

# Über Kurven mit isotropen Normalen

Von

Else Schrenzel

(Mit 2 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Juni 1929)

Unter isotropen Kurven (Minimalkurven) versteht man bekanntlich Kurven, bei denen der Tangentenvektor in jedem Punkte der Kurve ein isotroper Vektor ist, d. h. nach einem Punkte des absoluten Gebildes weist. Es dürfte von Interesse sein, Kurven zu untersuchen, bei denen eine ihrer Normalen ein isotroper Vektor ist. Es ist bekannt, daß im  $R_2$  nur isotrope Gerade möglich sind, bei denen Tangente und Normale zusammenfallen, im  $R_3$  dagegen außer den isotropen Geraden noch eine zweite Gattung derartiger Kurven existiert, nämlich alle Kurven, die in isotropen Ebenen liegen, d. h. in Ebenen, die den absoluten Kegelschnitt berühren; sie haben isotrope Haupt- und Binormale. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine Klassifikation der Kurven des  $R_4$  nach diesen Gesichtspunkten.

Der uneigentliche Punkt der durch einen Vektor gegebenen Richtung soll im Folgenden immer als die uneigentliche Spur dieses Vektors bezeichnet und durch den entsprechenden lateinischen Buchstaben mit dem oberen Stellenzeiger  $u$  gekennzeichnet werden, also z. B. die uneigentlichen Spuren von  $\xi^I, \xi^{II}, \xi^{III}$  mit  $x_1^u, x_2^u, x_3^u$ .

Zwei Vektoren stehen normal aufeinander, wenn ihre uneigentlichen Spuren bezüglich des absoluten Gebildes des betreffenden Raumes konjugiert sind. Ein Vektor ist isotrop, wenn seine uneigentliche Spur auf dem absoluten Gebilde liegt.

Das absolute Gebilde  $A_2^2$  des  $R_4$  läßt sich durch folgende Gleichungen in homogenen rechtwinkligen Punktkoordinaten darstellen:

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 &= 0 \\ x_0 &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

ist also eine nichtsinguläre Fläche zweiter Ordnung im uneigentlichen  $R_3$ .

Es sei eine Kurve in der regulär analytischen Vektorparameterdarstellung

$$\xi = \xi(t)\tag{2}$$

gegeben. Die erste Ableitung des Vektors  $\xi$  nach dem Parameter  $t$  ergibt den Tangentenvektor in dem betreffenden Kurvenpunkt. Die Schmiegebene ist die Grenzlage einer Ebene durch drei

benachbarte Punkte und wird daher durch  $\xi'$  und  $\xi''$  aufgespannt, wobei als Voraussetzung lineare Unabhängigkeit der Vektoren gilt. (Der Fall der geraden Linie wird also ausgeschlossen.)

Als Schmiegraum definieren wir die Grenzlage eines  $R_3$  durch vier benachbarte Punkte. Unter der Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit von  $\xi'$ ,  $\xi''$ ,  $\xi'''$  wird er durch diese drei Vektoren aufgespannt. Wenn zwischen ihnen lineare Abhängigkeit für alle Werte von  $t$  des betrachteten Bereiches besteht, so degeneriert der Schmiegraum zur Schmiegeebene, dann liegt also die ganze Kurve in ihrer Schmiegeebene.

Als erste Normale kann ein Vektor aufgefaßt werden, der in der Schmiegeebene liegt und auf der Tangente normal steht. Er läßt sich daher in der Gestalt  $\alpha \xi' + \beta \xi''$  darstellen und muß folgender Beziehung genügen:

$$\xi' (\alpha \xi' + \beta \xi'') = 0. \quad (3)$$

Die zweite Normale liegt im Schmiegraum und muß normal zur Schmiegeebene stehen, daher auch normal auf den beiden Vektoren, die die Schmiegeebene aufspannen; also läßt sie sich in der Gestalt  $\lambda \xi' + \mu \xi'' + \nu \xi'''$  darstellen und muß folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \xi' (\lambda \xi' + \mu \xi'' + \nu \xi''') &= 0 \\ \xi'' (\lambda \xi' + \mu \xi'' + \nu \xi''') &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Die dritte Normale ist ein Vektor  $\eta$ , der normal auf dem Schmiegraum steht, daher muß er den folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} \xi' \eta &= 0 \\ \xi'' \eta &= 0 \\ \xi''' \eta &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Wir unterscheiden im  $R_4$  folgende Fälle:

