Die absolut kleinsten Diskriminanten der biquadratischen Zahlkörper

Von

Josef Mayer

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. November 1929)

Herr Ph. Furtwängler bestimmt in einer Abhandlung[1] die absolut kleinsten Diskriminanten der kubischen Zahlkörper. Die hiebei benützte Methode besteht in einer Anwendung der Reduktionstheorie der definiten quadratischen Formen und bildet auch die wesentliche Grundlage der folgenden Bestimmung der absolut kleinsten Diskriminanten der biquadratischen Zahlkörper. Vor dieser allgemeinen Betrachtung sollen zunächst die absolut kleinsten Diskriminanten jener speziellen biquadratischen Körper bestimmt werden, welche einen quadratischen Unterkörper besitzen.

I. Die absolut kleinsten Diskriminanten der Relativkörper.

Bedeutet μ eine ganze quadratfreie Zahl aus dem quadratischen Körper $k(\sqrt{m})$, dann ist der Körper $K(\sqrt{\mu}, \sqrt{m})$ ein Körper vierten Grades, der relativ quadratisch in bezug auf k ist. Für den Körper $k(\sqrt{m})$ ist immer $h = 1$ als Klassenzahl vorausgesetzt, da nur solche Körper für die folgende Untersuchung notwendig sind.

Bedeuten D und d die Diskriminanten des Oberkörpers K und des Unterkörpers k und bezeichnet $n(D_k)$ die Norm der Relativdiskriminante D_k, genommen im Körper k, so ist

$$D = d^2 . n(D_k).$$

Je nach dem Verhalten der Primzahl 2 im Körper $k(\sqrt{m})$ und je nach der Wahl der Zahl μ aus k sind nun verschiedene Fälle zu unterscheiden, die in der folgenden Übersicht zusammengestellt sind:

1. Die Zahl 2 bleibt im Körper k Primideal.

   α) Ist μ primär, so ist $\qquad D = d^2 . n(\mu)$.

   β) Ist μ nicht primär, dann ist $\qquad D = 16\, d^2 . n(\mu)$.

2. Die Zahl 2 zerfällt im Körper k in zwei verschiedene Primideale: $2 = \lambda_1 . \lambda_2$.

[1] Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren, ganzzahligen ternären kubischen Formen. Göttingen, 1896.

[2] Hilbert, Theorie der algebraischen Zahlkörper, Bericht der Deutschen Mathematikerver., 4. Bd.

α) Ist μ primär, so ist $D = d^2 . n(\mu)$.

β) Ist μ nicht primär, aber $\mu \equiv \nu^2 (\lambda_i)$, so ist $D = 4 . d^2 . n(\mu)$.

γ) Ist μ nicht primär und auch $\mu \not\equiv \nu^2 (\lambda_i)$, so ist $D = 16 . d^2 . n(\mu)$.

Die Zahl 2 wird im Körper k Quadrat eines Primideales.

α) Ist μ primär, so ist $D = d^2 . n(\mu)$.

β) Ist μ nicht primär, aber $\mu \equiv \nu^2 (2)$, so ist $D = 4 . d^2 . n(\mu)$.

γ) Ist μ nicht primär und auch $\mu \not\equiv \nu^2 (2)$, dann ist $D = 16 . d^2 . n(\mu)$.

Um μ als primäre Zahl im Körper $k(\sqrt{m})$ leicht zu erkennen, werden hier die entsprechenden Bedingungen aufgestellt:

1. $m \equiv 1 (4)$, Minimalbasis in $k(\sqrt{m})$: $1, \ \omega = \frac{-1+\sqrt{m}}{2}$.

Aus $(a+b\omega) \equiv (x+y\omega)^2 (4)$ folgt das System der Kongruenzen

$$2xy - y^2 \equiv b (4),$$

$$x^2 + \frac{m-1}{4} y^2 \equiv a (4).$$

Damit ergeben sich in diesem Falle folgende Bedingungen für primäre Zahlen:

$$\alpha) \ b \equiv 0 (4), \ a \equiv 1 (4),$$

$$\beta) \ b \equiv 1 (4), \ a \equiv \frac{m+3}{4} (4),$$

$$\gamma) \ b \equiv 3 (4), \ a \equiv \frac{m-1}{4} (4).$$

$m \equiv 3 (4)$, Minimalbasis in $k(\sqrt{m})$: $1, \sqrt{m}$.

