Vorträge.

Construction des Kreises und der Ellipse.

Von Nicolaus Fialkowski,
Architecten und Lehrer der Geometrie und Baukunst an der Communal-Unterrealschule in Gumpendorf zu Wien.

(Mit XII Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 21. Juli 1853.)

Allgemeines Verfahren mittelst zweier Geraden jeden beliebigen Punkt einer Kreislinie zu bestimmen, welche einem gegebenen Quadrate eingeschrieben wird.

§. 1.

Construction.

Es sei (Fig. 1) $ABCD$ das gegebene Quadrat, in welchem eine Kreislinie eingeschrieben werden soll. Man halbire jede der vier Seiten dieses Quadrates, ziehe in diesem die beiden Halbirungslinien EF und GH, so ist bekanntlich M als Mittelpunkt der einzuschreibenden Kreislinie; ferner sind $EM = FM = GM = HM$ als Halbmesser, und da $AG = BG = BF = CF \ldots$ gemacht wurde, die Punkte E, F, G, H als Punkte dieser Kreislinie, und zwar als gegeben zu betrachten.

Wird nun die Seite BC über ihren Endpunkt B, und der Durchmesser EF über F hinaus verlängert, auf den zwei so erhaltenen Linien vom Punkte F aus gleich lange Stücke abgeschnitten, also $FI = FK$ gemacht, ferner der Punkt I mit H und G mit K durch Gerade verbunden, so ist der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden, d. i. der Punkt N ein Punkt derjenigen Kreislinie, welche dem gegebenen Quadrate $ABCD$ eingeschrieben werden soll.

Wie man aus der Construction sieht, wird es sich hier darum handeln, zu beweisen, ob der Winkel GNH, welchen wir der Kürze wegen mit x bezeichnen wollen, ein rechter ist; weil die zwei Eckpunkte G und H des Dreieckes GNH ohnehin Punkte des Kreises sind.

Beweis.

Betrachtet man zuerst die zwei Dreiecke CHJ und GKM, so findet man $\left.\begin{array}{l} CJ = MK \\ CH = MG \end{array}\right\}$ nach der Construction,

und der Winkel $p = q$ als Rechte;

folglich ist das △ $HCJ \cong MGK$,

daher der ∢ $\alpha = \beta$,

und der ∢ $\gamma = \delta$.

Da aber $GH \parallel CJ$ ist,

so ist der ∢ $a = \alpha$;

es ist aber $\alpha = \beta$,

daher $a = \alpha = \beta$.

Da nun $\beta + \gamma + p = 2R$ und $p = R$ ist,

so folgt $\beta + \gamma = R$

aber $a = \alpha = \beta$,

also auch $a + \gamma = R$

und da $x + a + \gamma = 2R$, so folgt, wenn man diese zwei letzten Gleichungen von einander abzieht

$$x = R.$$

Da nun die Punkte G und H Halbirungspunkte der zwei gegenüberliegenden Seiten des Quadrates $ABCD$, in welchem der Kreis eingeschrieben werden soll, mithin Punkte dieses Kreises sind, und der Winkel $x = R$ bewiesen wurde, so muss der Punkt N ein Punkt des Kreises sein, w. z. b. w.

Diese Construction ist ganz allgemein giltig, weil wir, um den Punkt N der Kreislinie zu erhalten, den Hilfspunkt J beliebig angenommen und so den Beweis geführt haben. Was also von diesem Punkte gilt, das lässt sich auch von jedem andern Punkte erweisen.

Ganz auf dieselbe Art ist in derselben Figur auch der Punkt N' construirt worden, wobei aber nur der Durchmesser über dessen Endpunkt E hinaus verlängert wurde; es ist daher gleichgiltig, ob man den Hilfspunkt J auf der Seite oder auf deren Verlängerung annimmt.

§. 2.

Aus der näheren Betrachtung der Fig. 2 folgt sofort, dass man für jeden einzelnen Quadranten von dem einen oder dem andern Endpunkte desselben angefangen, solche Construction der Punkte ins Unendliche fortsetzen kann, und dass, je weiter man sie fortsetzt, desto näher und näher die so bestimmten Punkte der Kreislinie an einander fallen, so zwar, dass die *BC* und *EF* ins Unendliche verlängert werden müssten, wenn man nach dieser Construction den Punkt *G*, d. i. den Halbirungspunkt der Seite *AB* erhalten wollte.

§. 3.

Bestimmung der correspondirenden Punkte.

Hat man auf die angegebene Weise für den einen oder den andern Quadranten mehrere Punkte construirt, so wie in Fig. 2 für den Quadranten *FG* die Punkte N, N', N'', N''', N'''' .... und wollte man in dem zweiten Quadranten die diesen Punkten gegenüber liegenden Punkte auffinden, so werden die in der Halbirungslinie und ihrer Verlängerung, d. i. in der Axe bereits aufgefundenen Punkte benützt, wozu man also die Seite *BC* nach abwärts nicht zu verlängern braucht.

Ist z. B. der Punkt *S* (Fig. 2) mittelst der Geraden *HP* und *GL* aufgefunden worden, und will man den diesem Punkte correspondirenden Punkt bestimmen, so benützt man die zwei in dem Durchmesser und dessen Verlängerung liegenden Punkte *L* und *m*, indem man *L* mit *H* verbindet und aus *G* durch *m* eine Gerade führt, bis die *HL* in *T* geschnitten wird, wodurch man auch das Stück $EQ = EP$ erhält.

Dass man die correspondirenden Punkte auch mittelst der parallel gezogenen Sehnen erhalten kann, ist ohnehin bekannt, allein dies ist nur bei der Kreislinie immer der Fall; bei der Ellipse aber als dem Bilde der Kreislinie, und besonders in der Perspective ist es nicht immer möglich, mittelst der parallelen Sehnen die correspondirenden Punkte zu bestimmen, wesshalb jedesmal für die eine Hälfte der Ellipse die nothwendigsten Punkte construirt werden müssen, wozu sich das in Fig. 2 bei der Bestimmung der Punkte *S* und *T* angegebene Verfahren besonders eignet.

§. 4.

Eine sehr nützliche Anwendung von der in den zwei vorhergehenden §§. angegebenen Construction wird man bei der Construction der Ellipse machen können; wir wollen aber zuerst untersuchen, wie die vorzüglichsten Punkte des Kreises und dann die der Ellipse gefunden werden.

Betrachten wir zu diesem Behufe Fig. 3, wo in dem gegebenen Quadrate *ABCD* der Kreis *EGFH* eingeschrieben ist. Zieht man in diesem Quadrate die beiden Diagonalen, so werden sie den Kreis in vier Punkten schneiden. Diese vier Punkte des Kreises wollen wir, beziehungsweise des dem Kreise umschriebenen Quadrates, weil sie zugleich in den Diagonalen liegen, Diagonalpunkte nennen; jene aber, welche zugleich in den Seiten des Quadrates sind, wollen wir mit dem Namen Seitenpunkte bezeichnen, um uns später desto leichter ausdrücken zu können.

Da nun einem Kreise unzählig viele Quadrate umschrieben werden können, so folgt daraus, dass es auch unzählig viele solche Diagonal- und Seitenpunkte geben kann.

Die angeführten acht Punkte sind bei der Construction der Ellipse die vorzüglichsten; sie können am leichtesten und am schnellsten aufgefunden werden, und sind in den meisten Fällen zur Construction dieser Curve für einen geübten Zeichner hinreichend.

§. 5.

Bekanntlich können die Seitenpunkte der Ellipse beim perspectivischen Quadrate als gegeben betrachtet werden; es handelt sich daher in der Perspective bei den gewöhnlichen Zeichnungen meistens nur darum, wie die Diagonalpunkte auf die einfachste Art zu bestimmen sind. Hat man nun auch diese aufgefunden, so sind dann zur Construction dieser Curve im Ganzen acht Punkte, mittelst welchen sie sich in besagten Fällen sehr leicht ausführen lässt. Wendet man beim perspectivischen Zeichnen den Grundriss an, so lassen sich die Diagonalpunkte sehr leicht bestimmen; dies ist aber nicht so leicht der Fall, ohne Benützung des Grundrisses, wenn in einem auf eine andere Art bereits gezeichneten perspectivischen Quadrate eine Ellipse eingezeichnet werden soll.

Solche Punkte aufzufinden, haben sich schon die ersten Perspectiv-Zeichner bemüht, und man hat bei gewöhnlichen Zeichnungen vor allen andern noch bis heut zu Tage diejenige Methode am meisten in Anwendung gebracht, wo die Seite des dem Kreise umschriebenen Quadrates in sieben gleiche Theile getheilt wird; allein diese Methode ist nur für Zeichnungen von kleinem Massstabe anwendbar, indem sie nur annäherungsweise ist. Man begeht nach diesem Verfahren bei Ellipsen von kleineren Durchmessern auch geringe Fehler; je grösser aber die Ellipse gezeichnet werden soll, desto grösser wird auch der Fehler sein, so zwar, dass bei einer Ellipse, deren grosse Axe etwa 6 — 10 Zoll beträgt, diese Methode gar nicht angewendet werden kann, indem der Fehler handgreiflich gross wird. Des Zusammenhanges wegen wollen wir diese Methode näher untersuchen. Theilen wir die Seite AB (Fig. 3) des gegebenen Quadrates $ABCD$ in sieben gleiche Theile, so dass $BJ = {}^1/_7\, AB$ wird, so hat man, da $BG = {}^1/_2\, AB$ ist, $BJ = {}^2/_7\, BG$ und $GJ = {}^5/_7\, BG$; dasselbe gilt auch in Bezug auf die Seite BC. Es ist daher $GJ = OL$ und $KL = MO$ nach der Construction. Sollte nun der Punkt K, welcher in der Diagonale liegt, zugleich auch in der Peripherie des Kreises sein, so muss:

$$\overline{OL}^2 + \overline{KL}^2 = \overline{OK}^2$$

sein; da nun $OL = KL = {}^5/_7$ ist, wenn $OK = 1$ gesetzt wird, so ist, wenn man diese Werthe in die obige Gleichung substituirt:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1^2$$

$$\frac{25}{49} + \frac{25}{49} = 1\,;$$

also müsste $\frac{50}{49} = 1$ sein, was absurd ist.

Man sieht also, dass der Punkt K nicht in, sondern ausserhalb der Peripherie in der Diagonale liegt, weil das Resultat um ${}^1/_{49}$ grösser ist, als es sein sollte. Es ist daher der Fehler, den man nach dieser Construction begeht ${}^1/_{49}$ Zoll, Schuh u. s. w., je nachdem man zum Halbmesser des Kreises einen Zoll, Schuh u. s. w. annimmt.

Wie lang sollte nun das Stück $OL = KL$ sein, um den Durchschnittspunkt in der Peripherie und zugleich in der Diagonale zu erhalten? Dies lässt sich trigonometrisch sehr leicht finden; denn da $OK = 1$, der Winkel $KOL = 45^0$ ist, so hat man:

$$KL = OK \sin 45^0$$

$$KL = 1 \times \sin 45^0 = \sin 45^0,$$

daher $\log KL = \log \sin 45^0$

und $\log \sin 45^0 = 9{\cdot}8494850 - 10,$

daher $\log KL = 0{\cdot}8494850 - 1 = \log 0{\cdot}7071068,$

also ist $KL = OL = 0{\cdot}7071068.$

Liesse sich nun das Stück $KL = OL$ durch eine bequeme Zahl ausdrücken, so könnte man daraus auch eine einfache und richtige Construction ableiten, allein dies ist nicht der Fall; denn wird der so gefundene Decimalbruch 0·7071068 in einen gemeinen, dieser in einen Kettenbruch verwandelt, und werden sodann von diesem die Näherungsbrüche gesucht, so hat man:

$$0{\cdot}7071068 = \frac{7071068}{10000000} = \frac{1767767}{2500000} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}}$$

wovon

$$\frac{2}{3},\ \frac{5}{7},\ \frac{12}{17},\ \frac{29}{41}\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

die ersten brauchbaren Näherungsbrüche sind. Die Nenner dieser Brüche zeigen jedesmal an, in wie viel gleiche Theile die halbe Seite oder der Radius getheilt werden soll, und die Zähler, wie viel man solche Theile für die Abscisse und Ordinate zu nehmen hat.

Wird nun die halbe Seite oder der Radius in drei gleiche Theile getheilt, und $KL = OL = \frac{2}{3}$ genommen, so ist der Fehler, da $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$ sein sollte, zu gross, d. i. $\frac{1}{9}$; also erfolgt der Durchschnittspunkt innerhalb der Peripherie in der Diagonale. Nimmt man $KL = OL = \frac{5}{7}$ an, so ist, da $\left(\frac{5}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2 = 1$ sein sollte, der Fehler $= \frac{1}{49}$; also ebenfalls noch zu gross, und der Durchschnittspunkt erfolgt in der Diagonale, jedoch ausserhalb der Peripherie. Wird ferner $KL = OL = \frac{12}{17}$ gesetzt, so hat man

$$\left(\frac{12}{17}\right)^2 + \left(\frac{12}{17}\right)^2 = 1^2;$$

und da $$\frac{144 + 144}{289} = \frac{288}{289} \text{ ist,}$$

ferner $$1 = \frac{289}{289}$$ gesetzt werden kann, so folgt, wenn man diese zwei Brüche von einander abzieht

$$\frac{289 - 288}{289} = \frac{1}{289},$$

also ist der Fehler $\frac{1}{289}$ bedeutend kleiner; noch kleiner wird der Fehler, wenn man $KL = OL = \frac{29}{41}$ setzt.

Man kann also mittelst der so aufgefundenen Werthe durch Näherungsbrüche dem wahren Werthe so nahe kommen als man will. Die Construction der Ellipse für die zwei letzten Fälle ist auf Taf. I in Fig. 3^{α} und Fig. 3^{β} dargestellt.

Wird nur die erste Decimalstelle des gefundenen Decimalbruches 0·7071068 genommen, und $KL = OL = \frac{7}{10}$ gesetzt, so muss die halbe Seite in 10 gleiche Theile getheilt, und durch den siebenten Theilungspunkt eine Parallele gezogen werden, um den Diagonalpunkt des Kreises zu erhalten; in welchem Falle man den Fehler gleich $\frac{1}{50}$ begeht, also beinahe so gross als in dem Falle, wenn $KL = \frac{5}{7}$ gesetzt wird. Die Construction der Ellipse für den Fall, wenn die Seite in zehn gleiche Theile getheilt wird, ist auf Taf. I, Fig. 3^{γ}.

Man sieht also daraus, dass es nicht möglich ist mittelst einer ähnlichen Eintheilung die Diagonalpunkte mathematisch richtig aufzufinden. Gäbe es nun auch eine Eintheilung dieser Art, vermittelst welcher die Construction der Diagonalpunkte des Kreises und folglich auch der Ellipse mathematisch richtig ausführbar wäre, so würde es doch für die Praxis von keinem besonderen Nutzen sein, indem jede Eintheilung unbequem, den Fehlern unterworfen und zeitraubend ist, und wie wir in der Folge sehen werden, mehr als jede von uns angegebene Verfahrungsart Zeit in Anspruch nimmt.

§. 6.

In den neueren Werken über die Perspective, vorzüglich in den Werken von Thibault, Vergnauld u. m. a. findet man ausser der bereits angeführten Methode, mehrere andere, nach welchem man einzelne Punkte der Ellipse finden kann. Obschon einige derselben mathematisch richtig sind, so kann man sie doch nicht die vorzüglichsten nennen, weil man auch bei diesen die Eintheilung machen muss.

In den neuesten Werken über die Perspective findet man ein mathematisch richtiges Verfahren mittelst der Abscissen und Ordinaten; dieses ist allerdings sehr einfach, wenn mit der ganzen Distanz gearbeitet wird. Es muss aber jedesmal, um in der Perspective schöne Bilder zu erzielen, die Entfernung des Beobachters von der Tafel ziemlich gross angenommen werden, so dass der betreffende Distanzpunkt ausserhalb der Zeichenfläche fällt. In diesem Falle muss mit der halben Distanz oder mit einem kleineren Theile derselben, welcher noch auf der Zeichenfläche aufgetragen werden kann, gearbeitet werden.

Wird in einem solchen Falle zur Construction der Ellipse das Verfahren mittelst Abscissen und Ordinaten angewendet, so muss jede der letzteren unvermeidlich in 2, 3 oder n gleiche Theile getheilt, und in die Drehungsaxe umgelegt werden, was allerdings ebenfalls zu umständlich und zeitraubend ist.

Wir werden nun in folgenden §§. sehen, auf welch einfache Art, ohne Eintheilung und ohne Hilfskreis die Diagonalpunkte so wie auch andere beliebige Punkte des Kreises und folglich auch der Ellipse bestimmt werden.

§. 7.

Bestimmung der Diagonalpunkte bei einer Kreislinie.

Soll nach der im §. 1 angegebenen Construction der Diagonalpunkt N (in Fig. 4) bestimmt werden, so entsteht die Frage, wie lang muss die Seite BC über B hinaus verlängert werden, um den Punkt N der Kreislinie in der Diagonale zu erhalten?

Es muss die Verlängerung der Seite $BC = \sqrt{2} - 1$ sein; zu diesem Behufe muss folgender Satz bewiesen werden:

Wenn man die eine Halbirungslinie EF des Quadrates $ABCD$ über den Endpunkt F hinaus, und die Seite BC über B hinaus verlängert, diese Verlängerungen von F aus mit dem Radius gleich der Neunziger-Sehne schneidet, ferner den so erhaltenen Punkt J mit H und K mit G verbindet, so ist der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden ein Diagonalpunkt des Kreises, d. h. er liegt in der Diagonale, zugleich aber auch in der Peripherie desjenigen Kreises, welcher dem Quadrate $ABCD$ eingeschrieben wird.

Beweis.

Wird N mit E, H und F, sodann E mit G, und H mit F verbunden, so ist: $\left.\begin{array}{l} EN = HN \\ EM = HM \end{array}\right\}$ nach der Construction,

und $MN = MN$,

folglich ist das $\triangle$ $EMN \cong \triangle HMN$,

daher der $\sphericalangle$ $x = y$;

ebenso ist $\left.\begin{array}{l} EG = FH \\ GN = FN \\ EN = HN \end{array}\right\}$ nach der Construction,

und

folglich ist das $\triangle$ $EGN \cong FHN$, und daher der $\sphericalangle$ $w = z$;

$$\left.\begin{array}{lr} \text{da ferner} & FN = GN \\ & FG = FK \\ \text{und der } \sphericalangle & q = BFG = \frac{R}{2} \end{array}\right\} \text{nach der Construction,}$$

so ist $\alpha = \beta = \gamma = \frac{R}{4}$,

daher auch $\sphericalangle$ $NFB = \beta = \frac{R}{4}$;

somit ist $\sphericalangle$ $HFN = KFN$,

und da $HF = KF$ nach der Construction

und $FN = FN$

ist, so folgt $\triangle$ $HFN \cong KFN$,

daher $\sphericalangle$ $v = z$;

es ist aber $w = z$ nach dem Bewiesenen,

folglich ist $v = w$;

da nun $q = \alpha + \gamma = \alpha + \beta = \frac{R}{2}$

und $v = \alpha + \beta$

ist, so folgt $q = v = \frac{R}{2}$.