1. Die Kurve sei eine isotrope Kurve des  $R_4$ .

Es gilt also

$$\xi'^2 = 0, \quad (6)$$

durch Differentiation folgt

$$\xi' \xi'' = 0. \quad (7)$$

Die uneigentliche Spur  $x_1''$  von  $\xi'$  liegt also auf dem absoluten Gebilde, außerdem sind  $\xi'$  und  $\xi''$  bezüglich des absoluten Gebildes zueinander konjugiert, d. h.  $x_2''$  liegt auf der Tangentialebene, die sich in  $x_1''$  an die absolute  $A_2^2$  des  $R_4$  legen läßt.

Nach (3) sind  $\alpha$  und  $\beta$  beliebig, die erste Normale liegt daher beliebig in der Schmiegeebene. Soll sie isotrop sein, so muß außerdem

$$(\alpha \xi' + \beta \xi'')^2 = 0, \quad (8)$$

daher  $\beta = 0$  sein, falls  $\chi''^2 \neq 0$  ist, d. h. sie fällt mit der Tangente zusammen. Ist dagegen

$$\chi''^2 = 0, \quad (9)$$

so ist jeder Vektor der Schmiegeebene isotrop, die Schmiegeebene daher ametrisch<sup>1</sup>, d. h. ihre uneigentliche Spur ist eine Gerade der absoluten  $A_2^2$ .

Nach einem Satz von J. Lense<sup>2</sup> ziehen die Gleichungen (6) und (9) nach sich, daß sämtliche Ableitungen von der dritten an isotrop und Linearkombinationen der beiden ersten sind, d. h. aber geometrisch: Die betreffende isotrope Kurve liegt in einer ametrischen Ebene.

Wenn man die Gleichungen (6) und (7) berücksichtigt, so folgt aus (4)

$$\begin{aligned} \nu \chi' \chi''' &= 0 \\ \mu \chi''^2 + \nu \chi'' \chi''' &= 0. \end{aligned}$$

Gilt (9), so ist auch

$$\chi' \chi''' = 0 \quad (10)$$

$$\chi'' \chi''' = 0, \quad (11)$$

als bleiben  $\mu$  und  $\nu$  unbestimmt. Die zweite Normale ist unbestimmt. Die ganze Kurve liegt in einem ametrischen  $R_2$ .

Ist dagegen

$$\chi''^2 \neq 0, \quad (12)$$

so ist auch

$$\chi' \chi''' \neq 0, \quad (13)$$

daher  $\mu = 0$  und  $\nu = 0$ , das bedeutet aber, daß die zweite Normale mit der Tangente zusammenfällt.

Die Gleichungen (5) sind drei lineare homogene Gleichungen vom Rang 3 für die vier unbekanntenen Komponenten des Vektors  $\eta$  der dritten Normalen wegen der vorausgesetzten linearen Unabhängigkeit von  $\chi'$ ,  $\chi''$ ,  $\chi'''$  und haben wegen (12) und (13) eine von  $\chi'$  verschiedene Lösung. Die dritte Normale ist somit von der Tangente verschieden und nicht isotrop. Denn nehmen

<sup>1</sup> Vgl. J. Lense, Über ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante, Deutsche Math. Ver., 35 (1926), p. 280 bis 294.

