Über den Zusammenhang des Problems der Projektivität mit den Beziehungen zwischen inzidenten Geraden und Ebenen im vierdimensionalen Raum

(Mit einer Anwendung auf die Photogrammetrie)

Von

Dr. Ludwig Hofmann in Wien

(Mit 2 Textfiguren)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Juli 1929)

I.

In seiner kürzlich veröffentlichten Arbeit: »Über die Koinzidenzaufgabe der darstellenden Geometrie des vierdimensionalen Raumes«[1] hat Th. Schmid eine Abbildung der Punkte des R_4 auf die Punktepaare einer Ebene angegeben. Die erwähnte Abbildung soll nun hier zur Lösung einiger Aufgaben der projektiven Geometrie der Ebene herangezogen werden.

Dem Vorgange Schmids entsprechend, denken wir uns die Punkte des R_4 aus zwei beliebigen windschiefen Geraden o_1 und o_2 desselben projiziert und beziehen jedes der beiden so erhaltenen Ebenenbüschel zweiter Stufe kollinear auf eine Ebene π. Ordnet man dann jedem Punkt P des R_4 jene beiden Punkte P' und P'' von π als Bilder zu, die respektive den Ebenen $\alpha_1 = [o_1 P]$ und $\alpha_2 = [o_2 P]$ in den erwähnten Kollineationen entsprechen, so gelangt man zu einer Abblildung der Punkte des R_4 auf die Punktepaare der Ebene π. Diese Abbildung ist mit Ausnahme der Punkte der Überebene Ω, die die Geraden o_1 und o_2 verbindet, umkehrbar eindeutig und wird im folgenden als lineare Abbildung des R_4 bezeichnet.

Die Geraden o_1 und o_2 nennen wir die Projektionsachsen, Ω die doppelprojizierende Überebene und die Ebene π die Bildebene der Abbildung. Die Büschel zweiter Stufe mit den Trägern o_1 und o_2 bezeichnen wir als die projizierenden Büschel und die zwischen ihnen und der Ebene π bestehenden kollinearen Beziehungen als die abbildenden Kollineationen. Die Geraden o' und o'' von π, die der Überebene Ω kollinear entsprechen, je nachdem man diese dem Büschel o_1 oder o_2 zuzählt, nennen wir die Kerngeraden der Abbildung.

[1] Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, 137. Bd. (1928), p. 621.

Schnittpunkt von x' und y' als Punkt A' von x' der Punkt A'' von x'' und als Punkt C' von y' der Punkt C'' von y'' entsprechen. Weiters soll dem Schnittpunkt von x'' und y'' als Punkt B'' von x'' der Punkt B' von x' und als Punkt D'' von y'' der Punkt D' von y' entsprechen. Ordnet man dann je zwei Geraden g' und g'' der Zeichenebene einander zu, die beziehungsweise aus x' und x'' ein Paar entsprechender Punkte X', X'' und ebenso aus y' und y'' ein Paar

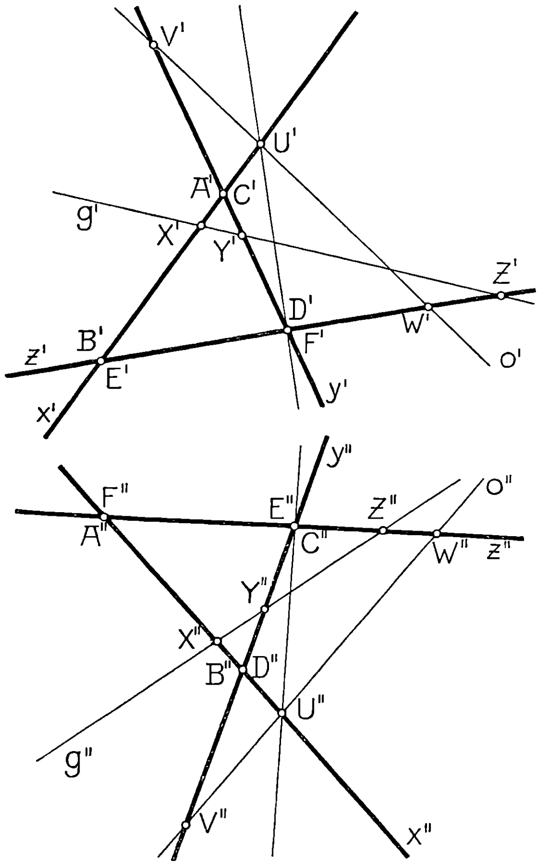

Fig. 1.