Wir haben somit $w = z,\ v = z,\ w = v,$

$$x = y,\ \alpha = \beta = \gamma = \frac{R}{4},$$

$$v = q = \frac{R}{2};$$

und da $w + x + y + z + v = 2R$

und $w = v = \frac{R}{2}$,

so ist $x + y + z + 2v = 2R$,

also $x + y + z + R = 2R$,

folglich $x + y + z = R$,

oder der $\sphericalangle$ $ENF = R$.

Da nun E und F Endpunkte des Durchmessers EF also Punkte des Kreises sind, und der Winkel ENF ein rechter ist, so liegt der Punkt N in der Peripherie des Kreises; er liegt aber zugleich in der Diagonale, folglich ist er ein Diagonalpunkt des Kreises, w. z. b. w.

Dasselbe gilt auch in Bezug auf das Dreieck GNH; denn:

da $x + y + z = R$

und $w = z$

ist, so hat man $x + y + w = R$,

oder es ist der $\sphericalangle$ $GNH = R$, w. z. b. w.

Was nun von diesem Diagonalpunkte gilt, das lässt sich auch von jedem der drei übrigen Punkte auf ähnliche Art erweisen.

Ist also in dem Quadrate *ABCD* die Diagonale *BD* gezogen, so braucht man nur die Halbirungslinie oder den Durchmesser *EF* dieses Quadrates zu verlängern, diese Verlängerung dann aus *F* mit dem Radius gleich der diesem Kreise entsprechenden Neunziger-Sehne *FG* in *K* zu schneiden, und den so erhaltenen Durchschnittspunkt *K* mit dem Halbirungspunkte *G* der Seite *AB* zu verbinden, wodurch man den Punkt *N* des Kreises in der Diagonale erhält. Denselben Punkt findet man aber auch dadurch, wenn man, wie Fig. 5, Taf. II zeigt, die Verlängerung der Seite *BC* ebenfalls mit demselben Radius in *J* schneidet, und den so erhaltenen Punkt mit dem Halbirungspunkte der Seite *CD* verbindet.

Um den correspondirenden Punkt für N'' Fig. 4 unterhalb der *EF* zu erhalten, muss die zweite Diagonale *AC* gezogen, und der Punkt *K* mit *H* verbunden werden, wie es durch Pfeile angezeigt ist.

§. 8.

Construction der Ellipse mittelst der vier Diagonalpunkte.

Der im §. 7 aufgestellte und begründete Satz gibt uns ein leichtes Mittel an die Hand, auch bei der Ellipse die vier Diagonalpunkte zu finden, ohne dass man irgend eine Seite des Rechteckes oder Parallelogrammes, worin eine Ellipse eingeschrieben werden soll, einzutheilen braucht. Auf Grund des erwähnten Satzes kann dies auf zweifache Weise geschehen, wie wir sogleich sehen werden. Vorerst wollen wir aber eine Betrachtung anstellen, und sehen, welche Punkte ungeändert oder fix bleiben, und welche man zur Construction der Ellipse mit Vortheil in dem Falle benützt, wenn man sich dieselbe durch die Drehung des Kreises um dessen Durchmesser entstanden denkt.

Es sei nun (Fig. 6) *ABCD* das Quadrat und *EGFH* der ihm eingeschriebene Kreis gegeben. Zieht man in diesem Quadrate die beiden Diagonalen *AC* und *BD*, und bestimmt nach dem angeführten Verfahren die vier Diagonalpunkte *N*, *P*, *Q*, *S* des eingeschriebenen Kreises, so werden, wenn man sich den Kreis *EGFH* um dessen Durchmesser *EF* gedreht denkt, und das Auge des Beobachters in unendlicher Entfernung annimmt, die Punkte und Linien folgender Maassen ihre Lage verändern:

Kommt bei dieser Drehung der Punkte *A* nach A', so bleibt der Punkt *B* nach der Drehung in derjenigen Horizontalen, welche durch

A' parallel zur Drehungsaxe EF gezogen wird; mag der Punkt A nach der Drehung in der durch denselben gezogenen Verticalen oder seitwärts derselben sich befinden. Ist also der Punkt A nach der Drehung in der Verticalen AD, so muss der Punkt B in der Verticalen BC sein, und es wird AB nach der Drehung in die Lage $A'B'$ kommen; in derselben Entfernung aber von der Drehungsaxe muss vermöge der Voraussetzung der Distanz des Beobachters auch die Seite CD bleiben, also in der Lage $C'D'$. Aus diesem Grunde müssen auch die beiden Halbirungspunkte G und H in der Verticalen GH sich befinden; denkt man sich nun die Gerade HJ, in welcher sich der Diagonalpunkt N befindet, so fest verbunden, dass, wenn das Quadrat $ABCD$ gedreht wird, dieselbe gleichzeitig mitgehen muss, so kommt sie nach der Drehung in die Lage $H'N'$, wobei deren Punkt K in der Drehungsaxe ungeändert bleibt.

Da ferner jeder Punkt nach der Drehung in derselben Verticalen bleibt, in welcher er sich vor der Drehung befand, so muss der Punkt N in derselben Verticalen auch nach der Drehung bleiben, in welcher er vor der Drehung war; da nun der Punkt N in der Verticalen NN' zugleich aber auch in der Geraden $H'N'$ ist, so muss er im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden also in N' sein.

Dasselbe geschieht mit allen Diagonalpunkten, wenn die Drehung um die Axe EF gedacht und das Auge des Beobachters in unendlicher Entfernung angenommen wird.

Um aber die drei übrigen Diagonalpunkte der, in dem durch die Drehung entstandenen Rechtecke $A'B'C'D'$, einzuschreibenden Ellipse zu erhalten, ziehe man die beiden Diagonalen $A'C'$ und $B'D'$, übertrage den fixen Punkt K auf die entgegengesetzte Seite, verbinde dann G' mit K', und H' mit K und K' durch gerade Linien, und verlängere sie bis zu den Diagonalen, welche in den Punkten P', Q', S' geschnitten werden; diese sind alsdann die verlangten Diagonalpunkte der zu zeichnenden Ellipse.

§. 9.

Abgekürztes Verfahren bei der Construction der Diagonalpunkte einer Ellipse.

Da es zu umständlich wäre bei der Construction der Ellipse die zwei Hilfsfiguren, d. i. den Kreis und das ihm umschriebene Quadrat zu zeichnen, so wird man hierbei viel einfacher auf folgende Art verfahren müssen:

Es seien zur Construction der Ellipse (Fig. 7) die beiden Axen AB und CD ihrer Grösse und Richtung nach gegeben, wesshalb auch das Rechteck $EFGH$ als gegeben betrachtet werden kann. Wird in diesem Rechtecke die kleine Axe CD nach aufwärts und die Seite FG nach abwärts verlängert, ferner $OJ = OB$ und BK gleich der Entfernung BJ gemacht, sodann J mit K und C mit L durch Gerade verbunden, und letztere bis M verlängert, so ist M ein Ellipsenpunkt in der Diagonale des dieser Ellipse umschriebenen Rechteckes, also ein Diagonalpunkt der zu zeichnenden Ellipse.

Die drei übrigen Diagonalpunkte werden gefunden, indem man aus O mit dem Radius gleich der Entfernung OM die Diagonalen durchschneidet, wodurch die drei Punkte N, M', N' als die übrigen verlangten Diagonalpunkte erfolgen.

Man kann sie aber auch dadurch finden, indem man den fixen Punkt L auf die entgegengesetzte Seite des Mittelpunktes O nach L' überträgt, sodann aus C durch L' und aus D durch L und L' bis zu den Diagonalen gerade Linien führt.

Auf ähnliche Art wird man auch (Fig. 8) bei der Construction einer Ellipse verfahren, wenn die zwei conjugirten Axen AB und CD, folglich auch das Parallelogramm $EFGH$ gegeben sind. Man ziehe nämlich durch den Halbirungspunkt O die $JK \perp AB$, und in dem Endpunkte B der Axe AB die $BL \perp AB$, mache dann $OJ = OK = OB$, und BL gleich der Entfernung BK, verbinde J mit L, und C mit M durch Gerade und verlängere die letztere, d. i. die CM bis N, so ist dieser Punkt ein Diagonalpunkt der Ellipse; die anderen drei Punkte werden mittelst des übertragenen Punktes M', wie oben erklärt wurde, gefunden; oder vermittelst der Parallelen, wie es durch die Pfeile angezeigt ist.

§. 10.

Ein anderes Verfahren bei der Bestimmung der Diagonalpunkte einer Ellipse.

Wir haben in §. 8, Fig. 6 gezeigt, dass einer der vier Diagonalpunkte eines Kreises dadurch bestimmt wird, indem man die Verlängerung der Seite BC mit dem Radius gleich der Neunziger-Sehne FG aus F in J schneidet u. s. w., wodurch man nach weiterer Operation den Diagonalpunkt N erhält. Wir haben aber in §. 7, Fig. 4 bewiesen, dass man denselben Diagonalpunkt auch dadurch erhält, indem man mit dem Radius gleich der Neunziger-Sehne aus demselben Punkte die

Verlängerung des Durchmessers EF in K schneidet, und diesen Punkt mit dem Punkte G verbindet.

Um daraus ein Verfahren für die Construction der Diagonalpunkte einer Ellipse abzuleiten, müssen wir den gegebenen Kreis sammt den ihm umschriebenen Quadrate drehen und genau betrachten, was während der Drehung mit denjenigen Punkten geschieht, welche zur Construction der Diagonalpunkte im Kreise erforderlich waren.

Bei dieser Drehung wollen wir das Auge des Beobachters in unendlicher Entfernung, und zwar einmal in der Mitte der zu drehenden Figur, sodann seitwärts derselben rechts oben annehmen.

Es sei nun (Fig. 9) das Quadrat $ABCD$ und der ihm eingeschriebene Kreis $EGFH$, in welchem der Diagonalpunkt N auf eine der zwei letzteren Arten bestimmt wurde, gegeben. Wird bei der Drehung die erstere Stellung des Beobachters angenommen, so bleiben die ausserhalb der Axe liegenden Punkte stets in den durch sie senkrecht auf die Axe gezogenen Geraden; es können demnach jedesmal, sobald die Stellung eines Punktes, z. B. des Punktes A bestimmt ist, auch die übrigen Punkte B, D, G etc. sehr leicht gefunden werden, indem das Quadrat $ABCD$ als ein Rechteck erscheint, $A'B' = AB$, $A'G' = AG$ wird, während der Punkt K als ein Punkt der Axe ungeändert bleibt.

Somit wird der Diagonalpunkt N nach der Drehung in der Diagonale $B'D'$, zugleich aber auch in der Geraden $G'K$ sich befinden, daher im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden also in N' sein.

Wird die besagte zweite Stellung des Beobachters angenommen, so können auch in diesem Falle, wenn die Lage eines Punktes z. B. des Punktes A bestimmt ist, die übrigen drei Punkte B, D, G sehr leicht ermittelt werden, indem das Quadrat $ABCD$ in ein Parallelogramm übergeht, da alle ausserhalb der Axe befindlichen Punkte in denjenigen Geraden bleiben, welche durch die Fusspunkte der betreffenden Normalen parallel zur Seite des Parallelogrammes gezogen werden, während der Punkt K wie zuvor fix bleibt.

Da nun der Punkt N nach der Drehung in der Diagonale $B''D''$, zugleich aber auch in der Geraden $G''K$ liegt, so muss er im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden also in N'' sein w. z. b. w. Dasselbe gilt auch von jedem der drei übrigen Diagonalpunkte.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich die nächstfolgende Construction der Diagonalpunkte einer Ellipse.

§. 11.

Construction der Diagonalpunkte einer Ellipse mittelst der Verlängerung der grossen Axe oder des grösseren conjugirten Durchmessers.

a) Es sei zur Construction der Ellipse (Fig. 10) AB die grosse und CD die kleine Axe gegeben; man zeichne das entsprechende Rechteck $EFGH$, verlängere die grosse Axe, trage auf dieser Verlängerung vom Punkte B aus die entsprechende Neunziger-Sehne auf, verbinde den so erhaltenen Punkt K mit C und D, so sind die zwei Durchschnittspunkte in den Diagonalen, d. i. die Punkte L und M die verlangten Diagonalpunkte. Die zwei übrigen Diagonalpunkte werden mittelst der durch die ersteren zwei Punkte gezogenen Parallelen gefunden, oder indem man aus O mit $OL = OM$ die Diagonalen auf der entgegengesetzten Seite schneidet.

Was die schnelle Auffindung der entsprechenden Neunziger-Sehne betrifft, so kann dies dadurch geschehen, dass man die kleine Axe verlängert, selbe aus O mit der halben grossen Axe hier in J schneidet, oder dass man, wenn irgend ein rechter Winkel schon vorhanden ist, auf dessen Schenkeln vom Scheitelpunkte aus die halbe grosse Axe aufträgt, und die so erhaltene Hypotenuse auf die Verlängerung der grossen Axe überträgt.

b) Sind AB und CD (Fig. 11) die beiden conjugirten Axen, so construire man das entsprechende Parallelogramm $EFGH$, ziehe in diesem die beiden Diagonalen, verlängere den grösseren conjugirten Durchmesser AB bis K, so dass BK gleich der entsprechenden Neunziger-Sehne wird, und verbinde den hierdurch erhaltenen Punkt K mit den Endpunkten des kleinen conjugirten Durchmessers durch gerade Linien, welche die Diagonalen in den Punkten M und N schneiden, und die verlangten Diagonalpunkte der Ellipse geben.

Die zwei anderen Diagonalpunkte werden auf die eine oder die andere bekannte Art gefunden.

Um hierbei die entsprechende Neunziger-Sehne zu erhalten, wird auf AB in O eine Normale gezogen, diese dann aus demselben Punkte mit dem halben grösseren Durchmesser, d. i. mit OB in J geschnitten; oder wenn ein rechter Winkel schon vorhanden ist, nach dem bereits Gesagten verfahren.

Ein geübter Zeichner wird aber weder die grosse Axe zu verlängern, noch irgend eine andere Hilfslinie völlig zu ziehen brauchen, und auf folgende Art verfahren können:

Man beschreibe in der Richtung der kleinen Axe mit dem Radius gleich der halben Grossaxe einen kleinen Bogen, lege die Kante des Lineals an die kleine Axe an, und ohne deren Verlängerung gänzlich zu ziehen, durchschneide man diesen Bogen, wodurch die Entfernung *BJ* als die Neunziger - Sehne erfolgt. Nun wird mit dieser aus *B* in der Richtung der grossen Axe ein kleiner Bogen beschrieben, die Kante des Lineals an die grosse Axe angelegt, und der Bogen bei *K* geschnitten; wird endlich an diesen Punkt und an *C* die Kante des Lineals angelegt, und die Diagonale bei *M* eingeschnitten, so ist dieser der verlangte Diagonalpunkt; ebenso findet man auch den Punkt *N*, ohne dass man die Gerade *DK* zu ziehen braucht.

§. 12.

Nähere Betrachtung der Entstehungsart der Parallelogramme und die daraus abgeleiteten Constructionsarten der Ellipse.

Es sei $A'B'C'D'$ (Fig. 12, Taf. III) ein Rechteck; dieses kann man sich auf verschiedene Art entstanden denken, unter andern aber auch dadurch, indem man das Quadrat *ABCD* um die Axe *EF* dreht und dabei das Auge des Beobachters in unendlicher Entfernung annimmt. Man kann sich aber dasselbe Rechteck auch durch die Drehung des Quadrates *abcd* um die Axe $G'H'$ entstanden denken. Im ersten Falle erhält man das Rechteck $A'B'C'D'$ als das Bild des Quadrates *ABCD*, wenn die Projection von dem Auge des Beobachters in der Verlängerung der Geraden *GH* in unendlicher Entfernung angenommen wird; im zweiten Falle aber ist dasselbe Rechteck als das Bild des kleinen Quadrates *abcd*, wenn man die Projection von dem Auge des Beobachters in der Verlängerung der Geraden *EF* annimmt. Um dies mehr anschaulich zu machen, wurden hier die beiden Hauptlinien, d. i. die Horizontal- und Vertical-Linie aus der unendlichen Entfernung an die Seiten des Rechteckes $A'B'C'D'$ näher gerückt, wobei uns $\triangle\Omega$ die umgelegte Entfernung des Beobachters für den ersten, und $\triangle\Omega'$ für den zweiten Fall versinnlicht; es bleibt also der Distanzpunkt immer in der Verlängerung der Diagonale des Rechteckes $A'B'C'D'$. Somit erscheint dieses Rechteck in Bezug auf das Quadrat *ABCD* so, wie man es sich gewöhnlich vorstellt; im zweiten Falle aber erscheint dasselbe Rechteck bezüglich des Quadrates *abcd* als ein verzehrtes Bild, welches auch ganz richtig ist. Denn wird das Auge des Beobachters in der Verlängerung der Diagonale $B'D'$ in unendlicher Entfernung angenommen, so erscheint die Gerade $A'B'$ als das Bild der Geraden $A'D'$; dasselbe gilt auch in Bezug auf die Seite $C'D'$, indem $\triangle\Omega' = \triangle'\Omega'$ obgleich in unendlicher Entfernung als umgelegte Distanzen einander gleich sein müssen, wobei $A'B'$ und auch $C'D'$ als die Trassen der Tafel angenommen werden. Wird aber $B'C'$ als die Trasse der Tafel gedacht und das Auge des Beobachters in $\triangle$ angenommen, so wird $B'C'$ als das Bild der Geraden $C'D'$ u. s. w. erscheinen. Dasselbe Gesetz findet auch in Fig. 13 Statt, und man kann sich eins und dasselbe Parallelogramm $A'B'C'D'$ durch die Drehung zweier verschiedenen Quadrate entstanden denken; jedesmal aber wird die zu je zwei parallelen Seiten parallel gezogene Halbirungslinie als die Seite desjenigen Quadrates sein, durch dessen Drehung das Parallelogramm entstanden gedacht werden kann.

Wird also das Quadrat $ABCD$ um die Axe EF gedreht, so kommt bei gewisser Stellung des Auges die Seite AB nach $A'B'$, BC nach $B'C'$ u. s. w., bei einer andern Stellung des Auges wird die Seite bc von dem Quadrate $abcd$ nach $B'C'$ und ad nach $A'D'$ kommen u. s. w. Es erscheint also von zwei verschieden grossen Quadraten dasselbe Parallelogramm, wie aus den beiden Figuren ersichtlich ist.

§. 13.

Diese Erscheinung gibt uns ein treffliches Mittel an die Hand, manche Aufgaben über die Ellipse und insbesondere die Construction der Diagonalpunkte auf eine noch einfachere Art, als wir es in den vorhergehenden §§. gezeigt haben, auszuführen.

Es sei AB (Fig. 14) die grosse, CD die kleine Axe und $EFGH$ das entsprechende Rechteck; verlängert man in diesem die grosse Axe AB und macht die Verlängerung gleich der Neunziger-Sehne des über der grossen Axe, als Durchmesser angenommen, beschriebenen Kreises, verbindet den Punkt K mit dem Endpunkte C der zweiten Axe, so ist der Durchschnittspunkt dieser Geraden mit der Diagonale, d. i. der Punkt N ein Punkt der in diesem Rechtecke einzuschreibenden Ellipse, wie bereits bewiesen wurde. Wir haben aber in dem vorhergehenden §. gesehen, wie das Rechteck $EFGH$ durch die Drehung des Quadrates $efgh$, dessen Seite gleich CD gemacht wird, entstanden gedacht werden kann. Ist dies nun der Fall, so muss, die Neunziger-Sehne des diesem Quadrate eingeschriebenen Kreises auf der Verlängerung der kleinen Axe aufgetragen, und der so erhaltene Punkt mit dem Halbirungspunkte verbunden, ebenfalls der Diagonalpunkt der Ellipse erfolgen. Es muss also, wenn $OL = OC$ gemacht, sodann CL von C aus auf der Verlängerung der CD aufgetragen und M mit B verbunden wird, die Diagonale von dieser Geraden in einem Punkte geschnitten werden, welcher ein Diagonalpunkt der Ellipse ist, also derselbe Punkt wie zuvor.