<sup>2</sup> J. Lense, Über die Tangentialräume ametrischer Mannigfaltigkeiten, Math. Zeitschr., 29 (1928), p. 87 bis 95. Für  $p = \frac{n}{2}$  wird nämlich der Schnitt  $R_{n-p-1}''$

(p. 93 bis 94) ein  $R_{p-1}''$ , der Punkt  $y_{p+1}''$  somit eine Linearkombination der Punkte  $y_1'', y_2'', \dots, y_p''$  und liegt daher auf der  $A_{n-2}^2$ , d. h. die  $(k+1)$ te und höheren Ableitungen des Vektors hängen von den ersten  $k$  Ableitungen linear ab und sind infolgedessen ebenfalls isotrop.

wir den Fall an, daß die dritte Normale isotrop wäre, so müßte die Gleichung

$$\eta^2 = 0 \quad (14)$$

bestehen. Nach der ersten Gleichung (5) muß die uneigentliche Spur  $\gamma''$  von  $\eta$  auf der Tangentialebene von  $x_1''$  liegen. Außerdem liegt  $\gamma''$  zufolge (14) auf dem absoluten Gebilde, daher auf einer Erzeugenden durch  $x_1''$ .  $x_2''$  ist sowohl zu  $x_1''$  als auch zu  $\gamma''$  konjugiert, daher liegt  $x_2''$  auf der Geraden  $\gamma'' x_2''$ ; daraus folgt aber Gleichung (9), was einen Widerspruch mit der Voraussetzung bedeutet. Die Kurve läge ja sonst in einer (ametrischen) Ebene.

Die Kurve, die aus den uneigentlichen Punkten der Tangenten der isotropen Kurve besteht, hat die uneigentliche Spur des Schmieg-raumes der ursprünglichen Kurve zur Schmiegebene und die uneigentliche Spur der Schmiegebene zur Tangente.

2. Die Kurve sei eine nichtisotrope Kurve des  $R_4$ . Wir führen den Bogen als Parameter ein, setzen infolgedessen

$$\xi'^2 = 1. \quad (15)$$

Durch Differentiation folgt wieder Gleichung (7). Als erste Normale kann man gemäß (3) den Vektor  $\xi''$  auffassen.  $x_2''$  liegt nach (7) auf der Polarebene von  $x_1''$ .

Im Folgenden machen wir die Annahme einer isotropen ersten Normalen, setzen also die Gültigkeit der Gleichungen (9), (10), (11) voraus. Die Schmiegebene ist daher isotrop. Aus (15), (7), (9), (10), (11) folgt für die zweite Normale  $\lambda = 0$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  beliebig, sie liegt daher beliebig in der Ebene, die durch  $\xi''$  und  $\xi'''$  aufgespannt wird, d. h. in der zur Schmiegebene normalen Ebene. Die Gleichungen (7), (9), (10) und (11) sagen aus:  $x_2''$  liegt auf der  $A_2^3$ ,  $x_1''$  auf der Tangentialebene von  $x_2''$  an die  $A_2^3$ ,  $x_3''$  auf der konjugierten Tangente von  $x_1'' x_2''$ .

Die uneigentliche Spur der dritten Normalen ist der Pol der uneigentlichen Ebene des Schmieg-raumes, diese ist aber Tangentialebene an die absolute Fläche, daher ist der Pol der Berührungspunkt. Dabei sind  $\xi'$ ,  $\xi''$ ,  $\xi'''$  linear unabhängig vorausgesetzt. Erste und dritte Normale fallen zusammen. Hängt  $\xi'''$  von  $\xi'$  und  $\xi''$  linear ab, so liegt die Kurve in ihrer isotropen Schmiegebene.

Die uneigentliche Spur der zweiten Normalen liegt nach dem früheren beliebig auf  $T$  (siehe Fig. 1).

Wenn wir die Tangentialebene der  $A_2^3$  längs  $C''$  gleiten lassen, so entsteht eine Torse, deren Erzeugende die Geraden  $G$  sind. Die Gratlinie dieser Torse ist die Kurve  $C_t''$ . Die ursprüngliche Kurve  $C$  hat somit Begleitkurven  $B$ , deren Tangenten die ersten (dritten) Normalen von  $C$  sind. Die ersten (dritten) Normalen von  $C$  sind aber isotrop, daher auch die Begleitkurven  $B$ .

