©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Über Kurven mit isotropen Normalen

Von

Else Schrenzel

(Mit 2 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Juni 1929)

Unter isotropen Kurven (Minimalkurven) versteht man bekanntlich Kurven, bei denen der Tangentenvektor in jedem Punkte der Kurve ein isotroper Vektor ist, d. h. nach einem Punkte des absoluten Gebildes weist. Es dürfte von Interesse sein, Kurven zu untersuchen, bei denen eine ihrer Normalen ein isotroper Vektor ist. Es ist bekannt, daß im R_2 nur isotrope Gerade möglich sind, bei denen Tangente und Normale zusammenfallen, im R_3 dagegen außer den isotropen Geraden noch eine zweite Gattung derartiger Kurven existiert, nämlich alle Kurven, die in isotropen Ebenen liegen, d. h. in Ebenen, die den absoluten Kegelschnitt berühren; sie haben isotrope Haupt- und Binormale. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine Klassifikation der Kurven des R_4 nach diesen Gesichtspunkten.

Der uneigentliche Punkt der durch einen Vektor gegebenen Richtung soll im Folgenden immer als die uneigentliche Spur dieses Vektors bezeichnet und durch den entsprechenden lateinischen Buchstaben mit dem oberen Stellenzeiger u gekennzeichnet werden, also z. B. die uneigentlichen Spuren von $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'''$ mit x_1^u, x_2^u, x_3^u.

Zwei Vektoren stehen normal aufeinander, wenn ihre uneigentlichen Spuren bezüglich des absoluten Gebildes des betreffenden Raumes konjugiert sind. Ein Vektor ist isotrop, wenn seine uneigentliche Spur auf dem absoluten Gebilde liegt.

Das absolute Gebilde A_2^2 des R_4 läßt sich durch folgende Gleichungen in homogenen rechtwinkligen Punktkoordinaten darstellen:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ x_0 &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

ist also eine nichtsinguläre Fläche zweiter Ordnung im uneigentlichen R_3.

Es sei eine Kurve in der regulär analytischen Vektorparameterdarstellung

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t) \tag{2}$$

gegeben. Die erste Ableitung des Vektors $\mathfrak{x}$ nach dem Parameter t ergibt den Tangentenvektor in dem betreffenden Kurvenpunkt. Die Schmiegebene ist die Grenzlage einer Ebene durch drei

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

benachbarte Punkte und wird daher durch $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ aufgespannt, wobei als Voraussetzung lineare Unabhängigkeit der Vektoren gilt. (Der Fall der geraden Linie wird also ausgeschlossen.)

Als Schmiegraum definieren wir die Grenzlage eines R_3 durch vier benachbarte Punkte. Unter der Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}'''$ wird er durch diese drei Vektoren aufgespannt. Wenn zwischen ihnen lineare Abhängigkeit für alle Werte von t des betrachteten Bereiches besteht, so degeneriert der Schmiegraum zur Schmiegebene, dann liegt also die ganze Kurve in ihrer Schmiegebene.

Als erste Normale kann ein Vektor aufgefaßt werden, der in der Schmiegebene liegt und auf der Tangente normal steht. Er läßt sich daher in der Gestalt $\alpha\mathfrak{x}'+\beta\mathfrak{x}''$ darstellen und muß folgender Beziehung genügen:

$$\mathfrak{x}'(\alpha\mathfrak{x}'+\beta\mathfrak{x}'')=0. \tag{3}$$

Die zweite Normale liegt im Schmiegraum und muß normal zur Schmiegebene stehen, daher auch normal auf den beiden Vektoren, die die Schmiegebene aufspannen; also läßt sie sich in der Gestalt $\lambda\mathfrak{x}'+\mu\mathfrak{x}''+\nu\mathfrak{x}'''$ darstellen und muß folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}'(\lambda\mathfrak{x}'+\mu\mathfrak{x}''+\nu\mathfrak{x}''')&=0\\ \mathfrak{x}''(\lambda\mathfrak{x}'+\mu\mathfrak{x}''+\nu\mathfrak{x}''')&=0.\end{aligned} \tag{4}$$