Dasselbe ist auch bei dem Parallelogramme, wie Fig. 15 zeigt. Auch hier wird, wie bereits bewiesen wurde, der Diagonalpunkt mittelst der Verlängerung des grossen conjugirten Durchmessers erhalten u. s. w. Da aber das Parallelogramm $EFGH$ auch durch die Drehung des Quadrates $efgh$ entstanden gedacht werden kann, so ist auch hier die Construction des Diagonalpunktes mittelst der Verlängerung der CD mathematisch richtig. Wird also der kleinere conjugirte Durchmesser verlängert, diese Verlängerung gleich der Neunziger-Sehne des mit der halben kleinen conjugirten Axe beschriebenen Kreises gemacht, und der so erhaltene Punkt mit dem einen oder dem andern Endpunkte der zweiten Axe verbunden, so ist der Durchschnittspunkt dieser Geraden mit der entsprechenden Diagonale ebenfalls ein Diagonalpunkt der Ellipse.

Man kann daher bei der Auffindung eines Diagonalpunktes auf eine noch einfachere Art verfahren, als es bereits gezeigt wurde, und dies wollen wir sogleich sehen.

§. 14.

Construction der Diagonalpunkte einer Ellipse, wenn nur die kleine Axe oder nur der kleinere conjugirte Durchmesser verlängert werden kann.

Es sei Fig. 16 AB die grosse und CD die kleine Axe, ferner $EFGH$ das diesen Axen entsprechende Rechteck, in welchem die Ellipse eingezeichnet werden soll. Man verlängere die kleine Axe CD über den Endpunkt C hinaus, mache $OJ = OC$, $CK = CJ$, und verbinde den zuletzt erhaltenen Punkt K mit A und B durch Gerade, welche die Diagonalen in M und P schneiden; diese Punkte sind dann die verlangten Diagonalpunkte der Ellipse.

Wollte man auf dieselbe Art auch die zwei anderen Diagonalpunkte erhalten, so müsste die Axe CD auch noch unterhalb der Axe AB verlängert, im Übrigen aber wie bei den ersten zwei Punkten verfahren werden.

Wie man sieht, ist dieses Verfahren noch viel einfacher und genauer, als das in §. 9, Fig. 7, und in §. 11, Fig. 10 angegebene, weil man darnach viel schneller, schärfer und deutlicher den verlangten Durchschnittspunkt in der Diagonale erhält, wie uns dies Fig. 14 zeigt, wo man den Diagonalpunkt N auf zweifache Weise bestimmt sehen kann.

Dasselbe findet auch bei einem Parallelogramme Statt.

Sind die beiden conjugirten Durchmesser AB, CD (Fig. 17) also auch das Parallelogramm $EFGH$ gegeben, und soll in demselben eine Ellipse eingezeichnet werden, so ziehe man die beiden Diagonalen, errichte in ihrem Durchschnittspunkte O auf dem grösseren oder kleineren conjugirten Durchmesser eine Verticale, hier $JO \perp AB$, durchschneide diese Verticale mit dem Radius $= OC$ bei J und die OB bei K, verlängere den kleineren conjugirten Durchmesser und trage auf dieser Verlängerung von C aus die Entfernung JK auf, so dass $CL = JK$ ist. Wird dann der so erhaltene Punkt L mit A und B durch Gerade verbunden, so sind die Durchschnittspunkte M und N die verlangten Diagonalpunkte der Ellipse. Um die zwei übrigen Diagonalpunkte P und Q zu erhalten, wird die Axe CD auch nach der entgegengesetzten Seite verlängert, im Übrigen aber wie vorhin verfahren; oder man mache $OP = ON$ und $OQ = OM$, was bei den Parallelogrammen und Rechtecken sehr anwendbar ist.

Es wird wohl jeder Sachkundige zugeben müssen, dass diese Constructionsart so einfach ist, als man sich nur wünschen kann; denn man braucht hierbei keine Eintheilung zu machen, keinen zu grossen Raum zur Verlängerung der Axen, und erhält die Durchschnittspunkte in jedem Rechtecke und Parallelogramme für die Diagonalpunkte sehr scharf und deutlich.

§. 15.

Hat man die Richtigkeit dieser Constructionen eingesehen und sich den Gang der Sache gemerkt, so kann man bei der Construction der Diagonalpunkte einer Ellipse die eine oder die andere Verfahrungsart anwenden, je nachdem es auf der Zeichenfläche der Raum gestattet, die kleine oder die grosse Axe, den kleineren oder den grösseren conjugirten Durchmesser nach der einen oder der andern Richtung zu verlängern.

Zur Controle können beide Axen über einen ihrer Endpunkte hinaus verlängert werden; auch ist es selten der Fall, dass man mit dem Raume so beschränkt ist, um die beiden Axen nach der einen oder der andern Richtung nicht verlängern zu können.

Wir werden übrigens später sehen, dass man die Diagonalpunkte auf eine andere Art auffinden kann, ohne dass man die eine oder die andere Axe zu verlängern braucht; vorläufig wollen wir untersuchen, auf welche Art man jeden beliebigen Punkt einer Ellipse mittelst der im §. 2, Fig. 2 angegebenen Construction bestimmen kann.

§. 16.

Bestimmung eines beliebigen Punktes der Ellipse mittelst der fixen Punkte und der Verlängerung der grossen Axe oder des grösseren conjugirten Durchmessers.

Betrachten wir zu diesem Behufe die Fig. 18, Taf. IV, wo das Quadrat *ABCD* und der ihm eingeschriebene Kreis *EFGH* gegeben ist; verlängern wir die beiden verticalen Seiten *AD* und *BC*, wie auch den Durchmesser *EF*, nehmen auf der Verlängerung der Seite *BC* den Punkt *J* beliebig an, machen *FK*=*JF*, und ziehen die zwei Geraden *JH* und *GK*, so ist nach §. 1 der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden, d. i. der Punkt *L* in der Peripherie des Kreises, welcher dem Quadrate *ABCD* eingeschrieben ist. Wird nun die Drehung dieses Kreises um den Durchmesser *EF* als Drehungsaxe vorgenommen, so wird, der bereits gemachten Erklärung zu Folge, der Punkt *L* nach der Drehung in der Geraden $G'K$, zugleich aber auch in der durch *L* gezogenen Verticalen sein; er liegt aber auch in der Geraden $J'H'$, folglich muss er im Durchschnittspunkte dieser drei Geraden, d. i. in L' liegen. Da nun der Punkt *L* ein Punkt der Peripherie des Kreises ist, so muss der Punkt L' ein Ellipsenpunkt sein; was also von diesem Punkte gilt, das lässt sich auch von jedem andern Punkte erweisen.

Man hat daher zur Construction eines beliebigen Punktes der Ellipse zwei fixe Punkte, wie hier die Punkte *K* und *n* zu bestimmen, und solche nach der angegebenen Art gehörig in Anwendung zu bringen. Diese zwei fixen Punkte werden aber auch zur Bestimmung der drei übrigen Punkte, welche mit dem schon aufgefundenen Ellipsenpunkte in der horizontalen, verticalen, wie auch in der diagonalen Richtung correspondiren, benützt.

Man findet nämlich den mit dem Punkte L' correspondirenden Punkt M', indem man *K* mit H' durch eine Gerade verbindet, und aus G' durch den Punkt *n* bis zu dieser ebenfalls eine Gerade führt.

Werden ferner die zwei fixen Punkte auf die entgegengesetzte Seite der kleinen Axe übertragen, so findet man auf eben solche Art auch die zwei übrigen correspondirenden Punkte, d. i. die Punkte N' und P', wie aus der Figur einleuchtend ist.

§. 17.

Aus der im vorhergehenden §. angegebenen Construction lässt sich mit Hinweglassung der zwei Hilfsfiguren, d. i. des Quadrates und des ihm eingeschriebenen Kreises, wie auch mehrerer anderer der Erklärung wegen gezogenen Hilfslinien, eine einfache Methode für die Construction eines beliebigen Punktes der Ellipse ableiten.

Betrachten wir zu diesem Behufe nochmals die Fig. 18 so finden wir, dass die zwei Dreiecke HCJ und GOK congruent sind, und da $QF \parallel GO$, $Fn \parallel CH$ und $FO = FC$ ist, auch $FQ = Fn$ sein muss; man braucht daher nicht, um den fixen Punkt n zu finden, die Seite des Quadrates zu verlängern, in derselben einen Punkt anzunehmen und die Hilfslinie HJ zu ziehen, sondern nur irgend ein Stück dieser Seite, hier z. B. das Stück FQ, in die Axe um den Endpunkt F umzulegen.

Der fixe Punkt K in der Verlängerung der grossen Axe wird gefunden, indem man beide Axen verlängert, die Verlängerung der kleinen Axe aus dem Mittelpunkte O mit dem Radius gleich der grossen Halbaxe schneidet, sodann aus diesem Durchschnittspunkte durch Q bis zu der Verlängerung der grossen Axe eine Gerade führt, welche übrigens gänzlich weggelassen werden kann, da man nur den Punkt Q und K zu markiren und zu benützen braucht, wie im nächstfolgenden §. gezeigt werden soll.

§. 18.

Allgemeines Verfahren, jeden beliebigen Punkt einer Ellipse zu finden.

a) Wenn die grosse und die kleine Axe gegeben sind.

Sind AB und CD (Fig. 19) die beiden Axen, so verlängere man jede über einen ihrer Endpunkte, hier die AB über B und die CD über C hinaus, mache dann $OJ = OB$, und errichte im Endpunkte B eine Verticale, also $Bw \perp AB$ in B. Sollte nun irgend ein Ellipsenpunkt bestimmt werden, so nehme man in der Verlängerung der grossen Axe einen beliebigen Punkt K an, lege an diesen Punkt und an J das Lineal an, und schneide die Verticale Bw in m ein; lege dann das hierdurch erhaltene Stück Bm um den Punkt B in die Axe AB um (indem man aus B mit Bm einen Bogen beschreibt). Wird endlich C mit K durch eine Gerade verbunden, ferner aus D durch m' eine zweite Gerade so geführt, dass die erste in L geschnitten wird, so ist L ein Ellipsenpunkt.

Um die drei übrigen Punkte zu erhalten, wird $Om''=Om'$ gemacht, ferner aus D durch m'' die Gerade $Dm''N$, aus C durch m' die Gerade CM und durch m'' die CP gezogen, sodann $Mm'=Nm''=Pm''=Lm'$ gemacht. Die so erhaltenen Punkte M, N, P sind ebenfalls Ellipsenpunkte.

Man erhält also vier Punkte und mit Einschluss der vier Endpunkte der beiden Axen im Ganzen acht Punkte der Ellipse.

b) Wenn die beiden conjugirten Durchmesser gegeben sind.

Es sei (Fig. 20) AB der grössere und CD der kleinere conjugirte Durchmesser, also beide ihrer Grösse und Richtung nach, gegeben. Man verlängere den grösseren conjugirten Durchmesser AB über einen dessen Endpunkte hier über B hinaus, errichte sowohl in demjenigen Endpunkte, über welchen dieser Durchmesser verlängert wurde, als auch in dessen Halbirungspunkte O Normale, also $Bu \perp AB$ in B, und $Ou \perp AB$ in O, und schneide von der letzteren aus O das Stück $OJ=OB$ ab. Sollte nun irgend ein Punkt der Ellipse bestimmt werden, so nehme man in der Verlängerung der AB irgend einen Punkt K an, lege an diesen wie auch an den Punkt J die Kante des Lineals an, und schneide die Normale Bu in m ein. Wird dann das hierdurch abgeschnittene Stück Bm in die Axe AB umgelegt, also $Bm'=Bm$ gemacht, der Punkt C mit K durch eine Gerade verbunden und aus D durch m' eine Gerade bis zum Durchschnitte mit der CK geführt, so ist L ein Ellipsenpunkt.

Die übrigen drei Punkte werden mittelst der parallel gezogenen Sehnen gefunden, oder auch, wenn man den fixen Punkt m' auf die entgegengesetzte Seite überträgt, und auf ähnliche Art, wie bei Fig. 19 verfährt.

c) Wenn nur einer der conjugirten Durchmesser, und eine zum zweiten derselben parallele Sehne gegeben sind, oder was dasselbe ist, wenn in einem perspectivischen Quadrate eine Ellipse eingeschrieben werden soll.

Es sei (Fig. 21) $EFGH$ das perspectivische Quadrat, in welchem die Gerade CD als der eine von den zwei conjugirten Durchmessern, und die Gerade AB als die zum zweiten Durchmesser parallele Sehne gegeben ist. Man verlängere die Gerade AB über A hinaus, errichte im Endpunkte A und im Halbirungspunkte O eine Senkrechte, und mache von der letzteren das Stück $OJ = AO$. Soll nun irgend ein Ellipsenpunkt gefunden werden, so nehme man in der Verlängerung der AB einen Punkt K an, lege an diesen und an den Punkt J die Kante des Lineals an und schneide die in A errichtete Senkrechte in m ein. Wird ferner $Am' = Am$ gemacht, der Punkt K mit C durch eine Gerade verbunden und aus D durch m' ebenfalls eine Gerade so geführt, dass die CK geschnitten wird, so ist der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden, d. i. der Punkt L, ein Ellipsenpunkt.

Wird ferner der Punkt D mit K durch eine Gerade verbunden, und aus C durch m' eine zweite Gerade geführt, so ist der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden, d. i. der Punkt M, ebenfalls ein Ellipsenpunkt.

Die zwei correspondirenden Punkte N und P werden mittelst der zu AB parallel gezogenen Sehnen gefunden, indem man $Np = Lp$ und $Pq = Mq$ macht.

Da nun der Punkt K in der Verlängerung der Axe beliebig angenommen wurde, so gilt diese Construction auch von jedem andern beliebigen Punkte.

§. 19.

Um die Richtigkeit dieser Construction im dritten Falle noch besser einzusehen, müssen wir die Fig. 22 näher ins Auge fassen. Es sei $ABCD$ das Quadrat und in diesem der Kreis $EGFH$ in der verticalen Ebene gegeben. Wird in Ω der Augepunkt und in $\triangle$ der Distanzpunkt angenommen, so ist nach der Construction das perspectivische Quadrat $A'B'C'D'$ = dem Quadrate $ABCD$; oder es ist das perspectivische Quadrat $A'B'C'D'$ diejenige Figur, welche durch die Drehung des geometrischen Quadrates $ABCD$ um die als Drehungsaxe angenommene Sehne EF in der perspectivisch horizontalen Ebene entstanden ist. Ist also in dem Quadrate $ABCD$ ein Kreis eingezeichnet, so geht er bei der Drehung des Quadrates mit, und alle Punkte mit Ausnahme der in der Axe liegenden verändern gesetzmässig ihre ursprüngliche Lage. Man kann daher auch in diesem Falle die Bestimmung der Punkte in der Peripherie des Kreises nach der Drehung so vornehmen, wie wir es in Fig. 21 angeführt haben; auf ähnliche Art wird auch in diesem Falle der Beweis geführt, wie wir es bei der Fig. 18 gethan haben, mit dem Unterschiede, dass hier die Punkte G' und H' mittelst des Distanzpunktes bestimmt werden, wesshalb sie von der Drehungsaxe verschiedene Entfernungen haben.

Man nimmt also auch hier in der Seite BC irgend einen Punkt J an, beschreibt aus F mit JF einen Bogen bis K, verbindet G mit K und H mit J durch eine Gerade, so ist der Durchschnittspunkt N dieser zwei Geraden, nach dem bereits Erwiesenen, ein Punkt des Kreises. Da nun das Quadrat $A'B'C'D'$ perspectivisch gleich ist dem Quadrate $ABCD$, mithin $A'B' = AB$, $C'D' = CD$, also auch $A'G' = B'G' = AG$, und $C'H' = H'D' = HD$ u. s. w., so kommt G nach G' und H nach H', während K in der Drehungsaxe ungeändert bleibt; es wird daher der Punkt N nach der Drehung in der Geraden $G'K$, zugleich aber auch in der Geraden $H'J'$, folglich im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden, d. i. in N' sein. Da also der Punkt N ein Punkt der Peripherie des Kreises $EGFH$ ist, und N' dem Punkte N entspricht, so muss N' nach der besagten Drehung nothwendiger Weise ein Punkt der Ellipse sein, indem jede Stellung des Kreises nach der Drehung eine Ellipse ist, welche durch die Stellung des Beobachters bestimmt wird.

Was nun von diesen Punkten gilt, das lässt sich auch von jedem andern Punkte erweisen, welcher auf ähnliche Art construirt wird.

Die mit den aufgefundenen Punkten correspondirenden Punkte werden auf die bereits angeführte Art erhalten.

Bei diesem Verfahren ist im Allgemeinen noch das zu bemerken, dass, im Falle mehr als acht Punkte zur Construction der Ellipse erfordert werden, die Drehungsaxe beiderseits verlängert werden muss, weil sich sonst auf der einen Seite zu viele Linien anhäufen, und dadurch die Construction verwirren. In Fig. 22 sind die zwei fixen Punkte K und L in ungleichen Entfernungen von dem Mittelpunkte O angenommen worden. Mittelst eines jeden solchen Punktes sind vier Punkte sehr leicht gefunden, und man hat somit im Ganzen, wenn die vier Punkte E, G', F, H' mit eingerechnet werden, zwölf Punkte der Ellipse.

§. 20.

Aus der näheren Betrachtung der Figuren 19, 20 und 21 sieht man sogleich ein, dass das der in Fig. 19 gezeichneten Ellipse umschriebene Rechteck $EFGH$, ferner das in Fig. 20 umschriebene Parallelogramm $EFGH$, und das in Fig. 21 umschriebene perspectivische Quadrat $EFGH$ für einen geübten Zeichner ganz entbehrlich sind. Man wird daher nach der in dem vorhergehenden §. angegebenen Art in jedem der drei Fälle beliebig viele Punkte der Ellipse bestimmen können, ohne dass man, wie es bei der Construction der Diagonalpunkte sein muss, das Rechteck, Parallelogramm oder das umschriebene perspectivische Quadrat zuerst zu zeichnen braucht, wie dies aus Fig. 23—25 erhellet.

Die drei letzten Figuren wurden absichtlich so klein gewählt, um zugleich zu zeigen, wie scharf und deutlich auch in dem kleinen Massstabe die Punkte der Ellipse bestimmt werden können.

In solchen Fällen werden wohl ausser den vier gegebenen Punkten nur noch vier andere Punkte erforderlich sein, um ein genaues Bild dieser Curve zu erhalten; sollten aber, was insbesondere bei Kreisen von grösserem Durchmesser geschehen muss, mehrere Punkte bestimmt werden, um ein noch genaueres Bild des Kreises zu erhalten, so werden ebenso für jeden in der Verlängerung des als Drehungsaxe angenommenen Durchmessers beliebigen fixen Punkt, ähnlicher Weise vier Ellipsenpunkte erfolgen. Immer aber muss man gegen die Endpunkte der grossen Axe oder des grösseren conjugirten Durchmessers die Punkte gedrängter annehmen, weil die Krümmung der besagten Curve um F, so wie um E Fig. 22, am stärksten ist, daher auch die Wendung derselben an diesen zwei Stellen am sorgfältigsten bestimmt werden muss. Dies unterliegt nach unserer Art und Weise gar keiner Schwierigkeit, wie aus dem bereits Gesagten folgt, und was in allen drei Fällen auch graphisch durchgeführt wurde.