Daraus folgt eine punktweise Konstruktion von  $B$ :

Man wählt einen Punkt  $P$  beliebig, weist ihm einen Punkt  $Q$  auf  $C$  zu, legt durch  $P$  eine Parallele zur ersten Normale in  $Q$ . Diese ist die Tangente  $t$  von  $B$  in dem Punkte  $P$ .  $P_1$  sei ein Nachbarpunkt von  $P$  auf  $B$ . Durch  $P_1$  legen wir die Parallele zur ersten Normale im Nachbarpunkte  $Q_1$  von  $Q$  auf  $C$ . In dieser Weise kann man fortfahren.  $C$  und  $B$  sind also punktweise aufeinander abbildbar. Die Schmiegebenen von  $B$  haben die Tangenten von  $C''_n$  zur uneigentlichen Spur,  $T$  ist aber gerade die konjugierte Richtung von  $G$ , d. h. die Schmiegebenen der Begleitkurve  $B$  stehen normal auf den Schmiegebenen der Kurve  $C$ . Aus der Tatsache, daß die uneigentlichen Spuren der Schmiegebenen beider Kurven Tangenten an das absolute Gebilde sind, kann man folgern, daß die Schmiegebenen isotrop sind.

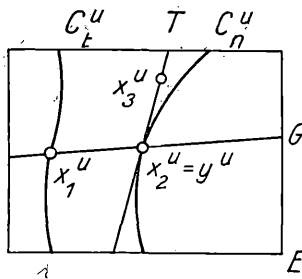


Fig. 1.

$E$  = Uneigentliche Spur des Schmiegerraumes

$G$  = Uneigentliche Spur der Schmiegeebene

$T$  = Konjugierte Tangente zu  $G$

$C''_n$  = Kurve, die aus den uneigentlichen Spuren der ersten (dritten) Normalen besteht.

$C'_t$  = Kurve, die aus den uneigentlichen Spuren der Tangenten besteht.

Allgemeine Konstruktion der Kurve  $C$ : Man nimmt eine isotrope Kurve  $B$ , konstruiert die Normalebenen ihrer Schmiegebenen; diese bilden eine Torse, deren Gratlinie die allgemeinste Kurve  $C$  darstellt. Die uneigentliche Spur des Normalraumes der Begleitkurve ist Tangentialebene an das absolute Gebilde. Die uneigentliche Spur  $G$  der Schmiegeebene an die Kurve  $C$  liegt in der uneigentlichen Spur  $E$  des Normalraumes der Begleitkurve  $B$ ; d. h. aber, die Schmiegeebene von  $C$  ist parallel zum Normalraum der Begleitkurve. Die Polarebenen der Punkte der Gratlinie  $C''_i$  bezüglich der absoluten Fläche sind die Schmiegebenen der Flächenkurve  $C''_n$ , wie durch eine einfache Rechnung folgt.

Daraus ergibt sich, daß die Normalräume der ursprünglichen Kurve  $C$  parallel sind zu den Schmiegerräumen der Begleitkurve  $B$ . Umgekehrt sind die Schmiegerräume von  $C$

parallel zu den Normalräumen von  $B$ , denn die uneigentliche Ebene des Normalraumes der Begleitkurve ist die Tangentialebene an die  $A_2^u$  und die uneigentliche Ebene des Schmiegraumes der Kurve  $C$  ist ebenfalls die Tangentialebene an die absolute Fläche, da sie  $\alpha_3^u$  enthält.

Die Kurven  $C_t^u$  und  $C_n^u$  sind punktweise aufeinander abbildbar. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte bilden eine Regelfläche, die der Schnitt einer  $V_3$  mit dem uneigentlichen Raume ist. Die ursprüngliche Kurve  $C$  und die Begleitkurve  $B$  liegen auf der  $V_3$ .