entsprechender Punkte Y', Y'' ausschneiden, so erhält man eine quadratische Geradenverwandtschaft, für welche x', x'' und y', y'' zwei Paare von Hauptgeraden darstellen. Das dritte Paar von Hauptgeraden z', z'' ergibt sich dann bekanntlich als $z' = [B', D']$ und $z'' = [A'', C'']$. Entsprechende Geraden g' und g'' der quadratischen Verwandtschaft schneiden auch auf z' und z'' projektive Punktreihen Z', Z'' aus, wobei den Punkten $E' = B'$ und $F' \doteq D'$ von z', beziehungsweise die Punkte $E'' = C''$ und $F'' = A''$ von z'' entsprechen.

Drei Paare projektiver Punktreihen einer Ebene solcher Art, wie sie auf den drei Paaren von Hauptgeraden einer quadratischen Geradenverwandtschaft durch entsprechende Geraden der Verwandtschaft ausgeschnitten werden, nennen wir assoziiert. Die zwischen drei solchen Paaren projektiver Punktreihen bestehende Beziehung ist symmetrisch und durch zwei von ihnen ist das dritte assoziierte Paar in eindeutiger Weise bestimmt. Schneidet ein Paar von Geraden einer Ebene zwei Paare projektiver Punktreihen in entsprechenden Punkten, so schneidet es auch auf dem drittten assoziierten Paar entsprechende Punkte aus.

Wir legen nun unseren Betrachtungen eine lineare Abbildung des R_4 auf die Zeichenebene zugrunde, wobei wir als Projektionsachsen zwei beliebige windschiefe Geraden o_1 und o_2 des R_4 und als Kerngeraden ein Paar entsprechender Geraden o' und o'' der in Fig. 1 betrachteten quadratischen Verwandtschaft wählen. Die auf den Geraden x', x'', beziehungsweise y' y'' gegebenen Paare projektiver Punktreihen stellen dann zwei weitere Geraden x und y des R_4 dar.

Zu vier beliebigen Geraden des R_4 gibt es nun eine mit ihnen in symmetrischer Beziehung stehende fünfte assoziierte.[1] Sie ergibt sich als die gemeinsame Schnittlinie jener vier Überebenen, die je eine der gegebenen Geraden mit der Transversalen der drei weiteren verbinden. Jede der ∞^2 Ebenen des R_4, die vier gegebene Geraden schneiden, wird auch von der fünften assoziierten geschnitten.

Wir wollen nun die zu den vier oben erwähnten Geraden o_1, o_2, x, y gehörende fünfte assoziierte konstruieren. Die Transversalen u der drei Geraden x, y, o_1 ist erstprojizierend und ihr erstes Bild ist der Punkt $A' = C'$. Sie schneidet x und y, beziehungsweise in den Punkten A und C, und hat demnach die Gerade z'' als zweites Bild. Die Gerade u wird mit o_2 durch eine zweitprojizierende Überebene Ω_2 verbunden, deren zweites Bild $\Omega''_2 = z''$ ist. Vollkommen analog dazu wird die Transversale der drei Geraden x, y, o_2 mit der Geraden o_1 durch eine erstprojizierende Überebene Ω_1 verbunden, deren erstes Bild $\Omega'_1 = z'$ ist. Die beiden Überebenen Ω_1 und Ω_2 schneiden sich in einer doppelprojizierenden Ebene ω, deren Bilder ω' und ω'', beziehungsweise mit den Geraden z' und z'' zusammenfallen.

Die Transversale $\bar{y}$ der drei Geraden x, o_1, o_2 ist doppelprojizierend und ihre Bilder $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ fallen beziehungsweise zusammen mit den Bildern U', U'' des uneigentlichen Punktes U der Geraden x. Die Punkte U', U'' sind nun die Scheitel der Ordnungsbüschel jener Überebene Ω_y, die die Geraden y und $\bar{y}$ verbindet. Entsprechende Strahlen der beiden Ordnungsbüschel von Ω_y erhält man, wenn man den Verbindungsgeraden von U' mit C' und D', beziehungsweise die Verbindungsgeraden von U'' mit C'' und D'' zuordnet. Da weiters die Kerngeraden o' und o'' entsprechende

[1] Segre, Sull' incidenza di rette e piani nello spazio a·quattro dimensioni. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. II., 1888, p. 45—52.