§. 21.

Es ist bereits erklärt worden, §. 12, Fig. 12 und 13, dass eine und dieselbe Ellipse durch die Drehung verschieden grosser Kreise entstanden gedacht werden kann, nämlich durch die Drehung des, über der grossen oder kleinen Axe, über dem grösseren oder kleineren conjugirten Durchmesser, beschriebenen Kreises. Sie kann aber auch durch die Drehung eines Kreises, welcher über was immer für einer Sehne beschrieben wird, entstanden gedacht werden; welches dann erfolgt, wenn man verschiedene Kreise von zwei verschiedenen Standpunkten betrachtet, in welchem Falle jedesmal diejenige Gerade als Drehungsaxe anzunehmen ist, über welcher ein Kreis beschrieben, und durch dessen Drehung die Ellipse entstanden gedacht wird.

Diese Erscheinungen geben uns Mittel an die Hand, in den drei nachfolgenden Fällen eine Ellipse zu construiren.

§. 22.

Construction der Ellipse, *a)* wenn nur die kleine Axe, *b)* der kleinere conjugirte Durchmesser, oder *c)* wenn nur die Sehne verlängert werden kann.

a) Wenn die beiden Axen gegeben sind, und wenn nur die kleine Axe verlängert werden soll.

Es sei (Taf. V, Fig. 26) AB die grosse und CD die kleine Axe gegeben; man verlängere die kleine Axe CD über deren beide Endpunkte hinaus, errichte in diesen zwei Punkten Verticale, also $Cu \perp CD$ in C, und $Dw \perp CD$ in D, und mache $OC' = OC = OD =$ der halben kleinen Axe. Sollte nun nach dieser Vorbereitung irgend ein Punkt der Ellipse bestimmt werden, so lege man die Kante des Lineals an den Punkt C' und an irgend einen Punkt in der Verlängerung der CD an, und schneide die in C oder D errichtete Senkrechte ein. Wird z. B. der Punkt E angenommen, an diesen so wie an C' die Kante des Lineals angelegt, die Verticale Dw in m eingeschnitten, ferner $Dm' = Dm$ gemacht, sodann A mit E durch eine Gerade verbunden, und aus B durch m' eine zweite Gerade, bis AE geschnitten ist, geführt, so ist der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden, d. i. der Punkt M, ein Ellipsenpunkt.

Ebenso wird auch der Punkt N gefunden, indem man den Punkt F in der Verlängerung der CD annimmt, an diesen Punkt so wie an C' die Kante des Lineals anlegt, die Verticale Cu in n einschneidet, $Cn' = Cn$ macht, sodann A mit F durch eine Gerade verbindet, und aus B durch n' eine zweite Gerade bis AF führt, wodurch der Durchschnittspunkt N als Ellipsenpunkt erfolgt.

Für jeden dieser zwei Punkte werden mittelst der zu CD gezogenen Parallelen auch die drei übrigen correspondirenden Punkte sehr leicht gefunden, somit hat man zur Construction der verlangten Ellipse im Ganzen zwölf Punkte.

b) Wenn die beiden conjugirten Durchmesser gegeben sind, und wenn nur der kleinere verlängert werden darf.

Es sei (Fig. 27) zur Construction der Ellipse AB als der grössere und CD als der kleinere conjugirte Durchmesser, und zwar beide ihrer Grösse und Richtung nach gegeben. Man verlängere die Axe CD beiderseits, halbire sie in O, errichte in diesem Halbirungspunkte oberhalb und unterhalb der Axe CD Senkrechte, und mache dann $C'O = D'O = CO = DO$ gleich der halben kleinen Axe. Ebenso werden in den beiden Endpunkten der kleineren Axe CD Normale, jedoch unbestimmt lang und so errichtet, dass sie in die Fläche des von den beiden Axen gebildeten stumpfen Winkels fallen. Es wird also $Cu \perp CD$ in C, und $Dw \perp CD$ in D gezogen.

Sollte nun irgend ein Ellipsenpunkt bestimmt werden, so nehme man in der Verlängerung der CD z. B. den Punkt E an, verbinde diesen mit C' (wobei nur der Einschnitt bei m gemacht zu werden braucht) und mache dann $Dm' = Dm$.

Wird endlich A mit E verbunden, und aus B durch m' eine Gerade bis AE geführt, so ist der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden, d. i. der Punkt M, ein Punkt der Ellipse.

Die drei mit diesem Punkte correspondirenden Punkte M', M'', M''' werden mittelst der Parallelen auf bekannte Art gefunden.

Sollten nun noch vier Punkte der Ellipse erforderlich sein, so nehme man auf der entgegengesetzten Seite den Punkt F an, verbinde ihn mit D', mache $Cn' = Cn$, verbinde F mit B durch eine Gerade und ziehe aus A durch n' ebenfalls eine Gerade, so dass die erste dadurch in N geschnitten wird. Die drei correspondirenden Punkte werden ebenfalls mittelst der Parallelen gefunden, wie oben. Man erhält somit, mit Einschluss der vier Endpunkte der Axen, zwölf Punkte der Ellipse.

c) Wenn ein conjugirter Durchmesser und eine zum zweiten conjugirten Durchmesser parallele Sehne gegeben ist, und wenn nur die letztere verlängert werden kann.

Ist (Fig. 28) AB der grössere conjugirte Durchmesser und CD die zum zweiten Durchmesser parallele Sehne gegeben, so verlängere man die Sehne CD beiderseits, lege durch den Halbirungspunkt dieser Axe eine Normale, mache dann $C'O = D'O = CO = DO$, errichte in C und D Senkrechte, und verfahre im Übrigen wie in den zwei vorhergehenden Fällen.

Die in den Endpunkten der Axe CD gezogenen Senkrechten müssen jedesmal auch hier so gezogen werden, dass sie stets in die Fläche des von den Axen gebildeten stumpfen Winkels fallen, weil sonst bei der Bestimmung mehrerer Punkte in der Zeichenfläche sehr leicht eine Verwirrung entsteht.

§. 23.

Es ist wohl leicht begreiflich, dass bei jeder Construction der Ellipse, also auch bei dieser trotz ihrer Einfachheit sich desto mehr Linien anhäufen, je mehr Punkte man für die Ellipse bestimmen will; hat man aber die Richtigkeit dieser Construction eingesehen, und sich den Gang der Sache gemerkt, so kann man bei dieser Methode manche Hilfslinien eher weglassen, als bei einer andern Verfahrungsart, so dass man für je vier Punkte stets nur eine einzige Gerade zu ziehen braucht, wie aus den bereits angeführten Beispielen (Fig. 23—28) ersichtlich ist. Was die fixen Punkte betrifft, so braucht für diese nur die Axe verlängert zu werden, und es werden für je vier Punkte der Ellipse nur zwei fixe Punkte in der Drehungsaxe erforderlich sein.

Es verdient daher diese Methode wegen ihrer Einfachheit und Deutlichkeit vor allen andern bisher bekannten Methoden den Vorzug, zumal da man hierbei sowohl den Hilfskreis als auch viele andere Hilfslinien, wohl auch jede Eintheilung gänzlich entbehren kann.

Wir haben somit die Construction der Ellipse in ihrer ganzen Allgemeinheit durchgeführt, bewiesen und erläutert; werden aber in folgenden §§. auch noch andere daraus abgeleitete Methoden und vor Allem ein äusserst interessantes Gesetz über die Construction des Kreises kennen lernen.

§. 24.

Construction der Ellipse, wenn nur die kleine Axe verlängert und gleich der grossen gemacht werden kann.

Wenn wir die in vorhergehenden §§. gegebenen Erklärungen sammt den hierzu gehörigen Figuren näher untersuchen, und die gesetzmässigen Veränderungen der ausserhalb der Drehungsaxe liegenden Punkte und Linien gehörig ins Auge fassen, so ergibt sich für den Fall, wenn man nur die kleine Axe verlängern kann, eine interessante Construction, welche besonders dann mit grossem Vortheile angewendet wird, falls die Differenz der beiden Axen bedeutend grösser, also auch zwei, drei oder mehrmal grösser als die kleine Axe ist. Dieser Vortheil besteht darin, dass man nach dieser Methode die Punkte der Ellipse bedeutend schärfer und deutlicher erhalten kann, als nach der bekannten Methode mittelst der beiden Brennpunkte; ausserdem hat sie den Vortheil, dass sie mit gleichem Erfolge in allen am häufigsten vorkommenden Fällen angewendet werden kann, was bei jener nicht der Fall ist, indem wegen der Brennpunkte immer die beiden Axen gegeben oder gesucht werden müssen. Sie ist folgende:

Es seien (Fig. 29) zur Construction der Ellipse die beiden Axen *AB* und *CD* gegeben; man verlängere die kleine Axe beiderseits, beschreibe aus dem Mittelpunkte O mit dem Radius gleich der halben grossen Axe OB einen Viertelkreis, schneide zugleich auch unterhalb der Axe AB das Stück $OF = AO = OE$ ab, trage dann eine beliebige Einheit, z. B. $O\alpha$ auf der grossen Axe von O aus nach den beiden Richtungen mehrmals auf (hier beiderseits dreimal), wodurch man die Punkte α, β, γ und α', β', γ' erhält. Nun wird jeder von den drei Punkten α, β, γ mit dem Punkte F durch Gerade verbunden, diese dann so weit verlängert, bis der Bogen AE in den Punkten m, n und p geschnitten ist, und durch jeden der so auf dem Bogen AE erhaltenen Punkte eine Normale auf die Axe AB geführt; diese sind mm', nn' und pp'. Werden endlich aus D durch die Durchschnittspunkte α, β, γ Linien bis zu den gezogenen Normalen geführt, so erfolgen die Durchschnittspunkte I, II, III als die drei verlangten Ellipsenpunkte.

Um die diesen drei Punkten unterhalb der grossen Axe entsprechenden Ellipsenpunkte zu erhalten, werden aus C durch die Punkte α, β, γ abermals Linien bis zu den entsprechenden Verlängerungen der Normalen gezogen, wodurch man die Punkte I', II', III' als die verlangten correspondirenden Ellipsenpunkte findet.

Wegen dieser Punkte müssen die zur Bestimmmung der drei ersten Ellipsenpunkte erforderlichen Normalen über die Axe nach abwärts gleichzeitig gezogen werden, so dass man auf diesen Verlängerungen noch die Durchschnittspunkte unterhalb der Axe finden kann, ohne sie erst verlängern zu müssen.

Die diesen sechs Punkten rechts der kleinen Axe correspondirenden Punkte werden gefunden, wenn man aus C wie aus D durch α', β', γ' Gerade zieht, sodann $\alpha' I'' = \alpha I$, $\beta' II'' = \beta II$, $\gamma' III'' = \gamma III$, und ebenso $\alpha' I''' = \alpha' I''$, $\beta' II''' = \beta' II''$ u. s. w. macht.

Sind nun die Stücke $O\alpha = \alpha\beta = \beta\gamma = O\alpha' = O\beta' = O\gamma'$ angenommen, so wird auch $CI' \parallel DI''$, $CII' \parallel DII''$, $CIII' \parallel DIII''$ u. s. w. sein, und man braucht nur, wenn aus C und D durch α', β', γ' Linien bereits gezogen sind, aus den schon bestimmten Punkten I, II, III und aus I', II', III' durch den Mittelpunkt O bis zu den entsprechenden durch α', β', γ' gezogenen Geraden ebenfalls gerade Linien zu führen, wodurch man die verlangten Punkte erhält.

Beweis.

Bevor wir diese Construction auch in anderen Fällen graphisch darstellen, wollen wir zuerst untersuchen, ob die nach diesem

Verfahren gefundenen Punkte auch wirklich Ellipsenpunkte sind. Es lässt sich hierbei der Beweis theils anschaulich, theils rein mathematisch führen.

I.

Da $FO = EO = BO$ gemacht wurde, so ist F ein Punkt des mit dem Halbmesser OB beschriebenen, also desjenigen Kreises, aus welchem die Ellipse $ABCD$ durch die Drehung um AB entstanden gedacht wird. Ist nun irgend ein Punkt, z. B. m mit F durch eine Gerade verbunden, so hat diese Linie, wenn AB als Drehungsaxe angenommen wird, den fixen Punkt α; es wird daher durch diesen Punkt die Lage der Linie Fm nach der Drehung bestimmt. Kommt z. B. der Punkt F nach D, so wird die Gerade Fm in die Lage DJ gelangen; es ist also der Punkt m in der Geraden DJ, er liegt aber auch in der Verticalen mm', also im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden, d. i. in I, folglich ist der Punkt I ein Punkt der Ellipse, w. z. b. w.

Was nun von diesem Punkte gilt, das gilt auch von jedem andern, da m willkürlich angenommen wurde; oder:

II.

Da $mm' \parallel EF$ ist, so findet man dass das $\Delta\, m' I\alpha \backsim DO\alpha$, und das $\Delta mm'\alpha \backsim FO\alpha$; es gelten daher folgende zwei Proportionen:

$$1)\quad DO : O\alpha = Im' : m'\alpha$$

und

$$2)\quad FO : O\alpha = mm' : m'\alpha,$$

oder wenn der Kürze wegen $O\alpha = \mu$, $m'\alpha = \nu$, ferner bekannter Weise

$$AO = a,\quad DO = b$$

und

$$Om' = x,\quad Im' = y$$

gesetzt, sodann diese Werthe in die zwei obigen Proportionen substituirt werden.

$$1)\quad b : \mu = y : \nu$$

$$2)\quad a : \mu = mm' : \nu,$$

oder bruchweise geschrieben:

$$\frac{b}{\mu} = \frac{y}{\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{I})$$

$$\frac{a}{\mu} = \frac{mm'}{\nu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II});$$

dividiren wir diese zwei Gleichungen Glied für Glied mit einander, so erhalten wir

$$\frac{b \cdot \mu}{\mu \cdot a} = \frac{y}{\nu} \cdot \frac{\nu}{mm'}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{y}{mm'} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)};$$

es handelt sich nun in dieser Gleichung um die Grösse mm'; denken wir uns zu diesem Behufe die Om gezogen, so finden wir, da das Dreieck $Om'm$ rechtwinkelig ist: $(Om)^2 = (mm')^2 + (Om')^2$, also

$$mm' = \sqrt{(Om)^2 - (Om')^2}.$$

Da aber $Om = AO = a$ und $Om' = x$ gesetzt wurde, so ist: $mm' = \sqrt{a^2 - x^2}$; man erhält daher durch Substitution in der Gleichung (III)

$$\frac{b}{a} = \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

quadrirt man diese Gleichung, so folgt

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{y^2}{a^2 - x^2}$$

oder

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{y^2},$$

hieraus

$$a^2 y^2 = b^2 (a^2 - x^2)$$

und

$$a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2,$$

folglich

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

woraus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also eine bekannte Gleichung der Ellipse folgt.

Dieselbe Relation muss aber auch bei jedem andern Punkte erfolgen, also ist der Punkt I ein Punkt der Ellipse, w. z. b. w.

§. 25.

Dass diese Construction in allen Fällen ausführbar ist, wird wohl leicht einzusehen sein; allein sie gewährt nur dann einen grossen Vortheil, wenn die Differenz der Axen bedeutend gross ist, wie die graphische Darstellung Fig. 30 zeigt. Denn bestimmt man nach der bekannten Methode mittelst der zwei Brennpunkte z. B. die vier Punkte x, y, w, z, so sieht man, dass sich die Bögen sowohl bei x, y wie auch bei w und z schief schneiden, daher auch die Durchschnittspunkte dieser Bögen, welche Ellipsenpunkte sein sollen, sehr undeutlich werden. Da nun hier sowohl der wahre als auch der wahrscheinliche Punkt in der Richtung der Gedachten xy liegen, so ist dabei der geringste Fehler sehr empfindlich, was nach der von uns angeführten Methode, wie Fig. 30 zeigt, nicht der Fall ist. Im Gegentheile man bekommt die als Ellipsenpunkte erhaltenen Durchschnittspunkte sehr scharf und deutlich, und je näher man mit der Bestimmung derselben gegen die Endpunkte der grossen Axe geht, je deutlicher und schärfer erhält man sie auch.

In dieser Figur wird auch gezeigt, auf welche Art die in §. 25 angegebene Construction vereinfacht werden kann. Es werden nämlich die zu EF gezogenen Parallelen, d. i. die Verticalen mm', nn', pp' nach abwärts verlängert, ferner $m'I' = m'I, n'II' = n'II, p'III' = p'III$ und $q'IV' = q'IV$ gemacht, sodann die Entfernung der Normalen II', $IIII'$, $IIIIII'$ u. s. w. auf die entgegengesetzte Seite der kleinen Axe übertragen, im Übrigen aber wie bei der Bestimmung der Punkte I, I', II, II', III, III' u. s. w. verfahren.

§. 26.

Construction der Ellipse, wenn die beiden conjugirten Durchmesser gegeben sind, und wenn keiner derselben verlängert wird.

Die in den zwei vorhergehenden §§. angegebene Methode gewährt auch in dem Falle einen grossen Vortheil, wenn nur die beiden conjugirten Durchmesser gegeben sind. Es seien (Fig. 31) AB und CD solche Durchmesser, welche ihrer Grösse und Richtung nach gegeben sind; man nehme den grösseren derselben als den Durchmesser desjenigen Kreises an, durch dessen Umdrehung die zu zeichnende Ellipse entstanden gedacht wird; beschreibe mit dessen Hälfte aus O einen Viertelkreis, suche auf die bei Fig. 30 angegebene Weise die fixen Punkte a, b, c und m', n', p', ziehe dann durch letztere zum kleinen conjugirten Durchmesser Parallele, und durchschneide sie aus den Endpunkten eben dieses Durchmessers durch Gerade. Hier sind sie aus D geschnitten und $m'I, = m'I', n'II = n'II'$, $p'III = p'III'$ gemacht.

Auf ähnliche Art werden auch die Punkte $I''II''III''$, ferner $I'''II'''III'''$ gefunden, indem man $m''O = m'O$, $n'O = n''O$.... macht, und im Übrigen wie vorhin verfährt.

Beweis.

Was den Beweis betrifft, so kann dieser wie im §. 24, Fig. 29 auf zweierlei Art geführt werden, denn es stehen auch hier entweder die fixen Punkte der Drehungsaxe und die hierdurch bestimmten Lagen der Geraden, in welchen sich die Punkte des Kreises nach der Drehung befinden, zu Gebote, oder es werden z. B. für den Punkt I, oder I' die vier Dreiecke $D\alpha O$, $I\alpha m'$, $D'\alpha O$ und $m\alpha m'$, von denen je zwei und zwei mit einander ähnlich sind, benützt, indem man daraus die zwei brauchbaren Proportionen aufstellt.