Die dritte Normale ist ein Vektor $\mathfrak{y}$, der normal auf dem Schmiegraum steht, daher muß er den folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}'\,\mathfrak{y}&=0\\ \mathfrak{x}''\,\mathfrak{y}&=0\\ \mathfrak{x}'''\,\mathfrak{y}&=0.\end{aligned} \tag{5}$$

Wir unterscheiden im R_4 folgende Fälle:

1. Die Kurve sei eine isotrope Kurve des R_4.

Es gilt also

$$\mathfrak{x}'^2=0, \tag{6}$$

durch Differentiation folgt

$$\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''=0. \tag{7}$$

Die uneigentliche Spur x_1^u von $\mathfrak{x}'$ liegt also auf dem absoluten Gebilde, außerdem sind $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ bezüglich des absoluten Gebildes zueinander konjugiert, d. h. x_2^u liegt auf der Tangentialebene, die sich in x_1^u an die absolute A_2^2 des R_4 legen läßt.

Nach (3) sind α und β beliebig, die erste Normale liegt daher beliebig in der Schmiegebene. Soll sie isotrop sein, so muß außerdem

$$(\alpha\mathfrak{x}'+\beta\mathfrak{x}'')^2=0, \tag{8}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

daher $\beta = 0$ sein, falls $\mathfrak{x}''^2 \neq 0$ ist, d. h. sie fällt mit der Tangente zusammen. Ist dagegen

$$\mathfrak{x}''^2 = 0, \tag{9}$$

so ist jeder Vektor der Schmiegebene isotrop, die Schmiegebene daher ametrisch[1], d. h. ihre uneigentliche Spur ist eine Gerade der absoluten A_2^2.

Nach einem Satz von J. Lense[2] ziehen die Gleichungen (6) und (9) nach sich, daß sämtliche Ableitungen von der dritten an isotrop und Linearkombinationen der beiden ersten sind, d. h. aber geometrisch: Die betreffende isotrope Kurve liegt in einer ametrischen Ebene.

Wenn man die Gleichungen (6) und (7) berücksichtigt, so folgt aus (4)

$$\nu \mathfrak{x}' \mathfrak{x}''' = 0$$
$$\mu \mathfrak{x}''^2 + \nu \mathfrak{x}'' \mathfrak{x}''' = 0.$$

Gilt (9), so ist auch

$$\mathfrak{x}' \mathfrak{x}''' = 0 \tag{10}$$
$$\mathfrak{x}'' \mathfrak{x}''' = 0, \tag{11}$$

als bleiben μ und ν unbestimmt. Die zweite Normale ist unbestimmt. Die ganze Kurve liegt in einem ametrischen R_2.

Ist dagegen

$$\mathfrak{x}''^2 \neq 0, \tag{12}$$

so ist auch

$$\mathfrak{x}' \mathfrak{x}''' \neq 0, \tag{13}$$

daher $\mu = 0$ und $\nu = 0$, das bedeutet aber, daß die zweite Normale mit der Tangente zusammenfällt.

Die Gleichungen (5) sind drei lineare homogene Gleichungen vom Rang 3 für die vier unbekannten Komponenten des Vektors $\mathfrak{y}$ der dritten Normalen wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}'''$ und haben wegen (12) und (13) eine von $\mathfrak{x}'$ verschiedene Lösung. Die dritte Normale ist somit von der Tangente verschieden und nicht isotrop. Denn nehmen

---

[1] Vgl. J. Lense, Über ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante, Deutsche Math. Ver., *35* (1926), p. 280 bis 294.