Strahlen der Ordnungsbüschel darstellen, so ist damit die zwischen den beiden Büscheln bestehende Projektivität bestimmt und dadurch die Überebene Ω_y festgelegt.

Die gesuchte Gerade z ergibt sich nun als die Schnittlinie von Ω_y mit der Ebene $\omega = [\Omega_1, \Omega_2]$. Die Bilder von z sind also beziehungsweise die Geraden $z' = \omega'$ und $z'' = \omega''$, wobei den Punkten E' und F' als den ersten Bildern der Punkte E und F von z, wie unmittelbar klar ist, beziehungsweise die Punkte E'' und F'' als zweite Bilder entsprechen. Bedenkt man noch, daß die Schnittpunkte W' und W'' von z' und z'', beziehungcweise mit o' und o'' die Bilder des Schnittpunktes W der Geraden z mit der Überebene Ω darstellen, so erkennt man, daß z durch jenes Paar projektiver Punktreihen dargestellt wird, das zu den beiden Paaren, die die Geraden x und y darstellen, assoziiert ist.

Man überzeugt sich nun sehr leicht, daß auch die Überebene Ω_x, die die Gerade x mit der Transversalen von y, o_1, o_2 verbindet, durch die Gerade z hindurchgeht.

Macht man also zwei von fünf assoziierten Geraden eines R_4 zu Projektionsachsen einer linearen Abbildung des R_4 auf eine Ebene, so stellen sich die drei weiteren Geraden als drei assoziierte Paare projektiver Punktreihen dar. Die ∞^2 Ebenen des R_4, die jene fünf Geraden schneiden, bilden sich als die ∞^2 Paare entsprechender Geraden der zugehörigen quadratischen Verwandtschaft ab.

Gemäß dem Dualitätsgesetz des R_4 gibt es auch zu vier beliebigen Ebenen des R_4 eine mit ihnen in symmetrischer Beziehung stehende fünfte assoziierte. Man erhält sie als die gemeinsame Verbindungsebene jener vier Punkte, in denen je eine der vier gegebenen Ebenen die Transversalebene der drei übrigen schneidet. Jede der ∞^2 Geraden des R_4, die vier gegebene Ebenen schneidet, wird auch von der fünften assoziierten geschnitten, so daß es zu fünf assoziierten Ebenen des R_4 ein System von ∞^2 Treffgeraden gibt.

Wir wollen nun unter Zugrundelegung einer linearen Abbildung des R_4 zu vier gegebenen doppelprojizierenden Ebenen α, β, γ, δ die fünfte assoziierte ε konstruieren. So wie α, β, γ, δ schneidet auch die Ebene ε die beiden Projektionsachsen o_1 und o_2 der Abbildung und ist daher ebenfalls doppelprojizierend.

Sind (Fig. 2) $\alpha'\,\alpha''$, $\beta'\,\beta''$, $\gamma'\,\gamma''$, $\delta'\,\delta''$ die Bilder der vier gegebenen Ebenen α, β, γ. δ und $o'\,o''$ die Kerngeraden der Abbildung, so ist, wie leicht einzusehen, die Transversalebene $\bar{\alpha}$ von β, γ, δ durch jene Kollineation dargestellt, welche den Geraden β', γ', δ', o', beziehungsweise die Geraden β'', γ'', δ'', o'' zuordnet. Die Bilder A' A'' des Schnittpunktes A der Ebenen $\bar{\alpha}$ und α entsprechen sich einerseits in der erwähnten Kollineation und liegen anderseits beziehungsweise auf den Bildern α' und α'' von α; sie können also in linearer Weise konstruiert werden. Vollkommen analog werden auch die Bilder $B'\,B''$, $C'\,C''$, $D'\,D''$ der zu A analogen Punkte B,

C, D erhalten. Die Punkte A', B', C', D' einerseits und A'', B'', C'', D'' anderseits liegen dann beziehungsweise auf zwei Geraden ε' und ε'' den Bildern der Ebene ε.