Es ist nämlich:

$$1)\quad Oa : OD = am' : Im'$$

$$2)\quad Oa : OD' = am' : mm'.$$

Setzt man hier der Kürze wegen

$$OD' = OB = a'$$

$$OD = OC = b',$$

ferner

$$Om' = x',\ Im' = y'$$

$$Oa = \mu,\ am' = \nu$$

und denkt sich die Gerade Om gezogen, so ist auch mm' bestimmt, indem $mm' = \sqrt{\overline{Om}^2 - \overline{Om'}^2} = \sqrt{a'^2 - x'^2}$; welche Werthe in die zwei obigen Proportionen substituirt, gibt sofort:

$$\mu : b' = \nu : y'$$

$$\mu : a' = \nu : \sqrt{a'^2 - x'^2}$$

oder bruchweise geschrieben

$$\frac{\mu}{b'} = \frac{\nu}{y'}$$

$$\frac{\mu}{a'} = \frac{\nu}{\sqrt{a'^2 - x'^2}}.$$

Dividirt man diese zwei Gleichungen Glied für Glied durcheinander, so folgt

$$\frac{\mu \cdot a'}{b' \cdot \mu} = \frac{\nu \sqrt{a'^2 - x'^2}}{y' \cdot \nu},$$

woraus man

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\sqrt{a'^2 - x'^2}}{y'}$$

erhält. Diese Gleichung beiderseits quadrirt, gibt

$$\frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a'^2 - x'^2}{y'^2},$$

woraus

$$a'^2 y'^2 = b'^2 (a'^2 - x'^2)$$

und

$$a'^2 y'^2 = a'^2 b'^2 - b'^2 x'^2,$$

daher

$$b'^2 x'^2 + a'^2 y'^2 = a'^2 b'^2,$$

und daraus

$$\frac{x_{\prime}^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$

also eine Gleichung der Ellipse für das schiefwinkelige Coordinaten-System folgt, welches mit unserer Construction nach der gegebenen Bedingung vollkommen übereinstimmt; folglich ist der Punkt *I* ein Ellipsenpunkt.

Auf ähnliche Art lässt sich der Beweis auch für jeden andern Punkt führen; es ist daher die angegebene Construction auch in dem Falle mathematisch richtig, wenn die beiden conjugirten Axen gegeben sind.

Bei dieser Construction ist nur noch das zu bemerken, dass man in zwei Ellipsenquadranten die Durchschnittspunkte, welche Ellipsenpunkte sind, sehr scharf und deutlich erhält, hingegen in anderen zwei Quadranten fallen dieselben etwas undeutlich aus, wie aus Fig. 31 ersichtlich ist. Es müssen demnach im ähnlichen Falle diejenigen Punkte der Ellipse bestimmt werden, welche in der Fläche des von den beiden Axen gebildeten stumpfen Winkels liegen.

§. 27.

Construction der Ellipse nach dieser Art in der Perspective.

Es ist wohl leicht begreiflich, dass sich die Ellipse auf so eben angegebene Art auch in einer jeden perspectivischen Ebene construiren lässt, indem, wie Fig. 31 zeigt, die zu dem kleineren conjugirten Durchmesser durch die Fusspunkte der Normalen gezogenen parallelen Sehnen, wenn sie gehörig verlängert werden, durch den Augepunkt gehen müssen.

Allein wir finden für überflüssig die graphische Durchführung dieses Falles, weil wir dafür eine viel einfachere Construction bereits angegeben haben, und in den folgenden §§. noch andere einfache Constructionen angeben wollen.

Des Zusammenhanges wegen werden wir hier nur noch das Interessante dieser Construction für den Fall hervorheben, wenn der Hilfskreis über der kleinen Axe beschrieben wird, wobei gar keine Axe verlängert zu werden braucht.

§. 28.

Construction der Ellipse, wenn der Hilfskreis über der kleinen Axe beschrieben wird, und keine von den beiden Axen verlängert werden darf.

Es sei (Fig. 32) *AB* die grosse und *CD* die kleine Axe gegeben; man beschreibe über der kleinen Axe *CD* einen Kreis, nehme in der Peripherie desselben den Punkt E beliebig an, fälle aus diesem Punkte eine Normale auf diese Axe, also $EF \perp CD$, verbinde den Punkt E mit A' durch eine Gerade, welche die CD in G schneidet, verlängere die Normale EF nach aufwärts und führe aus dem Endpunkte A der grossen Axe durch den Punkt G eine Gerade, bis die Verlängerung der Normalen hier in H geschnitten wird, so ist dieser Durchschnittspunkt ein Punkt der Ellipse, deren grosse Axe AB und die kleine CD ist.

Um die mit diesem Punkte correspondirenden Punkte der Ellipse zu erhalten, wird durch den gefundenen Punkt H die $HH' \parallel AB$ gezogen, sodann $FH' = FH$ gemacht, ferner durch H die HH'' und durch H' die $H'H''' \parallel CD$ geführt u. s. w., wodurch man also vier Punkte der Ellipse erhält.

Allerdings wäre diese Construction sehr vortheilhaft, wenn der Durchschnittspunkt H etwas schärfer zu bestimmen wäre, welcher desto undeutlicher wird, je grösser die Differenz der beiden Axen ist.

Sie kann also nur in dem Falle angewendet werden, wenn die Differenz der beiden Axen klein ist.

Beweis.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction wird auf ähnliche Art wie bei der Fig. 29—31 geführt.

Nehmen wir zu diesem Behufe den Anfangspunkt der Coordinaten in O an, setzen der Kürze wegen:

$$AO = BO = a$$
$$CO = DO = b$$
$$FO = x, HF = y,$$

bezeichnen ferner GO mit m und FG mit n, so haben wir da das $\Delta FGE \backsim \Delta A'GO$ und das $\Delta\ FGH \backsim AGO$, folgende zwei brauchbare Proportionen:

$$1)\ FG : FE = GO : A'O$$
$$2)\ FG : FH = GO : AO$$

und daher wenn man die obigen Werthe substituirt.

$$n : FE = m : b$$
$$n : y \quad = m : a$$

oder bruchweise geschrieben

$$\frac{n}{FE} = \frac{m}{b}$$
$$\frac{n}{y} = \frac{m}{a};$$

dividirt man diese zwei Gleichungen durch einander, so folgt:

$$\frac{n}{FE} \cdot \frac{y}{n} = \frac{m}{b} \cdot \frac{a}{m}$$

$$\frac{y}{FE} = \frac{a}{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha).$$

Nun handelt es sich um den Werth von FE; diesen finden wir, wenn wir uns die Hilfslinie EO gezogen denken, weil dann:

$$EF = \sqrt{EO^2 - FO^2};$$

da aber $EO = CO = b$, und $FO = x$ ist, so hat man sofort

$$EF = \sqrt{b^2 - x^2};$$

substituiren wir in die Gleichung (α) den Werth für EF, so haben wir:

$$\frac{y}{\sqrt{b^2-x^2}} = \frac{a}{b} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta),$$

quadriren wir diese Gleichung beiderseits, so folgt:

$$\frac{y^2}{b^2-x^2} = \frac{a^2}{b^2}$$

und $$b^2y^2 = a^2b^2 - a^2x^2,$$

folglich $$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\gamma).$$

Da wir nun CO mit b und BO mit a bezeichnen, so müssen wir auch das Stück FO statt x mit y, und FH statt y mit x bezeichnen, indem hier die grosse Axe AB nur die scheinbare kleine Axe ist, daher, wenn wir in der Gleichung (γ) statt a^2, b^2 und statt b^2, a^2 setzen, folgt sofort

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also eine bekannte Gleichung der Ellipse, somit ist der Punkt H ein Ellipsenpunkt; es ist daher auch jeder Punkt, welcher nach diesen Daten auf ähnliche Art gefunden wird, ein Ellipsenpunkt, w. z. b. w.

§. 29.

Construction der Ellipse nach dieser Art, wenn die zwei conjugirten Axen gegeben sind.

Es seien AB und CD (Fig. 33) die zwei ihrer Grösse und Richtung nach gegebenen conjugirten Axen; man beschreibe über der kleinen Axe CD einen Kreis, ziehe in diesem die $C'D' \perp CD$ in O, nehme den Punkt E beliebig an, verbinde ihn mit D' durch eine Gerade, welche die CD in G schneidet; wird nun aus E die $EF \perp CD$

gezogen, durch den Fusspunkt F dieser Normalen die $HH' \parallel AB$ gelegt, und aus A durch den Punkt G eine Gerade so geführt, dass die HH' in H geschnitten wird, so ist der Durchschnittspunkt H ein Ellipsenpunkt. Da auch hier zwei Paar ähnliche Dreiecke gefunden werden, so lässt sich hierbei der Beweis so wie in den früheren Fällen führen.

Ist die Differenz der beiden conjugirten Durchmesser nicht gar gross, so kann man ohne weiters auch diese Methode mit Vortheil anwenden, wobei nur noch das zu bemerken ist, dass bei der Construction der Ellipsenpunkte nur die durch den Fusspunkt der Normalen zur grossen Axe geführten Parallelen völlig gezogen zu werden brauchen, alle anderen können weggelassen werden, wenn die Hilfspunkte markirt sind.

§. 30.

Des Zusammenhanges wegen wollen wir hier eine Aufgabe anreihen, welche in manchen Fällen auf die gewöhnliche Art nicht so leicht ausführbar ist, nämlich: Es soll von einem ausserhalb der Ellipse gegebenen Punkte an diese eine Tangente geführt werden, wobei weder die Axen noch die Brennpunkte gegeben sind. Ist also $ABCD$ (Fig. 34^{α}) die gegebene Ellipse, so ziehe man zwei zu einander parallele Sehnen $AB \parallel CD$, halbire jede derselben, ziehe durch die Halbirungspunkte h und h' eine dritte Sehne und halbire auch diese in O, welcher Punkt bekannter Weise der Mittelpunkt der gegebenen Ellipse, somit EF die eine und die durch O parallel zu AB geführte Gerade GH die zweite conjugirte Axe sein muss; es wird daher der über EF oder GH beschriebene Kreis derjenige sein, durch dessen Drehung die gegebene Ellipse entstanden gedacht werden muss. Wird alsdann durch den gegebenen Punkt a die $am \parallel GH$, durch m die $ma' \parallel G'H'$, ferner a mit H verbunden, und aus H' durch den zuletzt erhaltenen fixen Punkt n eine Gerade bis ma' gezogen, so ist a' derjenige Punkt, von welchem aus an den aus O mit dem Radius OE beschriebenen Kreis eine Tangente vor der Drehung gezogen wurde. Wird dann aus diesem Punkte a' an den Kreis eine Tangente geführt, ferner durch den so erhaltenen Berührungspunkt J' die $J'K \parallel G'O$ und die $JK \parallel OG$ gezogen, so ist J der Berührungspunkt für die aus a an die Ellipse zu ziehende Tangente.

Um die Richtigkeit dieser Construction desto leichter einzusehen, wird die gegebene Ellipse durch die Drehung des aus O mit dem

Radius *OE* beschriebenen Kreises *EG'FH'* entstanden gedacht, wobei alle auf die Drehungsaxe gezogenen Normalen aus bekannten Gründen parallel zu *GH* bleiben, wesshalb auch die *ma'* und *J'K* parallel zu *GH* gezogen werden müssen; somit ist der Punkt *J* der zu suchende Berührungspunkt, und *aJg* die verlangte Tangente.

Schon aus der Construction sieht man ein, dass diese Auflösung allgemein ist, und es wird daher auch gleichgiltig sein, ob die an den Kreis gezogene Tangente die Drehungsaxe schneidet oder nicht. Man kann aber die Axe jedesmal so erhalten, dass der Durchschnittspunkt derselben mit der Tangente noch auf die Zeichenfläche fällt, was lediglich von der Wahl der Richtung der zwei zuerst zu ziehenden parallelen Sehnen abhängt. Sind die beiden Axen gegeben, so ist die Auflösung dieser Aufgabe viel einfacher, indem man dann viele Linien entbehren kann. In diesem Falle wird aber jedesmal eine von den zwei möglichen Tangenten die Verlängerung der Axe schneiden, wodurch man einen fixen Punkt als Hilfspunkt erhält, wie dies Fig. 34^{β} ersichtlich macht.

§. 31.

Construction der Ellipse mittelst der Umlegung der Ordinaten in die Drehungsaxe.

Wenn man Fig. 12 und 13 näher in Betrachtung zieht und bedenkt, wie das Bild irgend eines Punktes auf der Tafel bestimmt wird, so ergibt sich hieraus ein interessantes Verfahren, in einem beliebigen Rechtecke oder Parallelogramme eine Ellipse mittelst beliebig vieler Punkte zu construiren.

Soll nämlich (Taf. VI, Fig. 35) in dem Rechtecke *EFGH* eine Ellipse eingeschrieben werden, so beschreibe man über *AB* als Durchmesser einen Kreis, ziehe in diesem die Ordinaten *JJ'*, *KK'*, *LL'*, *MM'*, *NN'*, *PP'*, beschreibe mit den Radien gleich diesen Ordinaten aus deren Fusspunkten die Halbkreise so, dass der Durchmesser und dessen Verlängerung geschnitten wird, oder was dasselbe ist, man lege jede Ordinate um deren Fusspunkt beiderseits desselben in die Axe um, und ziehe dann durch die so in der Axe erhaltenen Punkte zu der einen oder der andern Diagonale des Rechteckes *EFGH* Parallele, bis die entsprechenden Ordinaten geschnitten werden. Wird z. B. die Ordinate *MM'* in die Axe umgelegt, so erhält man rechts derselben in der Axe den Punkt *m*, und links den Punkt *m'*; ebenso erhält man, wenn die Ordinate *NN'* in die Axe umgelegt wird, einerseits den Punkt *n* und anderseits den Punkt n' in derselben u. s. w. Werden alsdann aus m nach links oben, und aus m' nach rechts unten zu der Diagonale EG Parallele gezogen, so wird durch die erste die Ordinate MM' in m'' und durch die zweite Parallele die Verlängerung dieser Ordinate unterhalb der Axe in m''' geschnitten; und jeder dieser zwei Punkte ist ein Punkt der in das Rechteck $EFGH$ einzuschreibenden Ellipse.

Beweis.

Vergleicht man die durch diese Construction entstandenen Dreiecke $M'mm''$, $N'nn''$ u. s. w. mit dem Dreiecke EFG, so findet man, dass sie mit einander ähnlich sind, indem die homologen Seiten zu einander parallel sind; es ist nämlich $EF \parallel M'm$, $M'm'' \parallel FG$, $mm'' \parallel EG$ u. s. w. Man kann daher folgende Proportion aufstellen:

$$M'm'' : M'm = N'n'' : N'n = P'p'' : P'p = FG : EF,$$

und da $CD = FG$ und $EF = AB$ ist, so hat man durch Substitution $Mm'' : M'm = N'n'' : N'n = P'p'' : P'p = CD : AB$, also wenn man nur die zwei Dreiecke $M'mm''$ und EFG mit einander vergleicht:

$$M'm' : M'm = FG : EF \text{ oder}$$
$$M'm'' : M'm = CD : AB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}).$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$M'O = x \text{ und } M'm'' = y,$$

ferner $AB = 2a$ und $CD = 2b$,

so brauchen wir nur noch die $M'm$, welche nach der Construction gleich $M'M$ ist, durch Rechnung zu finden; denken wir uns also zu diesem Behufe die MO gezogen, so haben wir:

$$\overline{MO}^2 = \overline{M'M}^2 + \overline{M'O}^2;$$

und da $MO = BO$, und $M'M = M'm$

ist, ferner $BO = a$ und $M'O = x$

gesetzt wurde, so folgt:

$$M'M = \sqrt{a^2 - x^2} = M'm.$$

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung (I), so erhält man:

$$y : \sqrt{a^2 - x^2} = 2b : 2a = b : a$$

und hieraus $ay = b\sqrt{a^2 - x^2}$,

welche Gleichung beiderseits quadrirt sofort gibt:

$$a^2 y^2 = b^2 (a^2 - x^2) = a^2 b^2 - b^2 x^2,$$

daher $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

und hieraus durch Division mit $a^2\, b^2$

folgt $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

eine bekannte Gleichung der Ellipse; folglich ist der durch diese Construction gefundene Punkt m'' ein Ellipsenpunkt.

Was nun von diesem Punkte gilt, das lässt sich auf ähnliche Art auch von jedem andern Punkte erweisen, welcher auf ähnliche Art gefunden wird.

§. 32.

Construction der Ellipse in einem Parallelogramme nach der in §. 31 angegebenen Art.

Sind zur Construction einer Ellipse die beiden conjugirten Axen sowohl ihrer Grösse als auch ihrer Richtung nach gegeben, so wird hierbei auf ähnliche Art wie bei dem Rechtecke verfahren, mit dem Unterschiede, dass die Ellipsenpunkte nicht in den Ordinaten, sondern in den durch die Fusspunkte derselben zu der kleinen Axe gezogenen Parallelen liegen; wesshalb in diesem Falle durch die Fusspunkte der Ordinaten zu der kleinen Axe parallele Gerade gezogen, und mittelst der durch die umgelegten Endpunkte der Ordinaten zu der Diagonale gezogenen Parallelen geschnitten werden müssen.

Sollte also für diesen Fall irgend ein Punkt der Ellipse bestimmt werden, so beschreibe man Fig. 36 mit dem halben conjugirten Durchmesser, also mit BO aus O einen Bogen Bu; nehme auf diesem irgend einen Punkt J an, ziehe dann die Ordinate JK, lege sie um den Fusspunkt K in die Axe um, ziehe durch diesen Fusspunkt die $NP \parallel CD$, endlich aus M die $MN \parallel EG$, und aus L die LP ebenfalls parallel zu EG, wodurch man die zwei Ellipsenpunkte N und P erhält.

Wird ferner $LO = KO$ gemacht, durch den Punkt L eine Parallele zu CD gezogen, und $LQ = LR = KN$ abgeschnitten, so erfolgen die Punkte Q und R als die zwei correspondirenden Punkte für N und P, wodurch man also vier Punkte der Ellipse gefunden hat.

Beweis.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Construction wird auf ähnliche Art wie beim Rechtecke geführt; denn man braucht nur die zwei Dreiecke EFG und MNK mit einander zu vergleichen, so findet man dass sie einander ähnlich sind, indem je zwei und zwei Seiten nach der Construction zu einander parallel, daher die gleichliegenden Seiten gerade proportionirt sind, nämlich:

$$KN : KM = FG : EF = CD : AB.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$KO = x', \; KN = y',$$

ferner $$EG = CD = 2b'$$

und $$EF = AB = 2a',$$

zieht die Hilfslinie OJ, und sucht die JK, welche gleich KM ist, (indem KM gleich JK gemacht wurde), so findet man auch hier, wenn die entsprechenden Werthe substituirt werden:

$$y' : \sqrt{a'^2 - x'^2} = b' : a',$$

woraus $$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1,$$

also ebenfalls eine bekannte Gleichung der Ellipse erfolgt; es ist daher auch für diesen Fall die Richtigkeit der angegebenen Construction nachgewiesen.

§. 33.

Der dritte Fall dieser Construction tritt dann ein, wenn in einem perspectivischen Quadrate eine Ellipse eingeschrieben werden soll. Wir unterlassen indessen die graphische Durchführung dieses Falles, weil man, wie in §. 6 bereits erwähnt wurde, diese Construction nicht jedesmal mit Vortheil benützen kann. Auch ist diese Construction in der Perspective nicht mehr neu, indem man sie in einigen neuen Werken über die Perspective findet.

Der Beweis kann auch in diesem Falle auf ähnliche Art, wie beim Parallelogramme geführt werden, indem die durch den Fusspunkt der Ordinaten gezogenen Parallelen nach dem Hauptpunkte, jene aber, welche zur Diagonale parallel geführt werden, nach dem Distanzpunkte convergiren.