Soll $\mu = a + b\sqrt{m}$ primär sein, so muß das System der Kongruenzen:

$$2xy \equiv b (4),$$

$$x^2 + my^2 \equiv a (4)$$

lösbar sein. Dies ist der Fall, wenn

$$\alpha) \ b \equiv 0 (4), \ a \equiv 1 (2),$$

$$\beta) \ b \equiv 2 (4), \ a \equiv 0 (4).$$

$m \equiv 2 (4)$, Minimalbasis in $k(\sqrt{m})$ $1, \sqrt{m}$.

In analoger Weise ergeben sich folgende Bedingungen für primäre Zahlen:

$$\alpha) \ b \equiv 0 (4), \ a \equiv 1 (4),$$

$$\beta) \ b \equiv 0 (4), \ a \equiv 2 (4),$$

$$\gamma) \ b \equiv 2 (4), \ a \equiv 3 (4).$$

Bei der Bestimmung der absolut kleinsten Diskriminanten sind je nach der Art der konjugierten Körper drei Fälle zu unterscheiden.

A. Vier reelle konjugierte Körper.

Wir betrachten zunächst den Körper $K\left(\sqrt{7+2\sqrt{5}}\right)$. Er ist relativ quadratisch in bezug auf den reellen quadratischen Körper $k(\sqrt{5})$; seine Diskriminante ist $D = 5^2.29 = 725$, da die Zahl $\mu = 7+2\sqrt{5}$ im Körper $k(\sqrt{5})$ primär ist und ihre Norm $n(\mu) = 29$ beträgt.

$D = 725$ ist in diesem Falle die kleinste Diskriminante eines Relativkörpers. Aus der Annahme $D \leqq 725$ folgt zunächst, daß nur jene reellen quadratischen Körper als Unterkörper auftreten können, deren Diskriminante $d \leqq \sqrt{725}$ ist; es sind dies die quadratischen Körper $k(\sqrt{m})$, für welche

$$m = 6, 21, 17, 13, 3, 2, 5,$$

beziehungsweise

$$d = 24, 21, 17, 13, 12, 8, 5$$

ist.

Weiters ergibt sich für die ganze Zahl μ aus k die Ungleichung

$$d^2.f.n(\mu) \leqq 725,$$

wobei für den Faktor f je nach der zahlentheoretischen Natur der Zahl μ und der Zahl 2, wie bereits gezeigt wurde, die Werte 1, 4 oder 16 zu setzen sind. Von den zu μ assoziierten Zahlen sind nur jene zu berücksichtigen, die durch Multiplikation der Zahl μ mit einer quadratfreien Einheit des Körpers k entstehen. Da die vier konjugierten Körper reell sein sollen, muß μ außerdem total positiv sein. Eine einfache Untersuchung zeigt jedoch, daß keine Zahl der in Betracht kommenden quadratischen Körper alle diese Bedingungen erfüllt.

B. Zwei reelle und zwei imaginäre konjugierte Körper.

In diesem Falle besitzt der Körper $K\left(\sqrt{3+2\sqrt{5}}\right)$ die absolut kleinste Diskriminante. Der Beweis hiefür ist analog dem vorgehenden Falle zu führen. Für die Diskriminanten der quadratischen Unterkörper, die wieder reell sein müssen, ergibt sich $d \leqq \sqrt{275}$. Die Zahl μ müßte nun so bestimmt werden, daß neben der Ungleichung

$$|d^2.f\ n(\mu)| \leqq 275$$

auch die Bedingung $n(\mu) < 0$ erfüllt ist, was nicht möglich ist.

C. Vier imaginäre konjugierte Körper.

Gleich den beiden früheren Fällen kann gezeigt werden, daß der Körper $K\left(\sqrt{-1+2\sqrt{-3}}\right)$ die kleinste Diskriminante $D=117$ besitzt, wobei zu beachten ist, daß die quadratischen Unterkörper, für welche $d\leqq\sqrt{117}$ gilt, reell oder imaginär sein können und μ im Falle eines reellen Unterkörpers total negativ sein muß.

II. Die absolut kleinsten Diskriminanten der allgemeinen biquadratischen Körper.

Ein Satz über quaternäre quadratische Formen, der für die folgende Betrachtung notwendig ist, soll zunächst dargestellt werden.