Sieht man in Fig. 2 von jeder Deutung lm R_4 ab, so wurde also zu den fünf gegebenen Geradenpaaren $\alpha'\,\alpha''$. $\beta'\,\beta''$, $\gamma'\,\gamma''$, $\delta'\,\delta''$, $\rho'\,\rho''$ in linearer Weise ein sechstes $\varepsilon'\,\varepsilon''$ konstruiert. Die sechs so

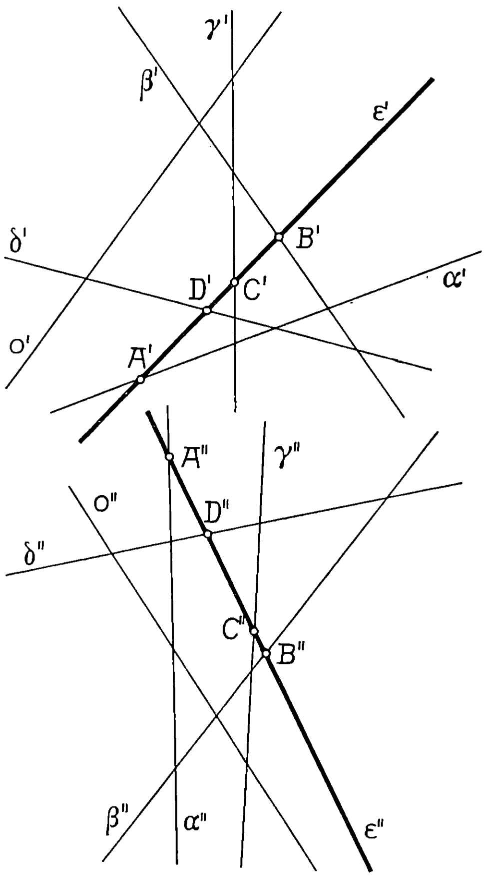

Fig.

erhaltenen Geradenpaare stehen, wie aus unserer Darstellung leicht gefolgert werden kann, zueinander in symmetrischer Beziehung und werden **linear abhängig**[1] genannt.

Wählt man also zwei Geraden, die fünf assoziierte Ebenen eines R_4 schneiden, als Achsen einer linearen

---

Sturm, Verwandtschaften. I., p. 357.

Abbildung des R_4 auf eine Ebene, so ergeben die Bilder der fünf Ebenen mit den Fluchtlinien der Abbildung sechs linear abhängige Geradenpaare.

Die ∞^2 Geraden des R_4 nun, die die gegebenen Ebenen α, β, γ, δ schneiden, stellen sich in unserer linearen Abbildung als Paare projektiver Punktreihen dar, die von den Geraden $\alpha' \alpha''$, $\beta' \beta''$, $\gamma' \gamma''$, $\delta' \delta''$ und den Fluchtlinien $o' o''$ in Paaren entsprechender Punkte geschnitten werden. Umgekehrt stellt ein Paar projektiver Punktreihen mit der erwähnten Eigenschaft eine Gerade des R_4 dar, die die Ebenen α, β, γ, δ schneidet. Jede solche Gerade schneidet aber auch die fünfte assoziierte Ebene ε und das die Gerade darstellende Paar projektiver Punktreihen wird also auch von den Geraden $\varepsilon' \varepsilon''$ in entsprechenden Punkten geschnitten.

Sind also in der Ebene fünf Geradenpaare $a' a''$, $b' b''$, $c' c''$, $d' d''$, $e' e''$ gegeben, so gibt es ∞^2 Paare von Geraden $x' x''$ von der Eigenschaft, daß die Schnittpunkte von a', b', c', d', e' mit x' und a'', b'', c'', d'', e'' mit x'' projektive Punktreihen ergeben. Stellt dann $f' f''$ das von den fünf gegebenen Paaren linear abhängige sechste Geradenpaar dar, so entsprechen sich auf jedem der ∞^2 Geradenpaare $x' x''$ auch die Schnittpunkte von f' mit x' und f'' mit x'' in der erwähnten Projektivität.

Es stimmt dies vollkommen überein mit den Ergebnissen, die für den dualen Fall R. Sturm auf ganz anderem Wege abgeleitet hat.[1]

III.

Fünf beliebige Geraden eines R_4, die nicht assoziiert sind, werden von ∞^1 Ebenen geschnitten.[2] Jene ∞^1 Ebenen werden nun wieder von ∞^1 Geraden geschnitten, unter denen die fünf gegebenen keinerlei Sonderstellung einnehmen. Das Geradensystem und das Ebenensystem stehen einander dual gegenüber und jedes der beiden Systeme ist durch fünf nicht assoziierte Elemente des anderen Systems bestimmt. Konstruiert man zu vier beliebigen Elementen eines Systems das fünfte assoziierte, so gehört es ebenfalls dem System an.