3. Im Folgenden machen wir die Annahme einer isotropen zweiten Normalen und nichtisotropen Tangente.

Die zweite Normale ist isotrop, daher liegt ihre uneigentliche Spur  $N_2^u$  auf dem absoluten Gebilde. Die uneigentliche Spur  $T^u$  der Tangente liegt daher auf der Tangentialebene von  $N_2^u$ . Die erste Normale ist nicht isotrop (sonst hätte man Fall 2), ihre uneigentliche Spur  $N_1^u$  muß zu  $T^u$  und  $N^u$  konjugiert sein. Sie liegt daher auf der zu  $T^u N_2^u$  konjugierten Tangente. Die uneigentliche Spur  $N_3^u$  der dritten Normalen ist zu allen übrigen ungekugelt, sie muß daher mit  $N_2^u$  zusammenfallen (siehe Fig. 2).

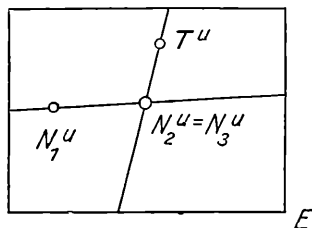


Fig. 2.

$E$  = Uneigentliche Spur des Schmiegraumes

$T^u$  = Uneigentliche Spur der Tangente

$N_1^u$  = Uneigentliche Spur der ersten Normalen

$N_2^u$  = Uneigentliche Spur der zweiten Normalen

$N_3^u$  = Uneigentliche Spur der dritten Normalen.

Der Schmiegraum der Kurve ist isotrop, denn seine uneigentliche Spur  $E$  berührt das absolute Gebilde.  $E$  ist fest. Denn würde sich  $E$  ändern, so müßte die uneigentliche Spur der Schmiegeebene durch  $N_2^u$  hindurchgehen; da sie aber durch  $T^u$  und  $N_1^u$  hindurchgeht, ist diese Annahme unmöglich, daher muß  $E$  fest bleiben. Die Kurve liegt also in einem festen isotropen  $R_3$ . Analytisch läßt sich diese Kurve folgendermaßen charakterisieren:

Aus (15), (7), (4), (12), (13) und

$$(\lambda \xi' + \mu \xi'' + \nu \xi''')^2 = 0 \quad (16)$$

folgt

$$\lambda = -\nu \xi' \xi'''$$

$$\mu = -\frac{\nu \xi'' \xi'''}{\xi''^2}$$

daher nach (16)

$$\xi'''^2 = (\xi' \xi''')^2 + \frac{(\xi'' \xi''')^2}{\xi''^2},$$

als Differentialgleichung der Kurve im isotropen  $R_3$ .

Man sieht: Falls von den vier aufeinander senkrecht stehenden Vektoren: Tangente, erste, zweite und dritte Normale, einer isotrop ist, fällt mit ihm ein zweiter dieser vier Vektoren zusammen. Der Satz gilt auch im  $R_n$  und lautet dann so:

Ist von  $n-1$  auf einander senkrecht stehenden linear unabhängigen Vektoren des  $R_n$  einer isotrop, so fällt mit ihm jeder zu diesen  $n-1$  Vektoren normale Vektor zusammen.

Beweis: Die  $n-1$  Vektoren seien  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ , ihre uneigentlichen Spuren  $x_1'', x_2'', x_3'', \dots, x_{n-1}''$ .  $x_1''$  sei isotrop, d. h.  $x_1''$  auf der  $A_{n-2}^2$  des  $R_n$  gelegen.  $x_2''$  ist zu  $x_1''$  bezüglich der  $A_{n-2}^2$  konjugiert, liegt also auf dem Tangential- $R_{n-2}$  des Punktes  $x_1''$ . Allgemein ist  $x_k''$  ( $2 \leq k \leq n$ ) zu  $x_1'', x_2'', \dots, x_{k-1}''$  konjugiert, liegt infolgedessen auf dem zum Verbindungs- $R_{k-2}$  dieser Punkte konjugierten  $R_{n-k}$ . Ist  $\eta$  ein zu den gegebenen Vektoren senkrechter Vektor und  $\gamma''$  seine uneigentliche Spur, so ist  $\gamma''$  der Pol des Verbindungs- $R_{n-2}$  der Punkte  $x_1'', x_2'', \dots, x_n''$  und fällt daher mit  $x_1''$  zusammen.