Nach Minkowski[1] ist eine positiv definite quaternäre quadratische Form

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum b_{ik}\, x_i\, x_k, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4;\; b_{ik} = b_{ki})$$

dann und nur dann eine reduzierte Form, wenn sie den Ungleichungen

$$b_{11} \leqq b_{22} \leqq b_{33} \leqq b_{44} \tag{1}$$

und einer Reihe von Ungleichungen

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \leqq b_{hh} \tag{2}$$

genügt, wobei $\varepsilon_h = 1$ ist und die anderen Größen $\varepsilon_k\,(k \neq h)$ die Werte $0, +1$ und -1 annehmen können.

Für jede reduzierte quaternäre quadratische Form gilt die Ungleichung

$$b_{11}\, b_{22}\, b_{33}\, b_{44} \leqq 4\, D(\varphi), \tag{3}$$

wenn $D(\varphi)$ die Diskriminante der Form bedeutet.

Minkowski[2] beweist zunächst die allgemeine Ungleichung

$$\lambda_n\, b_{11}\, b_{22} \qquad b_{nn} \leqq D(\varphi)$$

für reduzierte quadratische Formen; hiebei ist λ_n eine gewisse positive nur von n abhängige Konstante. Die Frage nach dem präzisen Werte von λ_n führt auf die extremen Formen, die zuerst von Korkine und Zolotareff[3] definiert und untersucht wurden. Mit Hilfe dieser extremen Formen kann durch Betrachtung eines

---

[1] Sur la reduction des formes quadratiques positives quaternaires. Ges. Abhandlungen von Minkowski, 1911, I. Bd., p. 146.

[2] Diskontinuitätsbereich für arithmetische Äquivalenz. Ges. Abhandlg. Minkowski, 1911, II. Bd., p. 53.

[3] Sur les formes quadratiques. Math. Ann., Bd. VI und Bd. XI.

vierdimensionalen Punktgitters die oben behauptete Ungleichung (3) nachgewiesen werden.

A. Vier reelle konjugierte Körper.

Die quadratische Form

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 + \omega_4 x_4)^2 + (x_1 + \omega_2' x_2 + \omega_3' x_3 + \omega_4' x_4)^2 + \\
&\quad + (x_1 + \omega_2'' x_2 + \omega_3'' x_3 + \omega_4'' x_4)^2 + (x_1 + \omega_2''' x_2 + \omega_3''' x_3 + \omega_4''' x_4)^2 = \\
&= \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2
\end{aligned}
$$

enthalte in jeder Klammer eine Basisform je eines der vier reellen konjugierten Körper. Sie ist positiv definit, ihre Diskriminante ist gleich der Diskriminante des biquadratischen Körpers K und das Minimum der Form ist 4. Für ganzzahlige x_1, x_2, x_3, x_4 sind $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ selbst vier konjugierte ganze algebraische Zahlen, die einer Gleichung vierten Grades genügen, deren letzter Koeffizient $|\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4|$ unbedingt $\geqq 1$ sein muß, so daß auch für die positive Quadratwurzel aus $|\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4|$ die Ungleichung $\sqrt{|\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4|} \geqq 1$ gilt. Aus dieser Ungleichung aber folgt nach dem Satze über das geometrische und arithmetische Mittel sofort die Ungleichung

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2 \geqq 4.$$

Bestimmen wir zu der quadratischen Form $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ eine äquivalente reduzierte Form, so bleibt zunächst das Minimum der Form als Invariante der Klasse erhalten; auch die einzelnen Basisformen in den Klammerausdrücken bleiben Basisformen derselben algebraischen Zahlkörper, denn die Substitutionen des Reduktionsprozesses haben alle die Determinante $+1$. Die so erhaltene reduzierte quadratische Form

$$
\begin{aligned}
\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3 + \rho_4 x_4)^2 + (x_1 + \rho_2' x_2 + \rho_3' x_3 + \rho_4' x_4)^2 + \\
&\quad + (x_1 + \rho_2'' x_2 + \rho_3'' x_3 + \rho_4'' x_4)^2 + (x_1 + \rho_2''' x_2 + \rho_3''' x_3 + \rho_4''' x_4)^2 = \\
&= \sum_{i,k=1}^{4} b_{ik} x_i x_k \qquad (4)
\end{aligned}
$$

ist der ursprünglichen Form ganz ähnlich. Die in den einzelnen Klammerausdrücken nun erscheinenden Minimalbasen werden nach Furtwängler reduzierte Minimalbasen genannt. Ihre Existenz folgt unmittelbar aus der Existenz der reduzierten Form.