Durch jeden Punkt einer Systemgeraden gehen zwei Systemebenen hindurch und dual dazu enthält jede Überebene, die man durch eine Systemebene legt, zwei Systemgeraden. Anderseits geht durch jeden Schnittpunkt zweier Systemebenen eine Systemgerade hindurch, während dual dazu jede Überebene, die zwei Systemgeraden verbindet, eine Systemebene enthält.

Wir denken uns nun fünf beliebige nicht assoziierte Geraden a, b, c, d, e eines R_4 gegeben und machen zwei von ihnen $d = o_1$

[1] Verwandtschaften, I., p. 365.

[2] Segre, in der eingangs zitierten Abhandlung.

und $e = o_2$ zu Achsen einer linearen Abbildung des R_4 auf eine Ebene. Die drei Geraden a, b, c stellen sich dann als drei Paare projektiver Punktreihen $a' a''$, $b' b''$, $c' c''$ dar, die nicht assoziiert sind und von den Fluchtlinien o', o'' der Abbildung in Paaren entsprechender Punkte geschnitten werden.

Die ∞^1 Ebenen, die die fünf gegebenen Geraden schneiden, sind doppelprojizierend und jede von ihnen stellt sich als ein Geradenpaar dar, das aus den Paaren projektiver Punktreihen $a' a''$, $b' b''$, $c' c''$ entsprechende Punkte ausschneidet. Umgekehrt stellt jedes der ∞^1 Geradenpaare $x' x''$ mit der erwähnten Eigenschaft eine Ebene ξ des betrachteten Systems dar.

Alle Geraden x' umhüllen nun, wie man leicht zeigen kann, eine Kurve dritter Klasse C', welche die Geraden a', b', c' und die Fluchtlinie o' berührt. Vollkommen analog umhüllen die Geraden x'' eine Kurve C'' mit den entsprechenden Eigenschaften. Ordnet man die Geraden x' und x'' einander zu. so werden dadurch die Kurven C' und C'' ein-eindeutig tangentenweise aufeinander bezogen.

Wir fragen nun nach dem System der ∞^1 Geraden, welche die ∞^1 Ebenen des betrachteten Systems schneiden. Ist ξ eine beliebige Systemebene, so enthält, wie wir gesehen haben, die Überebene, welche die Ebene ξ mit der Geraden $d = o_1$ verbindet, außer d noch eine zweite Systemgerade g. Ist umgekehrt g eine beliebige Systemgerade, so enthält die Überebene, die g mit d verbindet, eine Systemebene ξ. Da sich nun die ersten Bilder x' von ξ und g' von g decken, so ist jede Tangente x' von C' gleichzeitig Bild einer Systemebene ξ und einer Systemgeraden g. Die zweiten Bilder x'' von ξ und g'' von g sind zwei voneinander verschiedene Tangenten von C''. Ordnet man die Geraden g' und g'' einander zu, so sind die Kurven C' und C'' wieder ein-eindeutig tangentenweise aufeinander bezogen.

Wir denken uns nun in der Zeichenebene sechs Geradenpaare $a' a''$, $b' b''$, $c' c''$, $d' d''$, $e' e''$, $f' f''$ gegeben, die nicht linear abhängig sind, und fragen nach jenen Paaren von Geraden $x' x''$, die von den sechs gegebenen Paaren in projektiven Punktreihen geschnitten werden. Macht man die Geraden $f' = o'$ und $f'' = o''$ zu Fluchtlinien einer linearen Abbildung des R_4 auf die Zeichenebene, so stellen die fünf weiteren gegebenen Geradenpaare, beziehungsweise fünf Ebenen α, β, γ, δ, ε des R_4 dar, die nicht assoziiert sind. Die Geradenpaare $x' x''$ sind dann die Bilder jener ∞^1 Geraden, die die fünf Ebenen α, β, γ, δ, ε schneiden. Aus dem oben Gesagten folgt nun unmittelbar, daß die verlangten Geraden x' und x'', beziehungsweise zwei Kurven dritter Klasse C' und C'' umhüllen, die durch Zuordnung der Geraden x' und x'' ein-eindeutig tangentenweise aufeinander bezogen sind und beziehungsweise die Geraden a', b', c', d', e', f' und a'', b'', c'', d'', e'', f'' berrühren. Konstruiert man weiters zu fünf der gegebenen Geradenpaare das sechste linear abhängige Paar $k' k''$, so sind auch die Geraden k' und k'', beziehungsweise Tangenten von C' und C''.