Wird nun, was in der Perspective meistens geschehen muss, um ein schönes Bild des Gegenstandes zu erzielen, mit irgend einem Theile der Distanz gearbeitet, so muss auch von jeder Ordinate der eben so vielte Theil jedesmal abgeschnitten werden, was allerdings unbequem und zeitraubend ist.

§. 34.

Bei der in §. 31 gezeigten Construction ergibt sich noch Folgendes: Werden, wie Fig. 37 zeigt, die Ordinaten in gleicher Entfernung von einander und ziemlich gedrängt angenommen, sodann aus den

Fusspunkten dieser Ordinaten mit den Radien gleich diesen Ordinaten Kreise beschrieben, so entsteht dadurch eine Figur, deren Umfang sich desto mehr einer Ellipse nähert, je mehr Ordinaten man annimmt, und wenn eine von ihnen so gezogen wird, dass sie den Quadranten halbirt.

Die grösste Entfernung eines Punktes auf der Verlängerung der grossen Axe von dem Mittelpunkte derselben, erhält man dann, wenn man mit der Ordinate gleich dem Sinus von 45° einen Kreis auf die besagte Art beschreibt. In Fig. 38 schneidet ein solcher Kreis die Axe XX' in A', alle anderen Punkte, welche mittelst der nächstfolgenden Ordinaten erhalten werden, rücken wieder zurück, so dass der letzte Punkt links in A sein wird.

Alsdann wird das Verhältniss der beiden Axen dieser Ellipse wie $\sqrt{2} : 1$ sein, denn es ist, wenn $A'm$ und Om gezogen werden:

$$A'm = mO$$

$$AO = CO$$

und da der $\sphericalangle$ $A'mO = AOC$ ist,

so ist das Δ $A'mO \cong AOC$,

daher $A'O = AC$;

es ist aber, wenn $AO = CO = 1$ gesetzt wird,

$$AC = A'O = \sqrt{2} \text{ und } CD = 2;$$

folglich ist $A'B' : CD = 2\sqrt{2} : 2$

oder $a : b = \sqrt{2} : 1.$

Bei dieser Construction kommen noch zwei besondere Eigenschaften zum Vorschein: *a)* Wird durch die Ordinaten, wie in Fig. 37, der Durchmesser AB in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt, so fallen die Durchschnittspunkte der auf besagte Art beschriebenen Kreise in die Ordinaten; *b)* wird aber durch die Ordinaten wie in Fig. 38 die Peripherie in eine gewisse Anzahl gleicher Theile getheilt, so berühren sich die Kreise in der Abscissenaxe.

Letzteres folgt desshalb, indem wie Fig. 38^{α} zeigt, wenn der Punkt E in der Peripherie des Kreises beliebig angenommen, ferner $EF \perp AO$, $CO \perp AB$ und $EG \perp CO$ gezogen, sodann $BH = CE$ gemacht, und $HJ \perp JO$ geführt wird u. s. w.

$$FO = cos\ \alpha = sin\ \beta = JK$$

und $JO = cos\ \beta = sin\ \alpha = FK$

daher $FO + JO = FK + JK$;

es ist aber $FO + JO = FJ$,

also auch $FK + JK = FJ$:

folglich berühren sich die aus F und J mit ihren Ordinaten beschriebenen Kreise in K. Dasselbe gilt auch von jedem andern Punkte.

Man kann für eine solche Ellipse nur mittelst zwei Ordinaten mehrere Punkte, so wie auch die zweite Axe bestimmen, und diese Curve mit Vortheil aus Kreisbögen zusammensetzen, wie dies Fig. 39 zeigt.

§. 35.

Construction der Ellipse in einem Rechtecke, wenn der Hilfskreis über der kleinen Axe beschrieben wird.

Viel interessanter wird die im §. 31 angegebene Construction, wie auch der Beweis, wenn man sich die Ellipse durch die Drehung des Kreises, welcher mit der halben kleinen Axe oder mit dem halben kleinen conjugirten Durchmesser über demselben aus dessen Halbirungspunkte beschrieben wird, entstanden denkt.

Wir haben im §. 12 bei der Erklärung der Fig. 12 und 13 bereits nachgewiesen, dass man sich jedes Rechteck oder Parallelogramm durch die Drehung zweier verschiedener Quadrate, folglich auch die einzuschreibenden Ellipsen durch die Drehung zweier verschiedener Kreise entstanden denken kann. Für den Fall, wenn die Ellipse durch die Drehung eines mit der grossen Halbaxe oder mit dem halben grösseren conjugirten Durchmesser beschriebenen Kreises entstanden gedacht wird, ist die Construction im §. 31 und 32 bereits nachgewiesen; wir werden nun auch für den so eben erwähnten Fall zuerst die Construction zeigen, sodann dieselbe nachweisen.

Man beschreibe aus O (Fig. 40) mit dem Radius $OB = OA$ einen Kreis, ziehe in diesem die Ordinate JK, verlängere sie nach ab- und aufwärts, und durchschneide aus K mit JK die AB in L, deren Verlängerung aber in M; wird alsdann durch L zu der Diagonale EG eine Parallele gezogen, welche die Verlängerung der Ordinate, d. i. die mn in N schneidet, so ist dieser Punkt ein Ellipsenpunkt. Wird ferner aus demselben Punkte zu der zweiten Diaganale ebenfalls eine Parallele, also $LN' \parallel FH$ gezogen bis mn geschnitten wird, so ist auch dieser Punkt, d. i. N', ein Ellipsenpunkt, und zwar derjenige, welcher mit dem ersten correspondirt.

Diese zwei Punkte kann man aber auch dadurch erhalten, indem man aus M die $MN' \parallel EG$ und $MN \parallel FH$ zieht.

Beweis.

Zum Behufe des Beweises muss man entweder die Axen mit einander oder die Abscisse mit der Ordinate verwechseln, was auch ganz richtig ist; denn wenn man sich die in das Parallelogramm einzuzeichnende Ellipse (Fig. 40) als das Bild des aus O mit OB beschriebenen Kreises vorstellt, so ist es nichts anderes, als ein verzerrtes Bild, beziehungsweise der kleinen Axe, in welchem Bilde die kleine Axe nicht kleiner, sondern grösser erscheint.

Man muss also dann $JK = KN'$ setzen, welches perspectivisch richtig ist, wenn das Auge des Beobachters in unendlicher Entfernung angenommen wird.

Man kann aber den Beweis für die Richtigkeit dieser Construction auch auf folgende Art führen:

Da das Dreieck $KLN' \backsim HGF$ ist, so findet folgende Proportion Statt:

$$LK : N'K = HG : FG,$$

es ist aber $$HG = AB$$

und $$FG = CD,$$

also $$LK : N'K = AB : CD \quad \ldots\ldots \quad (\alpha).$$

Setzen wir der Kürze wegen:

$$HG = AB = 2b$$
$$FG = CD = 2a$$

und nehmen den Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkte O an, so wird, wenn man sich durch N' eine Parallele zu AB gezogen denkt, das Stück $Op = N'K = x$ abgeschnitten, wo dann $N'p = OK = y$ ist.

Man hat daher durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung (α)

$$LK : x = 2b : 2a = b : a \ldots . (\beta),$$

in welcher Proportion nur noch das erste Glied unbekannt ist.

Denkt man sich nun OJ gezogen, so folgt aus dem rechtwinkeligen Dreiecke OJK:

$$JK = \sqrt{\overline{JO}^2 - \overline{OK}^2}$$

da aber $$OJ = OB = b$$

und $$OK = y$$

ist, so folgt $$JK = \sqrt{b^2 - y^2};$$

es ist aber $$JK = LK$$

nach der Construction,

also $$JK = \sqrt{b^2 - y^2},$$

welcher Werth für LK in die Gleichung (β) substituirt, gibt

$$\sqrt{b^2 - x^2} : x = b : a,$$

woraus, $$a \sqrt{b^2 - y^2} = bx.$$

Diese Gleichung beiderseits quadrirt gibt sofort

$$a^2 (a^2 - y^2) = b^2 x^2$$

$$a^2 b^2 - a^2 y^2 = b^2 x^2$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

und hieraus $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also eine bekannte Gleichung der Ellipse folgt. Es muss daher jeder auf ähnliche Art bestimmte Punkt ein Ellipsenpunkt sein, w. z. b. w.

Zu derselben Relation gelangt man auch, wenn man aus dem angegebenen Grunde $AB = 2a$ und $CD = 2b$ setzt und darnach auch die Abscissen und Ordinaten bezeichnet.

§. 36.

Construction der Ellipse in einem Parallelogramme, wenn der Hilfskreis über dem kleinen conjugirten Durchmesser beschrieben wird.

Auch in diesem Falle ist die Construction der Ellipse ähnlich mit der im §. 35 angegebenen.

Ist (Fig. 41) AB der kleinere und CD der grössere conjugirte Durchmesser der Grösse und Richtung nach gegeben, so kann auch das der zu zeichenden Ellipse umschriebene Parallelogramm $EFGH$ als gegeben betrachtet werden.

Ist dieses Parallelogramm gezeichnet, und in demselben die beiden Diagonalen gezogen, so beschreibe man über dem kleinen conjugirten Durchmesser AB einen Hilfskreis, nehme in der Peripherie desselben den Punkt J an, ziehe die diesem Punkte entsprechende Ordinate JK, und lege sie beiderseits in die Axe AB um, wodurch man den Punkt L und M erhält.

Wird endlich durch den Fusspunkt dieser Ordinate die Gerade $mn \parallel CD$ gezogen, und aus dem Punkte L die $LN \parallel FH$ geführt, so ist der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden, d. i. N ein Punkt der zu zeichnenden Ellipse.

Wird ferner aus dem Punkte L die $LN' \parallel EG$ gezogen, so erfolgt der Punkt N' als ein zweiter und zwar als correspondirender Punkt des Punktes N derselben Ellipse.

Man kann aber dieselben Punkte erhalten, wenn man aus dem Punkte M zu den entsprechenden Diagonalen Parallelen zieht, wie aus der Figur ersichtlich ist.

B e w e i s.

Vergleicht man die in dieser Figur entstandenen Dreiecke mit einander, so findet man bezüglich des Punktes N das $\Delta\, LNK \sim FGH$, daher:

$$LK : NK = GH : FG;$$

es ist aber $\quad GH = AB = 2b',$

und $\quad FG = CD = 2a';$

also $\quad LK : NK = AB : CD = 2b' : 2a' = b' : a' \ldots (\alpha).$

Nimmt man nun die conjugirten Axen als die Coordinaten-Axen an, so hat man, wenn die Abscissenaxe mit der Ordinatenaxe verwechselt wird, $OK = y'$ und $NK = x'$.

Denkt man sich ferner auch die Hilfslinie JO gezogen, so folgt aus dem rechtwinkeligen Dreiecke JKO:

$$JK = \sqrt{\overline{OI}^2 - \overline{OK}^2}.$$

Da nun die Gedachte $\quad OJ = OB = b'$

und $\quad OK = y'$ ist,

so hat man $\quad JK = \sqrt{b'^2 - y'^2};$

es ist aber $\quad IK = LK$ nach der Construction,

daher $\quad LK = \sqrt{b'^2 - y'^2}.$

Werden nun diese Werthe in die Gleichung (α) substituirt, so folgt:

$$\sqrt{b'^2 - y'^2} : x' = b' : a',$$

woraus man $\quad a' \sqrt{b'^2 - y'^2} = b'x'$ erhält;

welche Gleichung beiderseits quadrirt sofort gibt:

$$a'^2 (b'^2 - y'^2) = b'^2 x'^2$$

$$a'^2\, b'^2 - a'^2 y'^2 = b'^2 x'^2$$

und hieraus $\quad \dfrac{a'^2}{x'^2} + \dfrac{y'^2}{b'^2} = 1;$

also ebenfalls eine Gleichung der Ellipse, daher ist jeder auf diese Art gefundene Punkt ein Ellipsenpunkt.

§. 37.

Fassen wir die vier Figuren 35, 36, 40, 41 näher ins Auge, so folgt daraus, dass im ersten Falle Fig. 35 und 40 die Ordinaten nicht verlängert zu werden brauchen, im zweiten Falle aber, sind die durch den Fusspunkt der Ordinaten zu der nicht verlängerten Axe gezogenen Parallelen ganz entbehrlich, sobald man die beiden mittelst des Umlegens der Ordinate in der Axe erhaltenen Punkte benützt.

So gut man also im ersten Falle die Ordinate nicht zu verlängern und im zweiten Falle durch den Fusspunkt derselben eine Hilfslinie nicht zu ziehen braucht, eben so gut braucht man nicht alle vier Linien, welche für je zwei Punkte ein Parallelogramm bilden, zu ziehen.

Man wird daher aus jedem der zwei umgelegten Punkte *L* und *M* (Fig. 42 und 43) zu der einen der zwei Diagonalen eine entsprechende Parallele ziehen, und diese dann aus denselben Punkten parallel zu der zweiten Diagonale einschneiden. Werden überdies die Punkte *L* und *M* entgegengesetzt übertragen, so können mit einem Schlage mittelst der zu den Diagonalen gezogenen Parallelen alle vier Punkte bestimmt werden, wobei die meisten Linien, welche hier der Erklärung wegen gezogen werden mussten, also auch die Hilfskreise weggelassen werden können, wie dies aus Figur 42 und 43 leicht einzusehen ist.

§. 38.

Construction des Kreises mittelst zweier um zwei fixe Punkte drehbaren Geraden.

Wir kommen nun zu einem äusserst interessanten Gesetze über die Construction des Kreises, welches sich bei der genaueren Untersuchung des in §. 1 und 2 aufgestellten Satzes näher ergeben hat.

Es sei (Taf. VII, Fig. 44) *ABCD* ein Quadrat, in welchem jede der vier Seiten halbirt, sodann je zwei gegenüberliegende Halbirungspunkte mit einander durch Gerade verbunden, und überdies auch die Gerade *FG* gezogen; es ist also *MF* der Halbmesser desjenigen Kreises, welcher dem Quadrate *ABCD* eingeschrieben wird, *FG* die Diagonale des Viertelquadrates, daher ist sie auch die Sehne des Viertelbogens, oder kurzweg Neunziger-Sehne.

Wird nun die Neunziger-Sehne *FG*, z. B. in 4, die *MF* aber in 4mal so viele gleiche Theile, als in wie viel die *FG* getheilt wurde, also in 4^2 gleiche Theile getheilt; wird ferner die durch die Eintheilung der Neunziger-Sehne erhaltene Einheit *FI*, auf der Verlängerung des Halbmessers *EF* 4mal aufgetragen, so ist, wenn der Halbirungspunkt *G* mit dem Punkte *I'* auf *FU*, und der Eckpunkt *B* mit 1 auf *MF* durch Gerade verbunden werden, der Durchschnittspunkt *I''* dieser zwei Geraden ein Punkt der Peripherie desjenigen Kreises, welcher dem Quadrate *ABCD* eingeschrieben werden soll.

Eben so gibt, *G* mit *II'* auf *FU*, und *B* mit 4 oder 2^2 auf *MF* verbunden, den Punkt *II''*, ferner *G* mit *III'* auf *FU* und *B* mit 9 oder 3^2 auf *MF* den Punkt *III''*, und endlich gibt, *G* mit *IV'* auf *FU* und *B* mit 16 oder 4^2 auf *MF* durch Gerade verbunden, den Punkt *IV''*; so also, dass alle vier Punkte *I''*, *II''*, *III''*, *IV''* in der Peripherie des dem gegebenen Quadrate *ABCD* eingeschriebenen Kreises liegen.

Fassen wir diese Construction näher ins Auge, so sehen wir, dass der Construction eines jeden Kreises durch die Eintheilung des Halbmessers und der Neunziger-Sehne zwei verschiedene Einheiten, welche von einem und demselben Punkte nach entgegengesetzten Richtungen auf einer Geraden aufgetragen werden, zu Grunde liegen.

Wird demnach die Einheit $F\,1 = \frac{1}{16} = \frac{1}{4^2}$ des Halbmessers *MF* von *F* angefangen auf *EF* und dann auf deren Verlängerung noch weiter, so oft als es auf der Zeichenfläche geht, aufgetragen, die so erhaltenen Theilungspunkte von *F* angefangen mit natürlichen Zahlen bezeichnet, und diejenigen Punkte, auf welche bei der Bezeichnung die Quadrate der natürlichen Zahlen fallen, deutlicher markirt[1]), sodann die Einheit der Neunziger-Sehne auf der Verlängerung der *EF* so oft von *F* aus aufgetragen, als es auf der entgegengesetzten Seite Quadratzahlen gibt, so gilt das aufgestellte Gesetz auch dann, und es gibt somit, wie Fig. 44 zeigt:

Die Gerade	*GI'*	mit der Geraden	*B* 1	oder	$B1^2$	den Punkt	*I''*
„ „	*GII'*	„ „ „	*B* 4	„	$B2^2$	„ „	*II''*
„ „	*GIII'*	„ „ „	*B* 9	„	$B3^2$	„ „	*III''*
„ „	*GIV'*	„ „ „	*B*16	„	$B4^2$	„ „	*IV''*
„ „	*GV'*	„ „ „	*B*25	„	$B5^2$	„ „	*V''*
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
„ „	*Gn*	„ „ „	$Bn \times n$	„	Bn^2	„ „	*N*

[1]) Wir wollen diejenigen Punkte, auf welche bei der Bezeichnung der Theilungspunkte die Quadrate der natürlichen Zahlen fallen, Quadratpunkte nennen, um uns bei der Erklärung desto kürzer und leichter ausdrücken zu können.

und endlich der in unendlicher Entfernung liegende Punkt einerseits mit G, und der diesem Punkte entsprechende Quadratpunkt andernseits mit B verbunden, gibt den Halbirungspunkt der Seite AB, so also, dass die Gerade $G\infty$ mit der Geraden $B\infty \times \infty$, oder mit $B\infty^2$ auf die obige Art in Verbindung gebracht, den Punkt G gibt.

Auf diese Art kann man also für einen jeden Quadranten beliebig viele Punkte bestimmen, und solche Construction der Punkte für jeden einzelnen Viertelkreis ins Unendliche fortsetzen, indem man die zwei senkrecht aufeinander stehenden Durchmesser nach den vier Richtungen verlängert, und bei der Bestimmung der Punkte auf eben die Weise vorgeht, wie bei dem ersten gezeigt wurde.

§. 39.

Bevor wir nun die Richtigkeit dieser Construction nachweisen, wollen wir zuerst ebenfalls einen neuen, hierzu erforderlichen Lehrsatz für Quadratzahlen aufstellen und begründen, d. h. wir wollen zuerst zeigen, auf welche Art man durch geometrische Construction die Quadrate der natürlichen Zahlen auf dem Durchmesser für den Fall erhält, wenn die Sehne von 90° oder Neunziger-Sehne in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt wird.

Es sei nun $ACBK$ (Fig. 45) ein mit einem beliebigen Halbmesser beschriebener Kreis; man ziehe in diesem die Neunziger-Sehne BC, theile sie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, beschreibe mit dem Radius gleich einem solchen Theile aus dem einen Punkte dieser Sehne hier aus B einen Kreis, welcher den ersten in E, den Radius BO in G und dessen Verlängerung in F schneidet; so entstehen, wenn die Geraden AE, EF, EG und BE gezogen werden, zwei rechtwinkelige Dreiecke, d. i. das Dreieck AEB und EFG, in welchem Falle, wenn von ihrem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte E die Normale EH gezogen wird, das Stück BH gefunden werden kann.