[2] J. Lense, Über die Tangentialräume ametrischer Mannigfaltigkeiten, Math. Zeitschr., *29* (1928), p. 87 bis 95. Für $p = \frac{n}{2}$ wird nämlich der Schnitt R_{n-p-1}^n (p. 93 bis 94) ein R_{p-1}^n, der Punkt $\overset{n}{y}_{p+1}$ somit eine Linearkombination der Punkte $\overset{n}{y}_1, \overset{n}{y}_2, \ldots\ldots \overset{n}{y}_p$ und liegt daher auf der A_{n-2}^2, d. h. die $(k+1)^{\text{te}}$ und höheren Ableitungen des Vektors hängen von den ersten k Ableitungen linear ab und sind infolgedessen ebenfalls isotrop.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

wir den Fall an, daß die dritte Normale isotrop wäre, so müßte die Gleichung

$$\mathfrak{y}^2 = 0 \tag{14}$$

bestehen. Nach der ersten Gleichung (5) muß die uneigentliche Spur y'' von $\mathfrak{y}$ auf der Tangentialebene von x_1'' liegen. Außerdem liegt y'' zufolge (14) auf dem absoluten Gebilde, daher auf einer Erzeugenden durch x_1''. x_2'' ist sowohl zu x_1'' als auch zu y'' konjugiert, daher liegt x_2'' auf der Geraden $y'' x_2''$; daraus folgt aber Gleichung (9), was einen Widerspruch mit der Voraussetzung bedeutet. Die Kurve läge ja sonst in einer (ametrischen) Ebene.

Die Kurve, die aus den uneigentlichen Punkten der Tangenten der isotropen Kurve besteht, hat die uneigentliche Spur des Schmiegraumes der ursprünglichen Kurve zur Schmiegebene und die uneigentliche Spur der Schmiegebene zur Tangente.

2. Die Kurve sei eine nichtisotrope Kurve des R_4. Wir führen den Bogen als Parameter ein, setzen infolgedessen

$$\mathfrak{x}'^2 = 1. \tag{15}$$

Durch Differentiation folgt wieder Gleichung (7). Als erste Normale kann man gemäß (3) den Vektor $\mathfrak{x}''$ auffassen. x_2'' liegt nach (7) auf der Polarebene von x_1''.

Im Folgenden machen wir die Annahme einer isotropen ersten Normalen, setzen also die Gültigkeit der Gleichungen (9), (10), (11) voraus. Die Schmiegebene ist daher isotrop. Aus (15), (7), (9), (10), (11) folgt für die zweite Normale $\lambda = 0$, μ, ν beliebig, sie liegt daher beliebig in der Ebene, die durch $\mathfrak{x}''$ und $\mathfrak{x}'''$ aufgespannt wird, d. h. in der zur Schmiegebene normalen Ebene. Die Gleichungen (7), (9), (10) und (11) sagen aus: x_2'' liegt auf der A_2^3, x_1'' auf der Tangentialebene von x_2'' an die A_2^3, x_3'' auf der konjugierten Tangente von $x_1'' x_2''$.

Die uneigentliche Spur der dritten Normalen ist der Pol der uneigentlichen Ebene des Schmiegraumes, diese ist aber Tangentialebene an die absolute Fläche, daher ist der Pol der Berührungspunkt. Dabei sind $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'''$ linear unabhängig vorausgesetzt. Erste und dritte Normale fallen zusammen. Hängt $\mathfrak{x}'''$ von $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ linear ab, so liegt die Kurve in ihrer isotropen Schmiegebene.

Die uneigentliche Spur der zweiten Normalen liegt nach dem früheren beliebig auf T (siehe Fig. 1).

Wenn wir die Tangentialebene der A_2^3 längs C_n'' gleiten lassen, so entsteht eine Torse, deren Erzeugende die Geraden G sind. Die Gratlinie dieser Torse ist die Kurve C_t''. Die ursprüngliche Kurve C hat somit Begleitkurven B, deren Tangenten die ersten (dritten) Normalen von C sind. Die ersten (dritten) Normalen von C sind aber isotrop, daher auch die Begleitkurven B.