Ist ferner t' eine beliebige Tangente von C', X' der Schnittpunkt von t' und x' und X'' der ihm in der Projektivität zwischen x' und x'' entsprechende Punkt, so liegen sämtliche Punkte X'' auf einer Tangente t'' von C''. Ordnet man die Geraden t' und t'' einander zu, so sind die Kurven C' und C'' wieder eineindeutig tangentenweise aufeinander bezogen. In dieser Zuordnung, die von der obigen verschieden ist, entsprechen den Tangenten a', b', c', d', e', f', k' von C', beziehungsweise die Tangenten a'', b'', c'', d'', e'', f'', k'' von C''.

Diese Ergebnisse stehen wieder in vollem Einklang mit den von Sturm abgeleiteten Beziehungen.

IV.

Zu sechs beliebigen Ebenen des R_4, von denen keine fünf einander assoziiert sind, gibt es, wie Segre[1] gezeigt hat, fünf Treffgeraden, die einander assoziiert sind (Problem der sechs Ebenen). Dual dazu gibt es zu sechs Geraden des R_4, von denen keine fünf einander assoziiert sind, fünf assoziierte Treffebenen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit der zweiten Aufgabe und bezeichnen mit a, b, c, d, e, f sechs beliebige Geraden des R_4, die der obigen Bedingung entsprechen. Machen wir dann etwa die Geraden $e = o_1$ und $f = o_2$ zu Projektionsachsen einer linearen Abbildung des R_4 auf eine Ebene, so bilden sich die Geraden a, b, c, d, beziehungsweise als projektive Punktreihen auf den Geradenpaaren $a'\,a''$, $b'\,b''$, $c'\,c''$, $d'\,d''$ ab, die von den Kerngeraden $o'\,o''$ der Abbildung in entsprechenden Punkten geschnitten werden.

Die Ebenen nun, die die sechs gegebenen Geraden schneiden, sind doppelprojizierend und bilden sich als jene Geradenpaare ab, die aus den vier Paaren projektiver Punktreihen $a'\,a''$, $b'\,b''$ $c'\,c''$, $d'\,d''$ entsprechende Punkte ausschneiden. Die erwähnten Geradenpaare schneiden dann auch jene Paare projektiver Punktreihen in entsprechenden Punkten, die zu zwei der gegebenen Paare assoziiert sind. Insbesondere bezeichnen wir das zu den beiden Paaren projektiver Punktreihen $a'\,a''$ und $b'\,b''$ dritte assoziierte Paar mit $k'\,k''$.

Ist nun $x'\,x''$ ein beliebiges Geradenpaar, das die drei gegebenen Paare projektiver Punktreihen $a'\,a''$, $b'\,b''$, $c'\,c''$ und daher auch das Paar $k'\,k''$ in entsprechenden Punkten schneidet, so umhüllen die Geraden x' und x'', beziehungsweise zwei Kurven dritter Klasse C' und C''. Die Kurve C' berührt dabei die Geraden a', b', k' und die Kerngerade o' und Analoges gilt für C''. Ist weiters $y'\,y''$ ein beliebiges Geradenpaar, das die drei Paare projektiver Punktreihen $a'\,a''$, $b'\,b''$, $d'\,d''$ und daher auch das Paar $k'\,k''$ in entsprechenden Punkten schneidet, so umhüllen die Geraden y' und y'', beziehungsweise zwei Kurven dritter Klasse D' und D'', wobei D' die Geraden a', b', d' k', o' und D'' die Geraden a'', b'', d'', k'', o'' berührt.

---

[1] Segre, wie vorher.

Die Kurven C' und D' haben also vier gemeinsame Tangenten a', b', k', o' und ihre weiteren fünf gemeinsamen Tangenten liefern mit den entsprechenden gemeinsamen Tangenten von C'' und D'' jene fünf Geradenpaare, welche die vier gegebenen Paare projektiver Punktreihen in entsprechenden Punktepaaren schneiden. Die erwähnten Geradenpaare sind die Bilder jener fünf Ebenen, die die sechs gegebenen Geraden a, b, c, d, e, f schneiden.

Wir denken uns nun sieben beliebige Geradenpaare einer Ebene $a' a''$, $b' b''$, $c' c''$, $d' d''$, $e' e''$, $f' f''$, $g' g''$ gegeben, von denen keine sechs linear abhängig sind, und fragen nach jenen Paaren von Geraden $x' x''$, die von den sieben gegebenen Paaren in projektiven Punktreihen geschnitten werden. Wir stellen also jene Aufgabe, die dem eigentlichen Problem der Projektivität dual entspricht.