Bekanntlich ist die Neunziger-Sehne hier $BC = \sqrt{2}$, wenn der Halbmesser $BO = r = 1$ gesetzt wird. Denkt man sich nun BC etwa in vier gleiche Theile getheilt, und einem solchen Theil zum Halbmesser für den zweiten Kreis $GEFK'$ genommen, so ist $BG = BD = BE = BF = \frac{1}{4}\sqrt{2}$; es sei ferner der Kürze wegen $EH = h$, $BH = x$, $GH = y$ und $BG = BH + GH = x + y$, und da $BO = r = 1$ ist, so folgt $AH = 2 - x$ und $FH = x + \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Nach diesen Voraussetzungen finden folgende zwei Proportionen statt:

Es ist $BH : EH = EH : AH$

und da $AH = AB - BH$

ist, so hat man $BH : EH = EH : AB - BH \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha)$;

eben so ist $GH : EH = EH : FH$

und da $FH = BH + BF$

ist, so folgt $GH : EH = EH : BH + BF \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\beta)$.

Substituirt man in diesen zwei Proportionen die obangeführten Werthe, so hat man:

$$x : h = h : (2 - x) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (\alpha')$$

und $$y : h = h : \left(x + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \; . \; . \; . \; . \; (\beta');$$

somit aus (α') $$h^2 = x\,(2 - x)$$

und aus (β') $$h^2 = y\left(x + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right),$$

daher $$x\,(2 - x) = y\left(x + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; (\gamma);$$

es ist aber $$x + y = \frac{1}{4}\sqrt{2} = BG,$$

somit $$y = \frac{1}{4}\sqrt{2} - x,$$

folglich durch Substitution in (γ)

$$x\,(2 - x) = \left(\frac{1}{4}\sqrt{2} - x\right)\left(\frac{1}{4}\sqrt{2} + x\right),$$

woraus $$2x - x^2 = \left(\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)^2 - x^2$$

also $$2\,x = \frac{1}{16}\,.\,2$$

und hieraus $$x = \frac{1}{16} = \frac{1}{4^2} \text{ folgt.}$$

Es ist somit das Segment $BH = x = \frac{1}{4^2}$, wenn der Halbmesser des Grundkreises, d. i. $B\,O = r = 1$ gesetzt, die Neunziger-Sehne BC in vier gleiche Theile getheilt, und aus B mit dem Halbmesser gleich einem solchen Theile der Punkt E auf der Peripherie des Grundkreises bestimmt wird. Eben so findet man

$$\text{für } x + y = \frac{2}{4}\sqrt{2},\; x = \frac{2^2}{4^2} = \frac{4}{16}$$

$$\text{„ } x + y = \frac{3}{4}\sqrt{2},\; x = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$\text{„ } x + y = \frac{4}{4}\sqrt{2},\; x = \frac{4^2}{4^2} = \frac{16}{16} = 1.$$

Um diesen Satz ganz allgemein nachzuweisen, bezeichnen wir die Anzahl Theile, in welche die Neunziger-Sehne BC getheilt wird mit n und die Anzahl derjenigen Theile, welche man zum Radius des Hilfskreises nimmt mit p, so ist der Radius für den Hilfskreis (auf den Radius $r = 1$ bezogen) $= \frac{\sqrt{2}}{n} \times p = \frac{p}{n}\sqrt{2}$, daher nach der angeführten Proportion:

$$x : h = h : (2-x), \quad \ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$y : h = h : \left(x + \frac{p}{n}\sqrt{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (\beta)$$

somit aus (α)
$$h^2 = x\,(2-x),$$

und aus (β)
$$h^2 = y\left(x + \frac{p}{n}\sqrt{2}\right),$$

daher
$$x\,(2-x) = y\left(x + \frac{p}{n}\sqrt{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (\gamma);$$

da nun auch hier

$$BH + GH = x + y = \frac{p}{n}\sqrt{2}$$

ist, so folgt
$$y = \frac{p}{n}\sqrt{2} - x,$$

und daher, wenn dieser Werth in die Gleichung (γ) substituirt wird

$$x\,(2-x) = \left(\frac{p}{n}\sqrt{2} - x\right)\left(\frac{p}{n}\sqrt{2} + x\right),$$

woraus
$$x\,(2-x) = \left(\frac{p}{n}\sqrt{2}\right)^2 - x^2,$$

somit
$$2x - x^2 = \frac{p^2}{n^2} \cdot 2 - x^2,$$

also
$$2x = \frac{2p^2}{n^2},$$

folglich
$$x = \frac{p^2}{n^2}$$

folgt, w. z. b. w.

Da nun eine jede Gerade in eine beliebige Anzahl gleicher Theile geometrisch theilbar ist, so gilt dies von jedem beliebigen Punkte des Quadranten und dessen entsprechender Sehne.

Löst man die Gleichung $x = \frac{p^2}{n^2}$ in eine Proportion auf, so erhält man:

$$x : p = p : n^2,$$

d. h. in Worten ausgedrückt: Jedes Stück der Neunziger-Sehne ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Quadrate dieser Sehne und demjenigen Segmente des Durchmessers, welches zwischen dem einen Endpunkte der Sehne und dem Fusspunkte derjenigen Ordinate liegt, deren Peripheriepunkt mit diesem Sehnenstücke aus demjenigen Endpunkte, dem das Segment anliegt, bestimmt wird.

Man kann daher mittelst der aus diesem Satze abgeleiteten Construction für jede beliebige Eintheilung der Neunziger-Sehne auf dem Durchmesser die Eintheilungslinien für die Quadrate der natürlichen Zahlen erhalten, ohne den Durchmesser eintheilen zu müssen.

Wird nun in der Gleichung $x = \frac{p^2}{n^2}$,

$$n = 4 \text{ und } p \left.\begin{array}{l} = 1, \\ = 2, \\ = 3, \\ = 4 \end{array}\right\}$$

(wo 1 eine durch die Eintheilung der Neunziger-Sehne erhaltene Einheit bezeichnet)

gesetzt, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \text{für } p = 1,\ x = \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16}, \\ \text{„ } p = 2,\ x = \frac{2^2}{4^2} = \frac{4}{16}, \\ \text{„ } p = 3,\ x = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}, \\ \text{„ } p = 4,\ x = \frac{4^2}{16} = \frac{16}{16} \end{array}\right\}$$

(vom Halbmesser des Grundkreises).

Es sind daher die Zähler der so erhaltenen Brüche die Quadrate der natürlichen Zahlen, welche nach der angeführten Construction dadurch gefunden werden können, wenn man nach und nach mit den Radien gleich den Zählern der Brüche: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{4}$ oder im Allgemeinen mit $\frac{p}{n}$ von der Neunziger-Sehne aus F die Peripherie des Grundkreises durchschneidet, und von diesen Durchschnittspunkten die Ordinaten zieht.

Dieser Satz gilt aber auch dann, wenn auf der Verlängerung der Neunziger-Sehne $\frac{1}{n}$ derselben aufgetragen wird, denn es ist (Fig. 46), wenn man die Sehne $BC = \sqrt{2}$ und ihre Verlängerung $JC = \frac{1}{n}\sqrt{2}$ setzt, d. h. wenn man $n + \frac{1}{n}$ solcher Theile zum Radius des Hilfskreises nimmt:

$$x : h = h : (2-x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha),$$

$$y : h = h : \left(x + \sqrt{2} + \frac{1}{n}\sqrt{2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (\beta),$$

daher aus (α) $h^2 = x\,(2-x)$,

und aus (β) $h^2 = y\left(x + \sqrt{2} + \frac{1}{n}\sqrt{2}\right)$,

folglich $x\,(2-x) = y\left(x + \sqrt{2} + \frac{1}{n}\sqrt{2}\right) \ldots\ldots\ldots (\gamma)$;

es ist aber

$$x + y = \sqrt{2} + \frac{1}{n}\sqrt{2} = BI = BI' = BF',$$

daher

$$y = \sqrt{2} + \frac{1}{n}\sqrt{2} - x,$$

folglich den Werth für y in (γ) substituirt, gibt ferner:

$$x\,(2-x) = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{n}\sqrt{2} - x\right)\left(\sqrt{2} + \frac{1}{n}\sqrt{2} + x\right),$$

$$x\,(2-x) = \left\{\left(\sqrt{2} + \frac{1}{n}\sqrt{2}\right) - x\right\}\left\{\left(\sqrt{2} + \frac{1}{n}\sqrt{2}\right) + x\right\},$$

$$2\,x - x^2 = \left(\sqrt{2} + \frac{1}{n}\sqrt{2}\right)^2 - x^2,$$

$$2x = 2 + \frac{2}{n}\cdot 2 + \frac{1}{n^2}\cdot 2,$$

$$2x = 2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2},$$

$$x = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2},$$

woraus endlich

$$x = \frac{(n+1)^2}{n^2} \text{ erhalten wird.}$$

Da nun die Neunziger-Sehne in n gleiche Theile getheilt und $n + 1$ solche Theile zum Radius des Hilfskreises genommen wurde, so ist auch hier $x =$ dem Quadrate der genommenen Theile dividirt durch das Quadrat derjenigen Anzahl Theile, in welche die Sehne getheilt wurde.

Dieser Satz gilt auch dann, wenn auf der Verlängerung der Neunziger-Sehne der $\frac{1}{n}$te Theil derselben 1, 2, 3 ... oder m mal aufgetragen wird, denn es ist:

$$x : h = h : (2-x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$y : h = h : \left(x + \sqrt{2} + \frac{m}{n}\sqrt{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\beta)$$

folglich aus (α) $h^2 = x\,(2-x)$,

und aus (β) $h^2 = y\left(x + \sqrt{2} + \frac{m}{n}\sqrt{2}\right)$,

daher

$$x\,(2-x) = y\left(x + \sqrt{2} + \frac{m}{n}\sqrt{2}\right) \;\ldots\ldots\ldots (\gamma);$$

da nun

$$x + y = \sqrt{2} + \frac{m}{n}\sqrt{2}$$

ist, also

$$y = \sqrt{2} + \frac{m}{n}\sqrt{2} - x,$$

so erhält man durch Substitution in die Gleichung (γ):

$$x\,(2-x) = \left(\sqrt{2} + \frac{m}{n}\sqrt{2} - x\right)\left(\sqrt{2} + \frac{m}{n}\sqrt{2} + x\right),$$

$$2x - x^2 = \left(\sqrt{2} + \frac{m}{n}\sqrt{2}\right)^2 - x^2,$$

$$2x = \left(\sqrt{2} + \frac{m}{n}\sqrt{2}\right)^2 = 2 + 2\,.\,\frac{m}{n}\,.\,2 + \frac{m^2}{n^2}\,.\,2,$$

woraus

$$x = 1 + \frac{2m}{n} + \frac{m^2}{n^2} = \frac{n^2 + 2mn + m^2}{n^2},$$

folglich $x = \dfrac{(n+m)^2}{n^2}$,

also ganz allgemeiner Ausdruck erhalten wird, w. z. b. w.

Je grösser also die Anzahl Theile, in welche die Neunziger-Sehne getheilt werden soll, angenommen wird, desto öfter lässt sich ein solcher Theil auf einer geringen Verlängerung dieser Sehne, und ebenso auch der erste Werth für $x = \frac{m^2}{n^2}$ auf dem Durchmesser und dessen Verlängerung auftragen, wodurch man also auch desto mehr Punkte nach der besagten Construction erhält.

§. 40.

Aus der näheren Betrachtung der Fig. 46 sieht man leicht ein, dass die Verlängerung der Sehne BC beliebig lang gemacht werden, hingegen der Radius für den Hilfskreis bei der jedesmaligen Eintheilung der Sehne das Maximum $= 2r$ des Grundkreises erhalten kann; was auch ganz natürlich ist, indem der Grundkreis mit einem grösseren Radius als $2r$ aus dessen einem Peripheriepunkte gar nicht geschnitten werden kann, und der Punkt A, d. i. der Endpunkt des Durchmessers AB, wird der letzte Durchschnittspunkt sein, dessen Ordinate gleich Null ist.

Da also in der Gleichung $x = \frac{(n+m)^2}{n^2}$ sowohl n als m bekannt sind, und die Neigung der Neunziger-Sehne, wie auch deren Verlängerung dieselbe bleibt, aber auch n constant ist, so folgt daraus, dass man für jeden Werth von $p = n + m$, auch den entsprechenden Werth für x berechnen kann, wenngleich der Grundkreis mit dem Radius $p = n + m$ nicht geschnitten wird.

Wird demnach die Neunziger-Sehne in zwei gleiche Theile getheilt, so hat man vermöge der Gleichung $x = \frac{p^2}{n^2}$

$$\text{für } p = \frac{1}{2}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{„ } p = \frac{2}{2}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \frac{4}{4} = 1,$$

$$\text{„ } p = \frac{3}{2}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4},$$

$$\text{„ } p = \frac{4}{2}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \frac{16}{4},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{„ } p = \frac{m}{2}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4}.$$

Wird die Sehne in drei gleiche Theile getheilt, so ist:

$$\text{für } p = \frac{1}{3}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$$

$$\text{„ } p = \frac{2}{3}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9},$$

$$\text{„ } p = \frac{3}{3}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{3}{3}\right)^2 = \frac{9}{9} = 1,$$

$$\text{„ } p = \frac{4}{3}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9},$$

$$\text{„ } p = \frac{5}{3}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{„ } p = \frac{m}{3}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{m}{3}\right)^2 = \frac{m^2}{9}.$$

Wird die Sehne in vier gleiche Theile getheilt, so folgt:

$$\text{für } p = \frac{1}{4}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16},$$

$$\text{für } p = \frac{2}{4}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{2}{4}\right)^2 = \frac{4}{16},$$
$$\text{„ } p = \frac{3}{4}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16},$$
$$\text{„ } p = \frac{4}{4}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{4}{4}\right)^2 = \frac{16}{16} = 1,$$
$$\text{„ } p = \frac{5}{4}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{„ } p = \frac{m}{4}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{m}{4}\right)^2 = \frac{m^2}{16},$$

und allgemein, wenn die Neunziger-Sehne in n gleiche Theile getheilt wird, erhält man im Allgemeinen:

$$\text{für } p = \frac{1}{n}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2},$$
$$\text{„ } p = \frac{2}{n}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2},$$
$$\text{„ } p = \frac{3}{n}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{3}{n}\right)^2 = \frac{9}{n^2},$$
$$\text{„ } p = \frac{4}{n}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{4}{n}\right)^2 = \frac{16}{n^2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

also ganz allgemein

$$\text{für } p = \frac{m}{n}\sqrt{2},\quad x = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}.$$

Aus dieser schematischen Darstellung sieht man, dass, wenn $m = n$ ist, $x = 1$ erfolgt, für welchen Fall also x gleich dem Radius des Grundkreises ist. Daraus folgt ferner, dass man auf dem Radius des Grundkreises so viele x erhalten kann, als in wie viele Theile die Neunziger-Sehne getheilt werden soll, und dass man desto mehr x und folglich auch desto mehr Punkte des Kreises erhält, je grösser die Anzahl ist, in welche die Neunziger-Sehne getheilt wird.

Wird aber nur irgend ein Theil der Neunziger-Sehne genommen, so dass man nicht bestimmt weiss, der wie vielte Theil von dieser er ist, so kann auch dann, jedoch nur allein durch Construction, das entsprechende x gefunden werden.

§. 41.

Da nun die Neunziger-Sehne BC in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt werden kann, so folgt daraus, dass p unzählig viele Werthe annehmen kann, es kann daher unter andern

$$p = r$$
$$= 2r$$
$$= \sqrt{2}$$

u. s. w. gleich den bekannten Linien gesetzt werden; es wird also

$$\text{für } p = r = 1,\ x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} = \frac{8}{16} =$$

dem halben Radius,

$$\text{für } p = 2r = 2,\ x = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{2} = \frac{32}{16} = 2 =$$

dem doppelten Radius,

$$\text{für } p = \sqrt{2},\quad x = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2}{2} = \frac{16}{16} = 1 =$$

dem Radius,

$$\text{für } p = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ x = \frac{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 2}{2} = \frac{1}{4} =$$

dem vierten Theil des Radius,

$$\text{für } p = 2\sqrt{2},\ x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{64}{16} = 4 =$$

dem doppelten Durchmesser.

Bei den zuletzt angeführten Werthen für x muss der Ausdruck $\sqrt{2}$ beibehalten werden, weil hier den im Zähler substituirten Zahlen die Einheit des Grundkreises zu Grunde liegt.

Anmerkung. Von diesen so eben angeführten und berechneten Werthen für x werden wir einige zur Construction der Ellipse benützen.

§. 42.

Wir werden nun hier das in §. 38 angegebene Gesetz mittelst des im §. 39 und 40 entwickelten Satzes zu beweisen suchen.

Es sei also (Fig. 47) $ABCD$ das gegebene Quadrat, in welchem jede der vier Seiten halbirt, und je zwei gegenüber liegende Halbirungspunkte durch Gerade mit einander verbunden werden, deren Durchschnittspunkt bekanntlich der Mittelpunkt des diesem Quadrate einzuschreibenden Kreises ist, die Linien selbst aber Durchmesser dieses Kreises sind.

Man verlängere nun die Halbirungslinie EF über F hinaus, beschreibe mit einem beliebigen Theile der Neunziger-Sehne FG aus deren Endpunkte F einen Kreis, welcher den Grundkreis in N, dessen Durchmesser in J und die Verlängerung desselben in K schneidet.

Wird nun aus dem Durchschnittspunkte N auf EF die Normale NP gezogen, der Fusspunkt derselben mit B, der Punkt G aber mit K durch Gerade verbunden, so ist der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden, d. i. der Punkt Q, ein Punkt in der Peripherie des dem Quadrate $ABCD$ eingeschriebenen Kreises.

B e w e i s.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung ganz allgemein durchzuführen, wollen wir die höhere Analysis zu Hilfe nehmen, welche uns auf jede gegebene Frage eine auf diese passende Antwort gibt.

Nimmt man nun (Fig. 47) den Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkte des dem Quadrate $ABCD$ eingeschriebenen Kreises, also in O an, so hat man hier die Gleichungen für die zwei Geraden GK und BP aufzustellen und ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt zu bestimmen, welches sich sehr leicht bewerkstelligen lässt, indem die zwei Punkte B und G nach der in §. 38, Fig. 44 gegebenen Construction fixe Punkte sind.

Nach dem früher Bewiesenen ist das Segment der Neunziger-Sehne, d. i. $FP = \frac{p^2}{n^2}$, wo n die Anzahl Theile anzeigt, in welche die Neunziger-Sehne FG getheilt wird, und p, wie viel man solche Theile zum Radius des Hilfskreises genommmen hat.