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Daraus folgt eine punktweise Konstruktion von B:

Man wählt einen Punkt P beliebig, weist ihm einen Punkt Q auf C zu, legt durch P eine Parallele zur ersten Normale in Q. Diese ist die Tangente t von B in dem Punkte P. P_1 sei ein Nachbarpunkt von P auf B. Durch P_1 legen wir die Parallele zur ersten Normale im Nachbarpunkt Q_1 von Q auf C. In dieser Weise kann man fortfahren. C und B sind also punktweise aufeinander abbildbar. Die Schmiegebenen von B haben die Tangenten von C_n^u zur uneigentlichen Spur, T ist aber gerade die konjugierte Richtung von G, d. h. die Schmiegebenen der Begleitkurve B stehen normal auf den Schmiegebenen der Kurve C. Aus der Tatsache, daß die uneigentlichen Spuren der Schmiegebenen beider Kurven Tangenten an das absolute Gebilde sind, kann man folgern, daß die Schmiegebenen isotrop sind.

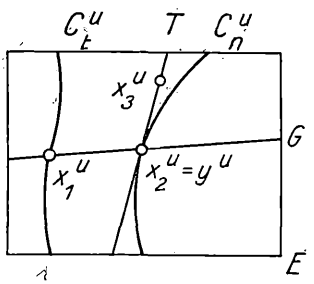

Fig. 1.

E = Uneigentliche Spur des Schmiegraumes
G = Uneigentliche Spur der Schmiegebene
T = Konjugierte Tangente zu G
C_n^u = Kurve, die aus den uneigentlichen Spuren der ersten (dritten) Normalen besteht.
C_t^u = Kurve, die aus den uneigentlichen Spuren der Tangenten besteht.

Allgemeine Konstruktion der Kurve C: Man nimmt eine isotrope Kurve B, konstruiert die Normalebenen ihrer Schmiegebenen; diese bilden eine Torse, deren Gratlinie die allgemeinste Kurve C darstellt. Die uneigentliche Spur des Normalraumes der Begleitkurve ist Tangentialebene an das absolute Gebilde. Die uneigentliche Spur G der Schmiegebene an die Kurve C liegt in der uneigentlichen Spur E des Normalraumes der Begleitkurve B; d. h. aber, die Schmiegebene von C ist parallel zum Normalraum der Begleitkurve. Die Polarebenen der Punkte der Gratlinie C_t^u bezüglich der absoluten Fläche sind die Schmiegebenen der Flächenkurve C_n^u, wie durch eine einfache Rechnung folgt.

Daraus ergibt sich, daß die Normalräume der ursprünglichen Kurve C parallel sind zu den Schmiegräumen der Begleitkurve B. Umgekehrt sind die Schmiegräume von C

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

parallel zu den Normalräumen von B, denn die uneigentliche Ebene des Normalraumes der Begleitkurve ist die Tangentialebene an die A_2^2 und die uneigentliche Ebene des Schmiegraumes der Kurve C ist ebenfalls die Tangentialebene an die absolute Fläche, da sie x_3^u enthält.

Die Kurven C_t^u und C_n^u sind punktweise aufeinander abbildbar. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte bilden eine Regelfläche, die der Schnitt einer V_3 mit dem uneigentlichen Raume ist. Die ursprüngliche Kurve C und die Begleitkurve B liegen auf der V_3.

3. Im Folgenden machen wir die Annahme einer isotropen zweiten Normalen und nichtisotropen Tangente.

Die zweite Normale ist isotrop, daher liegt ihre uneigentliche Spur N_2^u auf dem absoluten Gebilde. Die uneigentliche Spur T^u der Tangente liegt daher auf der Tangentialebene von N_2^u. Die erste Normale ist nicht isotrop (sonst hätte man Fall 2), ihre uneigentliche Spur N_1^u muß zu T^u und N^u konjugiert sein. Sie liegt daher auf der zu $T^u N_2^u$ konjugierten Tangente. Die uneigentliche Spur N_3^u der dritten Normalen ist zu allen übrigen konjugiert, sie muß daher mit N_2^u zusammenfallen (siehe Fig. 2).