Wir betrachten nun den Zahlkörper $K(\rho_2)$. Da die Relativkörper bereits untersucht wurden, kann vorausgesetzt werden, daß dieser Zahlkörper keinen quadratischen Unterkörper besitze. ρ_2 ist demnach sicher eine Irrationalzahl vierten Grades; sie genüge der irreduziblen Gleichung

$$x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0.$$

Die Diskriminante D des biquadratischen Körpers sei gegeben. Da D zugleich die Diskriminante der obigen reduzierten Form ist, so lassen sich aus den Reduktionsbedingungen (1), (2) und aus der Ungleichung (3) Grenzen für die elementarsymmetrischen Funktionen von ρ_2 und seinen Konjugierten gewinnen. Es ergeben sich folgende Ungleichungen für die Gleichungskoeffizienten:

$$|a_1| \leqq c, \quad (c = 0, 1, 2),$$

$$\frac{1}{2}(c^2 - \sqrt[3]{D}) \leqq a_2 \leqq \frac{1}{2}(c^2 - 4),$$

$$|a_4| \leqq \frac{1}{16} D^{\frac{2}{3}} \tag{5}$$

$$|a_3| \leqq \frac{1}{4}\sqrt{D}$$

wenn $a_4 > 0$ und

$$|a_3| \leqq \sqrt{\frac{D}{8}}$$

wenn $a_4 < 0$ und $a_2 \neq 0$.

Damit ist die Möglichkeit gegeben, zu jedem Werte D jene biquadratischen Zahlkörper aufzusuchen, die eine Diskriminante $\leqq D$ besitzen. Setzen wir $D = 725$, so nehmen die Ungleichungen (5) folgende Gestalt an:

$$|a_1| \leqq 2, \begin{cases} a_1 = 0, -4 \leqq a_2 \leqq -2, \\ |a_1| = 1, -3 \leqq a_2 \leqq -1, \\ |a_1| = 2, -2 \leqq a_2 \leqq 0, \end{cases}$$

$$|a_4| \leqq 5, \begin{cases} a_4 > 0, a_2 \neq 0 \quad |a_3| \leqq 6, \\ \qquad a_2 = 0: |a_3| \leqq 6, \\ a_4 < 0, a_2 \neq 0: |a_3| \leqq 9. \end{cases}$$

Von den vielen Gleichungen, deren Koeffizienten obigen Bedingungen genügen, kann eine stattliche Menge ausgeschaltet werden. Zunächst fällt die Hälfte jener Gleichungen weg, die durch die Substitution $x \rightarrow -x$ ineinander übergehen. Es sind demnach für den ersten Koeffizienten a_1 nur die Werte 0, 1, 2 zu nehmen und im Falle $a_1 = 0$ für den dritten Koeffizienten nur die positiven Werte zu berücksichtigen. Ferner müssen die Koeffizienten a_1 und a_2 der Bedingung

$$4 \leqq a_1^2 - 2\,a_2 \leqq 8 \tag{6}$$

genügen, wie sich aus den Reduktionsbedingungen (1), (2) und der Ungleichung (3) leicht ergibt. Weitere Bedingungen, die für die Ausschaltung besonders günstig wirken, können mittels des Sturmschen Satzes hergeleitet werden. Aus der Ungleichung (6) folgt, daß die Wurzeln der in Betracht kommenden Gleichungen in dem Intervalle $(-3, +3)$ liegen müssen. Da nun die Gleichungen vier reelle Wurzeln haben sollen, so muß die Sturm'sche Kette für die Werte -3, $+3$ vier Zeichenwechsel verlieren, was folgendes Schema gibt:

	-3	$+3$
$f(x)$	$+$	$+$
$f'(x) = f_1(x)$	$-$	$+$
$f_2(x)$	$+$	$+$
$f_3(x)$	$-$	$+$
$f_4(x)$	$+$	$+$

Jede Funktion dieser Kette liefert zwei Bedingungen für die Gleichungskoeffizienten. Besonders die Funktion $f_3(x)$ wirkt durch die aus dem Schema sich ergebenden Ungleichungen

$$f_3(-3) < 0, \qquad f_3(+3) > 0$$

derart günstig, daß nur mehr wenige Gleichungen für die weitere Untersuchung übrig bleiben. Von diesem Reste besitzt der größere Teil der Gleichungen negative Diskriminanten. Schaltet man überdies die reduziblen Gleichungen aus, so verbleiben nur noch die folgenden fünf Gleichungen:

a_1	a_2	a_3	a_4	Gleichungsdiskriminante
0	-4	0	1	2304
0	-4	1	1	1957
0	-4	0	2	2048
1	-3	-1	1	725
2	-2	-3	1	725

