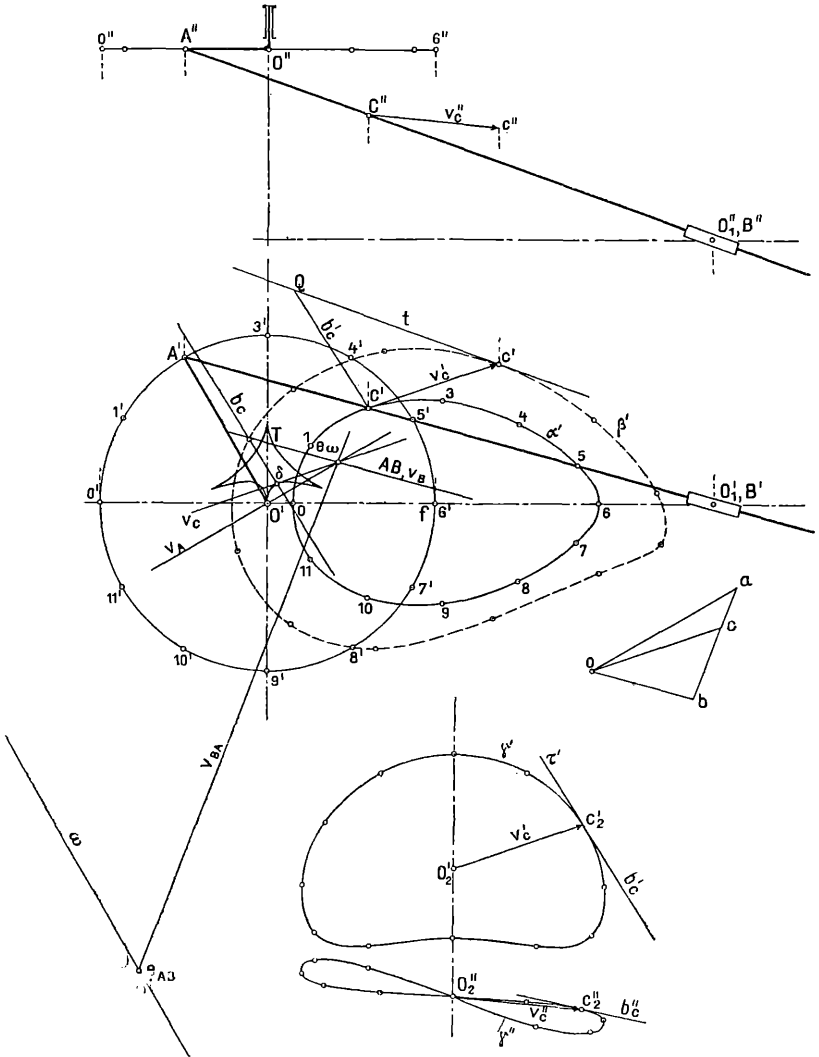
Fig. 3.

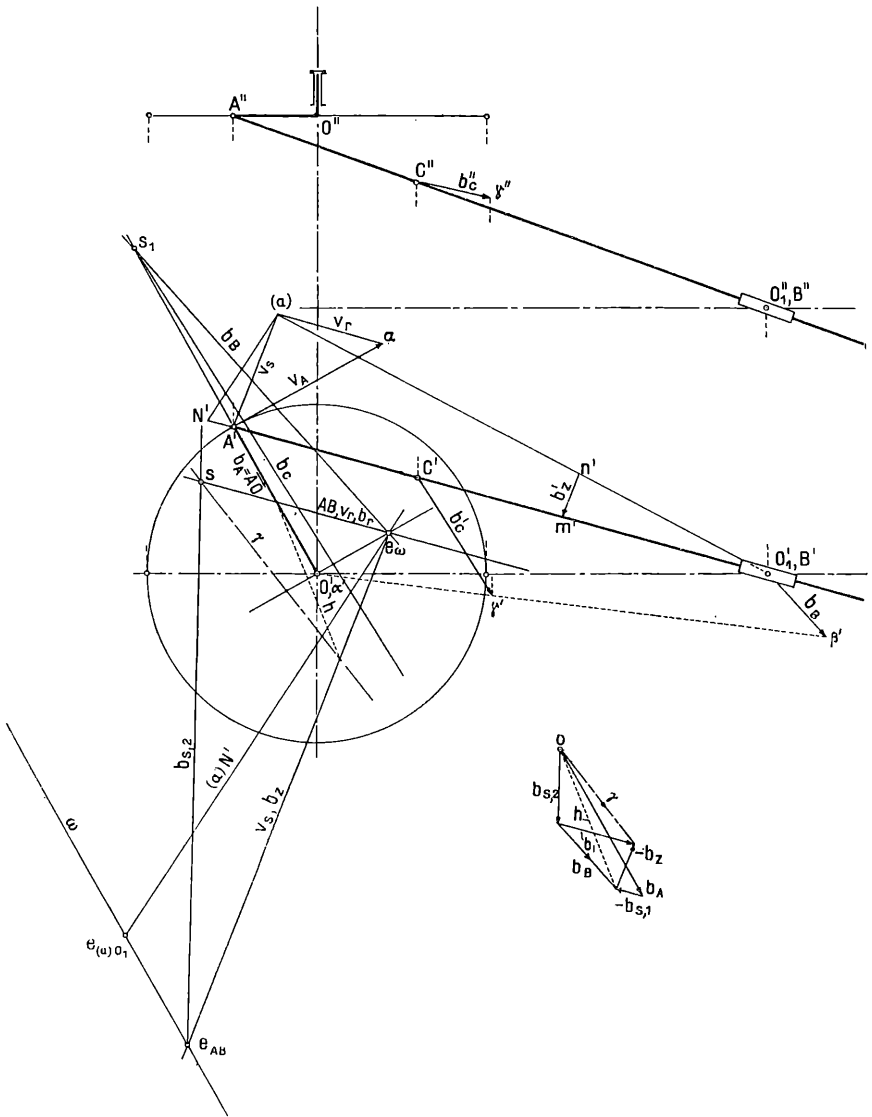
Die Ableitung dieser Koordinaten nach der Zeit liefert die Komponenten der Geschwindigkeit v_c nach den drei Achsrichtungen,

wobei die Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ gleich »1« zu setzen ist;

eine nochmalige Ableitung führt zur Kenntnis der drei Komponenten der Beschleunigung \dot{v}_c .

Auf die Anschreibung der sich ergebenden langen Formeln, die bei der zahlenmäßigen Auswertung für einen ganzen Umlauf eine recht mühsame Rechnung erfordern, kann hier verzichtet werden.





ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1929

Band/Volume: [138_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Federhofer Karl

Artikel/Article: [Graphische Kinematik der räumlich schwingenden Kurbelschleife. 27-34](#)