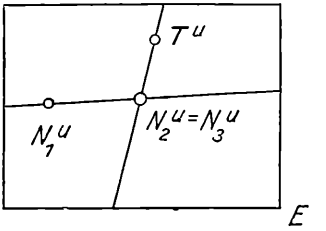

Fig. 2.

E = Uneigentliche Spur des Schmiegraumes
T^u = Uneigentliche Spur der Tangente
N_1^u = Uneigentliche Spur der ersten Normalen
N_2^u = Uneigentliche Spur der zweiten Normalen
N_3^u = Uneigentliche Spur der dritten Normalen.

Der Schmiegraum der Kurve ist isotrop, denn seine uneigentliche Spur E berührt das absolute Gebilde. E ist fest. Denn würde sich E ändern, so müßte die uneigentliche Spur der Schmiegebene durch N_2^u hindurchgehen; da sie aber durch T^u und N_1^u hindurchgeht, ist diese Annahme unmöglich, daher muß E fest bleiben. Die Kurve liegt also in einem festen isotropen R_3. Analytisch läßt sich diese Kurve folgendermaßen charakterisieren:

Aus (15), (7), (4), (12), (13) und

$$(\lambda \mathfrak{x}' + \mu \mathfrak{x}'' + \nu \mathfrak{x}''')^2 = 0 \tag{16}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

folgt
$$\lambda = -\nu \mathfrak{x}' \mathfrak{x}'''$$
$$\mu = -\frac{\nu \mathfrak{x}'' \mathfrak{x}'''}{\mathfrak{x}''^2}$$
daher nach (16)
$$\mathfrak{x}'''^2 = (\mathfrak{x}' \mathfrak{x}''')^2 + \frac{(\mathfrak{x}'' \mathfrak{x}''')^2}{\mathfrak{x}''^2},$$
als Differentialgleichung der Kurve im isotropen R_3.

Man sieht: Falls von den vier aufeinander senkrecht stehenden Vektoren: Tangente, erste, zweite und dritte Normale, einer isotrop ist, fällt mit ihm ein zweiter dieser vier Vektoren zusammen. Der Satz gilt auch im R_n und lautet dann so:

Ist von $n-1$ auf einander senkrecht stehenden linear unabhängigen Vektoren des R_n einer isotrop, so fällt mit ihm jeder zu diesen $n-1$ Vektoren normale Vektor zusammen.

Beweis: Die $n-1$ Vektoren seien $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \ldots, \mathfrak{x}_{n-1}$, ihre uneigentlichen Spuren $x_1^u, x_2^u, x_3^u \ldots x_{n-1}^u$. x_1 sei isotrop, d. h. x_1^u auf der A_{n-2}^2 des R_n gelegen. x_2^u ist zu x_1^u bezüglich der A_{n-2}^2 konjugiert, liegt also auf dem Tangential-R_{n-2} des Punktes x_1^u. Allgemein ist x_k^u $(2 \leqq k \leqq n)$ zu $x_1^u, x_2^u, \ldots x_{k-1}^u$ konjugiert, liegt infolgedessen auf dem zum Verbindungs-R_{k-2} dieser Punkte konjugierten R_{n-k}. Ist $\mathfrak{y}$ ein zu den gegebenen Vektoren senkrechter Vektor und y^u seine uneigentliche Spur, so ist y^u der Pol des Verbindungs-R_{n-2} der Punkte $x_1^u, x_2^u \ldots, x_n^u$ und fällt daher mit x_1^u zusammen.

Zusammenfassung.