Machen wir die Geraden $g' = o'$ und $g'' = o''$ zu Kerngeraden einer im übrigen ganz beliebigen linearen Abbildung des R_4 auf die Zeichenebene, so stellen die sechs weiteren gegebenen Geradenpaare sechs Ebenen α, β, γ, ∂, ε, ξ des R_4 dar, die die Projektionsachsen o_1 und o_2 der Abbildung schneiden. Die gesuchten Geradenpaare $x' x''$ sind dann die Bilder jener Geraden des R_4, welche die sechs erwähnten Ebenen schneiden. Da nun aber sechs beliebige Ebenen des R_4 von fünf assoziierten Geraden geschnitten werden, so haben die betrachteten sechs Ebenen außer den Projektionsachsen o_1 und o_2 noch drei weitere Treffgeraden x, y, z, die mit o_1 und o_2 assoziiert sind.

Die Bildpaare $x' x''$, $y' y''$, $z' z''$ der Geraden x, y, z ergeben die drei Lösungen der oben gestellten Aufgabe. Die drei Paare projektiver Punktreihen, die auf den Geradenpaaren $x' x''$, $y' y''$, $z' z''$ von den sieben gegebenen Paaren ausgeschnitten werden, sind (nach Nr. 2) assoziiert und die sieben gegebenen Geradenpaare sind Paare entsprechender Geraden der zugehörigen quadratischen Verwandtschaft.

Es stimmt dies wieder mit den bekannten von Sturm abgeleiteten Beziehungen überein. So wie dort ergeben sich auch auf Grund unserer Betrachtungen die drei Lösungen der Aufgabe durch die drei restlichen gemeinsamen Tangenten zweier Kurven dritter Klasse mit sechs gemeinsamen Tangenten.

Unsere Betrachtungen ermöglichen es nun aber auch, die drei Lösungen der Aufgabe unmittelbar als gemeinsame Elemente zweier Kegelschnitte (mit einem gemeinsamen Element) zu erhalten.

Wir heben zunächst fünf der sechs obenerwähnten Ebenen, etwa α, β, γ, δ, ε, heraus und betrachten das System ihrer ∞^1 Treffgeraden. Jenes System enthält die drei gesuchten Geraden x, y, und die Projektionsachsen o_1 und o_2 und wird seinerseits von ∞^1 Ebenen geschnitten. Die Überebene Ω, welche die beiden Systemgeraden o_1 und o_2 verbindet, enthält nach Nr. 3 eine einzige Systemebene φ, die in linearer Weise konstruiert werden kann. Alle Geraden nun, die die fünf Ebenen α, β, γ, δ, ε schneiden, werden auch von der Ebene φ geschnitten.

Stellen wir dieselben Betrachtungen für die fünf Ebenen α, β, γ, δ, ξ an, so gelangen wir zu einer Ebene ψ in Ω, so daß alle Geraden, die α, β, γ, δ, ξ schneiden, auch die Ebene ψ schneiden.

Alle Geraden nun, die die sechs Ebenen α, β, γ, δ, ε, ξ schneiden, schneiden auch die Ebenen φ und ψ von Ω und daher, sofern sie nicht in Ω enthalten sind, deren Schnittgerade u. Die drei restlichen Treffgeraden x, y, z jener sechs Ebenen ergeben sich demnach als jene Geraden, die vier der gegebenen Ebenen, etwa α, β, γ, δ und die Gerade u schneiden.

Zur Konstruktion jener Geraden[1] projiziert man die Punktreihe auf u aus den Ebenen α, β, γ und schneidet die drei so erhaltenen projektiven Überebenenbüschel mit der Ebene δ. Man erhält so drei projektive Strahlbüschel in δ, deren Scheitel A, B, C, beziehungsweise die Schnittpunkte von δ mit den Ebenen α, β, γ sind. Die drei Punkte X, Y, Z von δ, in denen sich entsprechende Strahlen der drei projektiven Büschel schneiden, ergeben sich, wie unmittelbar klar ist, als gemeinsame Punkte zweier Kegelschnitte, die sich in einem der Punkte A, B, C schneiden.

Legt man nun aus jedem der drei Punkte X, Y, Z jene Gerade, die die Ebenen α, β, γ schneidet, so erhält man die drei oben erwähnten Geraden x, y, z. Die Bildpaare $x' x''$, $y' y''$, $z' z''$ der Geraden x, y, z stellen dann die drei Lösungen unserer Aufgabe dar, die somit auf die Konstruktion der gemeinsamen Elemente zweier Kegelschnitte zurückgeführt ist.