Die Gleichungsdiskriminanten sind in allen fünf Fällen zugleich die Körperdiskriminanten der entsprechenden Zahlkörper. Die beiden letzten Gleichungen

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0 \quad \text{und} \quad x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

sind algebraisch abhängig. Sie zerfallen im quadratischen Körper $k(\sqrt{5})$ in zwei Faktoren

$$\left[x^2 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})x - 1\right]\left[x^2 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})x - 1\right] = 0,$$

$$\left[x^2 + x - \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})\right]\left[x^2 + x - \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\right] = 0.$$

Aus den Wurzeln ergeben sich die beiden Zahlkörper

$$K\left(\sqrt{7+2\sqrt{5}}\right) \text{ und } K\left(\sqrt{7-2\sqrt{5}}\right),$$

die einzigen biquadratischen Zahlkörper, welche in diesem Falle die kleinste Diskriminante 725 besitzen.

B. 2 reelle und 2 imaginäre konjugierte Körper.

Es seien $(1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, $(1, \omega_2', \omega_3', \omega_4')$ Minimalbasen der zwei reellen und $(1, \omega_2'', \omega_3'', \omega_4'')$, $(1, \omega_2''', \omega_3''', \omega_4''')$ Minimalbasen der zwei imaginären Körper. Wir betrachten die quadratische Form

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+\omega_2 x_2+\omega_3 x_3+\omega_4 x_4)^2+(x_1+\omega_2' x_2+\omega_3' x_3+\omega_4' x_4)^2+ \\ +2(x_1+\omega_2'' x_2+\omega_3'' x_3+\omega_4'' x_4)(x_1+\omega_2''' x_2+\omega_3''' x_3+\omega_4''' x_4).$$

Diese Form ist positiv definit, ihre Diskriminante ist bis auf das Vorzeichen gleich der Diskriminante des biquadratischen Zahlkörpers und ihr Minimum beträgt 4. Die dieser Form entsprechende reduzierte Form ist analog gebaut; es ist bloß der Bezeichnung wegen in der obigen Form an Stelle der ω_i überall ρ_i zu setzen. An diese reduzierte Form schließt die weitere Betrachtung an.

Der Körper $K(\rho_2)$ besitze keinen quadratischen Unterkörper, so daß ρ_2 sicher Wurzel einer irreduziblen Gleichung vierten Grades

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4 = 0$$

ist. Aus den Reduktionsbedingungen (1), (2) und aus der Ungleichung (3) ergeben sich sofort

$$|\rho+\rho'+\rho''+\rho'''| \leqq 2 \text{ und } 4 \leqq (\rho^2+\rho'^2+\rho''^2+\rho'''^2) \leqq \sqrt[3]{-D}$$

oder

$$\rho+\rho'+2\sigma = c, \qquad 4 \leqq (\rho^2+\rho'^2+2\sigma^2+2\tau^2) \leqq d,$$

wenn wir für $\rho'' = \sigma+i\tau$, $\rho''' = \sigma-i\tau$, $\sqrt[3]{-D} = d$ setzen und für c nur die Werte ± 2, ± 1, 0 zulassen.

Die Gleichungskoeffizienten a_2, a_3 und a_4 sind Funktionen der Größen ρ, ρ', σ, τ. Durch die beiden Bedingungen

$$2\sigma = c-\rho-\rho' \text{ und } \sigma^2+\tau^2 = \frac{1}{2}(d-\rho^2-\rho'^2)$$

lassen sich noch zwei Veränderliche eliminieren, wobei für c nur die Werte ± 2, ± 1, 0 in Betracht kommen und für d der größte Wert $d = \sqrt[3]{-D}$ zu nehmen ist. Aus einer geometrischen Betrachtung dieser Funktionen gewinnt man wieder Grenzen für die Gleichungskoeffizienten. Für $D = -275$ ergeben sich folgende Intervalle