Im R_4 unterscheidet man folgende Gattungen von Kurven mit isotroper Tangente oder Normale:

1. Isotrope Gerade:

$$\mathfrak{x}'^2 = 0, \ \mathfrak{x}'' \text{ proportional } \mathfrak{x}'.$$

2. Kurven in ametrischen Ebenen:

$$\mathfrak{x}'^2 = 0, \ \mathfrak{x}''^2 = 0, \ \mathfrak{x}'' \text{ nicht proportional } \mathfrak{x}'.$$

3. Isotrope Kurven, die keine Geraden sind. Sie haben isotrope Tangente, die erste Normale ist unbestimmt (jede Richtung der Schmiegebene kann als erste Normale gelten), die zweite Normale fällt mit der Tangente zusammen, die dritte Normale ist von der Tangente verschieden und nicht isotrop:

$$\mathfrak{x}'^2 = 0, \ \mathfrak{x}''^2 \neq 0, \ \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''' \text{ linear unabhängig.}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

4. Kurven im isotropen R_3:

Die zweite Normale ist isotrop, die Tangente und erste Normale sind nicht isotrop, die dritte Normale fällt mit der zweiten Normale zusammen und ist isotrop:

$$\mathfrak{x}'^2 = 1,\ \mathfrak{x}''^2 \neq 0,\ \mathfrak{x}'''^2 = (\mathfrak{x}'\mathfrak{x}''')^2 + \frac{(\mathfrak{x}''\mathfrak{x}''')^2}{\mathfrak{x}''^2},\ \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''' \text{ linear unabhängig.}$$

5. Kurven mit isotroper erster Normalen:

Die Tangente ist nicht isotrop, die erste Normale ist isotrop, die zweite Normale liegt beliebig in der zur Schmiegebene normalen Ebene. Die dritte Normale fällt mit der ersten Normalen zusammen und ist isotrop. Diese Kurve hat die auf p. 442 aufgezählten Eigenschaften:

$$\mathfrak{x}'^2 = 1,\ \mathfrak{x}''^2 = 0,\ \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'', \mathfrak{x}''' \text{ linear unabhängig.}$$

6. Kurven in isotropen Ebenen:

Wie bei 5., nur liegt die Kurve in einer festen, isotropen Ebene, d. h. G in Fig. 1 ist fest.

$\mathfrak{x}'^2 = 1$, $\mathfrak{x}''^2 = 0$, $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{x}''$, $\mathfrak{x}'''$ linear abhängig, aber nicht $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$.

Als Anhang sei noch folgendes erwähnt:

Für die von J. Lense[1] betrachteten p-fach isotropen Kurven des R_n.

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(t) \tag{17}$$

mit

$$\mathfrak{x}'^2 = 0,\ \mathfrak{x}''^2 = 0, \qquad \mathfrak{x}^{(p)2} = 0, \text{ aber } \mathfrak{x}^{(p+1)2} \neq 0$$

ergeben sich durch eine längere, aber im wesentlichen einfache Rechnung folgende Sätze:

Definiert man die k-te Normale als einen im Schmieg-R_{k+1} gelegenen, senkrecht auf dem Schmieg-R_k stehenden Vektor $\mathfrak{n}_k$, so gilt: $\mathfrak{n}_k$ liegt unbestimmt im Schmieg-R_{k+1} und ist isotrop für $1 \leqq k \leqq p-1$, $\mathfrak{n}_p$ liegt unbestimmt im Schmieg-R_{p+1} und ist im allgemeinen nicht isotrop, $\mathfrak{n}_k$ liegt im Schmieg-R_{2p-k+1} und ist isotrop für $p \leqq k \leqq 2p$. Die übrigen Normalen sind im allgemeinen bestimmt und nicht isotrop und liegen in den ihrer Definition entsprechenden Schmiegräumen.

---

[1] Vgl. die auf p. 441 in Fußnote 2 angegebene Abhandlung, p. 93.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1929

Band/Volume: 138_2a

Autor(en)/Author(s): Schrenzel Else

Artikel/Article: Über Kurven mit isotropen Normalen. 439-446