Liegen zwei photographische Aufnahmen eines räumlichen Objektes vor, so bezeichnet man als deren Kernpunkte in der Photogrammetrie bekanntlich das Paar jener beiden Punkte, die mit entsprechenden Bildern der beiden Aufnahmen verbunden, projektive Strahlbüschel ergeben. Sind die Bilder von sieben Punkten bekannt, so ergeben sich dem Problem der Projektivität entsprechend für das Paar der Kernpunkte drei Lösungen. Ein achtes Bildpaar kann dann zur Auswahl der richtigen Lösung herangezogen werden.

Auf Grund unserer Betrachtungen kann nun aus acht Bildpaaren das Paar der Kernpunkte unmittelbar in linearer Weise konstruiert werden.

Wir betrachten wieder die duale Aufgabe und denken uns acht Geradenpaare $a' a''$, $b' b''$, $c' c''$, $d' d''$, $e' e''$, $f' f''$, $g' g''$, $h' h''$ einer Ebene gegeben, jedoch so, daß es ein Paar von Geraden $x' x''$ gibt, die von den acht gegebenen Paaren in projektiven Punktreihen geschnitten werden. Diese Voraussetzung ist ja im dualen Falle bei zwei photographischen Aufnahmen eines Objektes stets erfüllt.

Machen wir dann etwa die Geraden h' und h'' zu Kerngeraden und zwei beliebige windschiefe Geraden o_1 und o_2 des R_4 zu Achsen einer linearen Abbildung des R_4 auf die Zeichenebene, so stellen die Geradenpaare $a' a''$, $b' b''$, $c' c''$, $d' d''$, $e' e''$, $f' f''$, $g' g''$, beziehungsweise sieben doppelprojizierende Ebenen α, β, γ, δ, ε, ξ, η des R_4

---

[1] Segre, wie vorher.

dar. Weiters stellen die projektiven Punktreihen, die auf den Geraden x' und x'' von den acht gegebenen Geradenpaaren ausgeschnitten werden, eine Gerade x des R_4 dar, die die sieben betrachteten Ebenen schneidet. Die von uns bezüglich der acht gegebenen Geradenpaare gemachte Voraussetzung bedeutet also, daß die sieben erwähnten Ebenen außer den beiden Projektionsachsen o_1 und o_2 der Abbildung noch eine dritte Treffgerade x haben. Gelingt es nun, die Gerade x des R_4 zu ermitteln, so ist damit auch das Geradenpaar x' x'' als Bildpaar von x gefunden.

Betrachten wir etwa die fünf Ebenen α, β, γ, δ, ε, so werden diese von einem System von ∞^1 Geraden geschnitten, dem die Gerade x und die Projektionsachsen o_1 und o_2 der Abbildung angehören. Die Überebene $\Omega = [o_1\, o_2]$ enthält nun, wie wir gesehen haben, eine Ebene φ, die in linearer Weise konstruiert werden kann und von den Geraden des betrachteten Systems geschnitten wird. Stellen wir bezüglich der fünf Ebenen α, β, γ, δ, ξ die analogen Betrachtungen an, so gelangen wir zu einer Ebene χ und schließlich durch Betrachtung der fünf Ebenen α, β, γ, δ, η zu einer Ebene ψ von Ω.

Die gesuchte Gerade x schneidet nun jede der drei Ebenen φ, χ, ψ von Ω und geht daher, da sie nicht in Ω enthalten ist, durch deren Schnittpunkt X hindurch. Sie ergibt sich demnach etwa als Schnittlinie jener drei Überebenen, die den Punkt X mit je einer der Ebenen α, β, γ verbinden.

Das Geradenpaar x' x'' kann also, wie man sieht, als Bildpaar der Geraden x in linearer Weise konstruiert werden. Dual dazu ergibt sich eine lineare Konstruktion der Kernpunkte für zwei photographische Aufnahmen eines räumlichen Objektes aus den Bildern von acht Punkten und ohne Kenntnis der inneren Orientierung.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1929

Band/Volume: 138_2a

Autor(en)/Author(s): Hofmann Ludwig

Artikel/Article: Über den Zusammenhang des Problems der Projektivität mit den Beziehungen zwischen inzidenten Geraden und Ebenen im vierdimensionalen Raum. (Mit einer Anwendung auf die Photogrammetrie) 471-481