### Zusammenfassung.

Im  $R_4$  unterscheidet man folgende Gattungen von Kurven mit isotroper Tangente oder Normale:

1. Isotrope Gerade:

$$\xi'^2 = 0, \xi'' \text{ proportional } \xi'.$$

2. Kurven in ametrischen Ebenen:

$$\xi'^2 = 0, \xi''^2 = 0, \xi'' \text{ nicht proportional } \xi'.$$

3. Isotrope Kurven, die keine Geraden sind. Sie haben isotrope Tangente, die erste Normale ist unbestimmt (jede Richtung der Schmiegeebene kann als erste Normale gelten), die zweite Normale fällt mit der Tangente zusammen, die dritte Normale ist von der Tangente verschieden und nicht isotrop:

$$\xi'^2 = 0, \xi''^2 \neq 0, \xi', \xi'', \xi''' \text{ linear unabhängig.}$$

4. Kurven im isotropen  $R_3$ :

Die zweite Normale ist isotrop, die Tangente und erste Normale sind nicht isotrop, die dritte Normale fällt mit der zweiten Normale zusammen und ist isotrop:

$$\xi'^2 = 1, \xi''^2 \neq 0, \xi'''^2 = (\xi' \xi''')^2 + \frac{(\xi'' \xi''')^2}{\xi''^2}, \xi', \xi'', \xi''' \text{ linear unabhängig.}$$

## 5. Kurven mit isotroper erster Normalen:

Die Tangente ist nicht isotrop, die erste Normale ist isotrop, die zweite Normale liegt beliebig in der zur Schmiegeebene normalen Ebene. Die dritte Normale fällt mit der ersten Normalen zusammen und ist isotrop. Diese Kurve hat die auf p. 442 aufgezählten Eigenschaften:

$$\xi'^2 = 1, \xi''^2 = 0, \xi', \xi'', \xi''' \text{ linear unabhängig.}$$

## 6. Kurven in isotropen Ebenen:

Wie bei 5., nur liegt die Kurve in einer festen, isotropen Ebene, d. h.  $G$  in Fig. 1 ist fest.

$$\xi'^2 = 1, \xi''^2 = 0, \xi', \xi'', \xi''' \text{ linear abhängig, aber nicht } \xi' \text{ und } \xi''.$$

Als Anhang sei noch folgendes erwähnt:

Für die von J. Lense<sup>1</sup> betrachteten  $p$ -fach isotropen Kurven des  $R_n$ .

$$\xi = \xi(t) \tag{17}$$

mit

$$\xi'^2 = 0, \xi''^2 = 0, \xi^{(p)^2} = 0, \text{ aber } \xi^{(p+1)^2} \neq 0$$

ergeben sich durch eine längere, aber im wesentlichen einfache Rechnung folgende Sätze:

Definiert man die  $k$ -te Normale als einen im Schmiege- $R_{k+1}$  gelegenen, senkrecht auf dem Schmiege- $R_k$  stehenden Vektor  $n_k$ , so gilt:  $n_k$  liegt unbestimmt im Schmiege- $R_{k+1}$  und ist isotrop für  $1 \leq k \leq p-1$ ,  $n_p$  liegt unbestimmt im Schmiege- $R_{p+1}$  und ist im allgemeinen nicht isotrop,  $n_k$  liegt im Schmiege- $R_{2p-k+1}$  und ist isotrop für  $p \leq k \leq 2p$ . Die übrigen Normalen sind im allgemeinen bestimmt und nicht isotrop und liegen in den ihrer Definition entsprechenden Schmiegräumen.

<sup>1</sup> Vgl. die auf p. 441 in Fußnote 2 angegebene Abhandlung, p. 93.



# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1929

Band/Volume: [138\\_2a](#)

Autor(en)/Author(s): Schrenzel Else

Artikel/Article: [Über Kurven mit isotropen Normalen. 439-446](#)