$$0 \leqq a_1 \leqq 2, \begin{cases} a_1 = 0: -3 \leqq a_2 \leqq 3, & 0 \leqq a_3 \leqq 3, \\ a_1 = 1 \quad -2 \leqq a_2 \leqq 3, & -4 \leqq a_3 \leqq 3, \quad |a_4| \leqq 2; \\ a_1 = 2 \quad -1 \leqq a_2 \leqq 4, & -4 \leqq a_3 \leqq 4, \end{cases}$$

hiebei ist schon berücksichtigt, daß von zwei Gleichungen, die durch die Substitution $x \to -x$ ineinander übergehen, nur eine im Bereiche vorkommt. Die Untersuchung liefert die beiden Gleichungen

$$x^4+2x^3-x-1=0 \quad \text{und} \quad x^4+x^3-2x-1=0,$$

die durch die Substitution $x \to -\frac{1}{x}$ ineinander übergehen. Aus den Wurzeln dieser Gleichungen ist zu erkennen, daß der reelle Körper $K\left(\sqrt{3+2\sqrt{5}}\right)$ und der imaginäre Körper $K\left(\sqrt{3-2\sqrt{5}}\right)$ die absolut kleinste Diskriminante -275 besitzen.

Die vorher bestimmten Grenzen der Gleichungskoeffizienten bleiben auch für $D=-283$ erhalten, so daß also in diesem Bereiche auch alle Körper mit einer Diskriminante $|D| \leqq 283$ vertreten sein müssen. Außer $D=-275$ existiert jedoch keine absolut kleinere Diskriminante. Die Körper mit der Diskriminante $D=-283$ sind definiert durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x^4-2x^2+x+1&=0,\\ x^4+x^3-2x^2+1&=0,\\ x^4+x-1&=0,\\ x^4+x^3-1&=0, \end{aligned}$$

die voneinander algebraisch abhängig sind.

C. Vier imaginäre konjugierte Körper.

Die quadratische Form

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+\omega_2 x_2+\omega_3 x_3+\omega_4 x_4)(x_1+\omega_2' x_2+\omega_3' x_3+\omega_4' x_4) + \\ + (x_1+\omega_2'' x_2+\omega_3'' x_3+\omega_4'' x_4)(x_1+\omega_2''' x_2+\omega_3''' x_3+\omega_4''' x_4)$$

enthalte in jedem Klammerausdrucke eine Basisform eines der vier konjugierten Körper. Die Form ist wieder positiv definit, hat das Minimum 2 und ihre Diskriminante

$$D(f) = \frac{1}{16} D,$$

wobei D die Diskriminante des biquadratischen Körpers bedeutet. Aus der entsprechenden reduzierten Form lassen sich wieder Grenzen für die Gleichungskoeffizienten gewinnen, die in diesem Falle, für $D=117$ gesetzt, folgende Gestalt annehmen:

$$|a_1| \leqq 2, \quad -2 \leqq a_2 \leqq 4, \quad |a_3| \leqq 4, \quad a_4 = 1.$$

Die weitere Untersuchung gestaltet sich analog den vorhergehenden Fällen und ergibt die imaginären Körper

$$K\left(\sqrt{-1+2\sqrt{-3}}\right) \text{ und } K\left(\sqrt{-1-2\sqrt{-3}}\right)$$

mit der kleinsten möglichen Diskriminante $+117$.

Die absolut kleinsten Diskriminanten der biquadratischen Zahlkörper sind 725, —275, 117, je nachdem von den vier konjugierten Körpern alle vier reell, zwei reell und zwei imaginär oder alle vier imaginär sind. Die folgende Übersicht gibt die entsprechenden Zahlkörper an:

D	Zahlkörper
725	$K\left(\sqrt{7+2\sqrt{5}}\right)$, $K\left(\sqrt{7-2\sqrt{5}}\right)$,
—275	$K\left(\sqrt{3+2\sqrt{5}}\right)$, $K\left(\sqrt{3-2\sqrt{5}}\right)$,
117	$K\left(\sqrt{-1+2\sqrt{-3}}\right)$, $K\left(\sqrt{-1-2\sqrt{-3}}\right)$.

Die Zahlkörper einer jeden Zeile sind einander konjugiert aber nicht identisch. Es ist bemerkenswert, daß diese biquadratischen Körper quadratische Relativkörper über den quadratischen Körpern mit absolut kleinster Diskriminante sind.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1929

Band/Volume: 138_2a

Autor(en)/Author(s): Mayer Josef

Artikel/Article: Die absolut kleinsten Diskriminanten der biquadratischen Zahlkörper. 733-742