Bekanntlich ist die allgemeine Gleichung irgend einer Geraden

$$y = ax + b \quad \ldots \ldots \quad (\alpha).$$

Da nun der Punkt G fix ist, so hat man

$$OG = r = b = 1,$$

daher

$$y = ax + b = ax + r = ax + 1 \quad \ldots \quad (\beta).$$

Nun ist aber für die Gerade GK die Abscisse

$$x = \frac{p}{n}\sqrt{2} + r = \frac{p}{n}\sqrt{2} + 1$$

nach der Construction; daher durch Substitution in (β)

$$y = a\left(\frac{p}{n}\sqrt{2} + 1\right) + 1 \quad \ldots \ldots \quad (\gamma);$$

setzt man nun $y = 0$, so ist

$$0 = a\left(\frac{p}{n}\sqrt{2} + 1\right) + 1,$$

woraus

$$a\left(\frac{p}{n}\sqrt{2}+1\right)=-1,$$

$$a=\frac{-1}{\frac{p}{n}\sqrt{2}+1}=\frac{-1}{\frac{p\sqrt{2}+n}{n}}$$

also

$$a=\frac{-n}{n+p\sqrt{2}};$$

substituirt man diesen Werth in die Gleichung (β), so hat man sofort

$$y=x\left(\frac{-n}{n+p\sqrt{2}}\right)+b=\frac{-nx}{n+p\sqrt{2}}+1,$$

daher

$$y'=\frac{-nx'}{n+p\sqrt{2}}+1 \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{I}).$$

Dies ist also die Gleichung der Geraden GK, deren Punkt G fix ist.

Um die Gleichung für die zweite Gerade, d. i. für BP zu finden, hat man abermals die allgemeine Gleichung irgend einer Geraden

$$y=ax+b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha').$$

Nun ergibt sich aus der näheren Betrachtung der Construction, dass im Allgemeinen für $y=r$, auch $x=r$ erfolgt; man hat daher durch Substitution in α'

$$r=ar+b=ar+1 \quad \ldots \quad (\beta');$$

es ist aber für den Punkt P der Geraden BP nach der Construction die entsprechende Abscisse

$$x=r-\frac{p^2}{n^2}=1-\frac{p^2}{n^2},$$

welcher Werth für x in α' substituirt, gibt.

$$y=a\left(r-\frac{p^2}{n^2}\right)+b=a\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)+1 \quad \ldots \quad (\gamma').$$

Setzt man nun $y=o$, so folgt

$$O=a\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)+1.$$

Wird ferner von dieser Gleichung die Gleichung (β') abgezogen, so erhält man $O-r= \; a\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)+1-(ar+1)$

$$-r= \; a\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)+1-ar-1$$

$$-r= \; a\left(1-\frac{p^2}{n^2}\right)-ar,$$

und wenn $r=1$ gesetzt wird,

folgt sofort $$-1 = a\left(1 - \frac{p^2}{n^2}\right) - a$$

und $$-1 = a - \frac{ap^2}{n^2} - a = -\frac{ap}{n^2},$$

also $$1 = \frac{ap^2}{n^2},$$

woraus man

$$n^2 = ap^2, \quad \text{folglich} \quad a = \frac{n^2}{p^2} \text{ erhält;}$$

welcher Werth für a in die Gleichung (β') substituirt, gibt ferner

$$r = \frac{n^2}{p^2} r + b,$$

hieraus

$$b = r - \frac{n^2}{p^2} r = 1 - \frac{n^2}{p^2}$$

und durch Substitution dieses Werthes in (γ') folgt

$$y = \frac{n^2}{p^2} x + 1 - \frac{n^2}{p^2};$$

folglich ist

$$y' = \frac{n^2 x'}{p^2} - \frac{n^2}{p^2} + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

als die Gleichung der zweiten Geraden, d. i. der BP, deren fixer Punkt B ist.

Um nun den Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden zu bestimmen, muss man aus diesen zwei gefundenen Gleichungen für diese Geraden das x' und y' suchen. Zu diesem Behufe zieht man die eine Gleichung von der andern ab, hier II von I, und hat somit:

$$y' - y' = \left(\frac{-nx'}{n + p\sqrt{2}} + 1\right) - \left(\frac{n^2 x'}{p^2} - \frac{n^2}{p^2} + 1\right),$$

also $$o = \frac{-nx'}{n + p\sqrt{2}} + 1 - \frac{n^2 x'}{p^2} + \frac{n^2}{p^2} - 1,$$

daher $$o = -\frac{nx'}{n + p\sqrt{2}} - \frac{n^2 x'}{p^2} + \frac{n^2}{p^2},$$

hieraus $$\frac{n^2}{p^2} = x'\left(\frac{n}{n + p\sqrt{2}} - \frac{n^2}{p^2}\right) = x'\left(\frac{np^2 - n^2(n + p\sqrt{2})}{p^2(n + p\sqrt{2})}\right),$$

somit $$x' = \frac{n^2}{p^2} : \frac{np^2 - n^2(n + p\sqrt{2})}{p^2(n + p\sqrt{2})},$$

folglich $$x' = \frac{n^2}{p^2} \cdot \frac{p^2(n + p\sqrt{2})}{np^2 - n^2(n + p\sqrt{2})},$$

welcher Bruch gehörig abgekürzt

$$x' = \frac{n(n + p\sqrt{2})}{n(n + p\sqrt{2}) + p^2}$$

gibt.

Folglich ist, gehörig bezeichnet, die gesuchte Abscisse

$$x'' = \frac{n\,(n + p\sqrt{2})}{n\,(n + p\sqrt{2}) + p^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(III)},$$

welcher Ausdruck allgemein, also für jeden beliebigen Punkt gilt.

Um den Werth der entsprechenden Ordinate zu finden, hat man den zuletzt gefundenen Werth für x' in die Gleichung (II) zu substituiren, und erhält somit:

$$y'' = \frac{n^2}{p^2} \cdot \frac{n\,(n + p\sqrt{2})}{n\,(n + p\sqrt{2}) + p^2} - \frac{n^2}{p^2} + 1$$

$$y'' = \frac{n^3\,(n + p\sqrt{2})}{p^2\,\{n\,(n + p\sqrt{2}) + p^2\}} - \frac{n^2}{p^2} + 1,$$

welcher Ausdruck auf gleiche Benennung gebracht, gibt sofort:

$$y'' = \frac{n^3\,(n+p\sqrt{2}) - n^2\,\{n\,(n+p\sqrt{2})+p^2\} + p^2\,\{n\,(n+p\sqrt{2})+p^2\}}{p^2\,\{n\,(n+p\sqrt{2})+p^2\}}$$

$$y'' = \frac{n^4 + n^3 p\sqrt{2} - n^4 - n^3 p\sqrt{2} - n^2 p^2 + n^2 p^2 + n p^3 \sqrt{2} + p^4}{p^2\,\{n\,(n+p\sqrt{2}) + p^2\}}$$

$$y'' = \frac{n p^3 \sqrt{2} + p^4}{p^2\,(n^2 + np\sqrt{2} + p^2)} = \frac{p^2\,(np\sqrt{2} + p^2)}{p^2\,(n^2 + np\sqrt{2} + p^2)},$$

$$y'' = \frac{np\sqrt{2} + p^2}{n^2 + np\sqrt{2} + p^2} = \frac{p\,(n\sqrt{2} + p)}{n\,(n+p\sqrt{2}) + p^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(IV)}.$$

Somit ist dies der Werth der entsprechenden Ordinate, welcher allgemein also für jeden beliebigen Punkt gilt, und zwar aus dem Grunde, weil auch auf der Neunziger-Sehne ein beliebiger Punkt angenommen wurde.

Es sind daher:

$$x'' = \frac{n\,(n + p\sqrt{2})}{n\,(n + p\sqrt{2}) + p^2} = \frac{n^2 + np\sqrt{2}}{n^2 + p^2 + np\sqrt{2}} \quad . \; . \quad \text{(III)}$$

$$y'' = \frac{p\,(p + n\sqrt{2})}{n\,(n + p\sqrt{2}) + p^2} = \frac{p^2 + np\sqrt{2}}{n^2 + p^2 + np\sqrt{2}} \quad . \; . \quad \text{(IV)}$$

die zwei Gleichungen, welche zur Bestimmung des Durchschnittspunktes der zwei fraglichen Geraden erforderlich sind.

Lassen wir also diese zwei Gleichungen coëxistiren, so muss, wenn der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden BP und GK in der Peripherie des aus O mit OF beschriebenen Kreises erfolgen soll,

$$(x'')^2 + (y'')^2 = r^2 = 1 \text{ sein.}$$

Substituirt man hier für x'' und y'' die in III und IV gefundenen Werthe, so muss auch dann

$$\left\{\frac{n\,(n + p\sqrt{2})}{n\,(n + p\sqrt{2}) + p^2}\right\}^2 + \left\{\frac{p\,(p + n\sqrt{2})}{n\,(n + p\sqrt{2}) + p^2}\right\}^2 = r^2 = 1$$

erfolgen.

Werden die zwei vor dem Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke quadrirt, wie dies angezeigt ist, so erhält man, indem beide Ausdrücke gleiche Nenner haben:

$$\left\{\frac{n\,(n+p\sqrt{2})}{n\,(n+p\sqrt{2})+p^2}\right\}^2 + \left\{\frac{p\,(p+n\sqrt{2})}{n\,(n+p\sqrt{2})+p^2}\right\}^2 = \frac{[n(n+p\sqrt{2})]^2+[p(p+n\sqrt{2})]^2}{[n\,(n+p\sqrt{2})+p^2]^2}$$

$$= \frac{n^2\,(n^2+2np\sqrt{2} + 2p^2) + p^2(p^2+2np\sqrt{2}+2n^2)}{[n\,(n+p\sqrt{2})+p^2]^2},$$

oder wenn im letzten Theile des Zählers mit p^2 hinein multiplicirt wird

$$= \frac{n^2\,(n^2+2np\sqrt{2} + 2p^2) + p^4+2np^3\sqrt{2}+2n^2p^2}{[n\,(n+p\sqrt{2})+p^2]^2}.$$

Hebt man bei den letzten zwei Ausdrücken im Zähler $2n\,p^2$ als Factor heraus, so hat man sofort

$$= \frac{n^2\,(n^2+2np\sqrt{2}+2p)^2 + 2np^2\,(n+p\sqrt{2}) + p^4}{[n\,(n+p\sqrt{2})+p^2]^2};$$

und da $n^2 + 2n\,p\sqrt{2} + 2\,p^2 = (n + p\sqrt{2})^2$ ist, so übergeht der obige Ausdruck in

$$= \frac{n^2\,(n+p\sqrt{2})^2 + 2np^2\,(n+p\sqrt{2}) + p^4}{[n\,(n+p\sqrt{2})+p^2]^2};$$

vergleicht man in diesem Bruche den Zähler mit dem Nenner, so sieht man sogleich, dass sie einander gleich sind, denn $n\,(n + p\sqrt{2}) + p^2$ aufs Quadrat erhoben, gibt den Zähler. Da also

$$[n\,(n+p\sqrt{2})+p^2]^2 = n^2\,(n+p\sqrt{2})^2 + 2np^2\,(n + p\sqrt{2}) + p^4$$

gesetzt werden kann, so ist auch

$$\frac{[n\,(n + p\sqrt{2}) + p^2]^2}{[n\,(n + p\sqrt{2}) + p^2]^2} = r^2 = 1.$$

Es ist daher der Durchschnittspunkt Q, dessen Abscisse

$$x'' = \frac{n\,(n + p\sqrt{2})}{n\,(n + p\sqrt{2}) + p^2}$$

und dessen Ordinate

$$y'' = \frac{p\,(p + n\sqrt{2}\,)}{n\,(n + p\sqrt{2}\,) + p^2} \text{ gefunden wurde,}$$

ein Punkt des Kreises w. z. b. w.

Was nun von diesem Punkte gilt, das lässt sich auch von jedem andern, welcher auf ähnliche Weise construirt wird, auf dieselbe Art erweisen.

§. 43.

Da man den $\frac{1}{n}$ ten Theil der Neunziger-Sehne auf der Verlängerung des Durchmessers EF über F hinaus, ins Unendliche auftragen kann; da ferner auch auf der entgegengesetzten Seite des Punktes F auf dem Durchmesser, wie auch auf dessen Verlängerung ebenfalls so viele Punkte vermittelst des Auftragens des diesem Theile entsprechenden Segmentes $= \frac{1}{n^2}$ bestimmt werden können, so folgt daraus, dass die angegebene Construction der Punkte der Kreislinie ebenfalls ins Unendliche fortgesetzt werden kann, und zwar müssen für jeden correspondirenden Quadranten die Hilfslinien insbesondere gezogen werden, während die auf dem Durchmesser EF und auf dessen beiderseitigen Verlängerungen bereits bestimmten Punkte auch für die correspondirenden Quadranten ungeändert bleiben.

Denkt man sich nun unzählig viele Paare von solchen Linien nach dem aufgestellten Gesetze gezogen, deren jedes ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt in der Peripherie des Grundkreises hat, so wird das letzte Paar offenbar in eine Linie zusammenfallen, und zwar werden beide Linien auf die Seite AB zu liegen kommen, mithin den Punkt G gemeinschaftlich haben.

Ob dabei die Linie $GK\infty$ in die Lage BG käme, wäre wohl gleichgiltig, weil in derselben der fragliche Punkt G ohnehin liegt, indem $GK\infty$ eine Stellung der Linie GF oder GK nach der Drehung um den Punkt G ist; und da dieser Punkt mit einem in unendlicher Entfernung in der Richtung der Verlängerung des Durchmessers EG gedachten Punkte durch eine Gerade verbunden werden soll, so muss das Stück BG als ein Theil solcher Linie, also auch als ein Theil der aus dem Punkte G zu EF gezogenen Parallelen, mithin $GK\,\infty$ als die Verlängerung der GB angesehen werden. Nun wird aber B mit einem Punkte verbunden, welcher in einer viel weiteren Entfernung gedacht wird, nämlich in der Entfernung $\infty \times \infty = \infty^2$, also muss $BF\infty^2$ um so mehr mit EF parallel sein, daher mit AB zusammenfallen, und folglich den Punkt G in sich enthalten.

Es muss also die Gerade $GK\infty^2$ mit $BF\infty$ den Halbirungspunkt G der Seite AB geben.

§. 44.

Werden die Linien $B1$, $B4$, $B9$, $B16$, $B25$ u. s. w. (Fig. 44) so weit verlängert, bis die dem Punkte G gegenüberliegende Seite CD wie auch deren Verlängerung geschnitten ist, so wird auch diese, da $MF \parallel CD$ ist, so eingetheilt, dass ihre Theile der Ordnung nach sich wie die ungeraden Zahlen, und die hierdurch erhaltenen Abscissen, vom Punkte C aus gerechnet, wie die Quadrate der natürlichen Zahlen verhalten, deren Linear-Einheit das erste Segment der Seite CD, d. i. $C1$, ist.

Wir erhalten somit folgende Verhältnisse:

$$\text{I.)}\ C1 : 1.\,4 : 4.\,9 : 9.\,16 = 1 : 3 : 5 : 7$$
$$\text{II.)}\ C1 : C4 : C9 : C\,10 = 1^2 : 2^2 : 3^2 : 4^2,$$

oder wenn wir der Kürze wegen den ersten Theil $C1 = a$, den zweiten $1 \cdot 4 = b$, den dritten $4 \cdot 9 = c$ u. s. w. setzen, und die letzte entsprechende Zahl mit $2n + 1$ bezeichnen, so erhalten wir für (I) folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$a : b : c : d : \ldots x : y : z = 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : \ldots : \{2\,(n-2) + 1\} : \{2\,(n-1) + 1\} : (2n+1)$$

oder

$$a : b : c : d : \ldots x : y : z = 1 : 3 : 5 : 7 : 9 : \ldots\ldots (2n-5) : (2n-3) : (2n-1) : (2n+1).$$

Werden ferner auch die Abscissen der Kürze wegen mit x', x'', x''' und die letzte Zahl mit n bezeichnet, so erhält man für (II) im Allgemeinen:

$$x' : x'' : x''' : x'''' : \ldots\ldots x^{z-2} : x^{z-1}\ x^z = 1^2 : 2^2 : 3^2 : 4^2 : \ldots (n-2)^2 : (n-1)^2 : n^2.$$

Es ist also gleichgiltig, ob man den Radius oder die zu demselben parallele Seite des Quadrates eintheilt, um die diesen Reihen entsprechenden Linien für Segmente und Abscissen, und hierdurch auch die Punkte I', II', III' u. s. w. des Kreises zu erhalten, was aus der Ähnlichkeit der Dreiecke BDC und BMF u. s. w. folgt.

Wird übrigens die Seite *CD* benützt, so wird das Stück *C*1 doppelt so gross sein, als das Segment *F*1 auf dem Radius *MF*, weil $MF = \frac{1}{2} CD$ oder $2MF = CD$ ist.

Dasselbe gilt auch in Bezug auf die Verlängerung des Durchmessers und der besagten Seite.

Auf ähnliche Art könnte man die Punkte I″, II″, III″ u. s. w. erhalten, wenn man nur die Seite *CD*, jedoch beiderseits verlängert, wobei, wie aus der Construction ersichtlich ist, $mn = np = pq$ und doppelt so gross als $F1 = 1.2 = 2.3$ u. s. w. sein müssen.

Wird also die Sehne in 4 gleiche Theile getheilt, so müssen auf *Cq* zwei solche Theile als Einheit von *m* aus aufgetragen werden; wird sie in 5 gleiche Theile getheilt, so müssen ebenfalls 2 solche Theile auf *mq* aufgetragen werden, und allgemein; wird die Sehne *FG* in *n* gleiche Theile getheilt, so müssen $\frac{2}{n}$ von solchen Theilen auf *mq* aufgetragen werden, während man den Halbmesser *MF* oder die Seite *CD* in n^2 gleiche Theile theilt.

§. 45.

Ehe wir die Anwendung dieser Construction auf die Construction der Ellipse zeigen, wollen wir zuerst einige daraus abgeleitete Sätze angeben.

I. Wird in einem Quadrate, aus dessen einer Ecke mit dem Radius gleich dessen Seite ein Viertelkreis beschrieben, über die zweite nächstanliegende Ecke die eine Seite hinaus verlängert; diese Verlängerung mittelst einer aus der dritten Ecke durch den Diagonalpunkt gezogenen Geraden abgeschnitten, in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, die Theilungspunkte mit der dritten Ecke so verbunden, dass der aus der ersten Ecke beschriebene Viertelkreis geschnitten wird, und aus der vierten Ecke durch die Durchschnittspunkte dieses Bogens bis zu der verlängerten Seite Gerade geführt, so verhalten sich die so erhaltenen Stücke der verlängerten Seite wie die ungeraden Zahlen, und die hierdurch bestimmten Abscissen wie die Quadrate der natürlichen Zahlen, deren erste Zahl 1 die letzte aber die zweite Potenz derjenigen Zahl ist, welche die Anzahl Theile der abgeschnittenen und eingetheilten Verlängerungen anzeigt.

Ist also (Fig. 48) *AD* der aus *C* mit *CD* beschriebene Viertelbogen, *Dp* die Verlängerung, $Dm = mn = np$, und *m*, *n*, *p* mit

A verbunden, die Ba, Bb, Bc als die aus B durch die Durchschnittspunkte m', n', p' gezogenen Geraden, so verhalten sich die hierdurch auf der Seite CD abgeschnittenen Theile gerade so, wie die auf einander folgenden ungeraden Zahlen, daher:

$$a : b : c = 1 : 3 : 5$$

und die Abscissen, wie die Quadrate der natürlichen Zahlen, also:

$$x : x' : x'' = 1^2 : 2^2 : 3^2 = 1 : 4 : 9.$$

Dasselbe findet ebenfalls Statt, wenn die abgeschnittene Verlängerung in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt wird.

Man kann daher nach diesem Verfahren jede beliebige Gerade in eine beliebige Anzahl Theile theilen, die sich so zu einander verhalten, wie die ungeraden Zahlen, und die Abscissen dieser Geraden, wie die Quadrate der natürlichen Zahlen.

Der Beweis wird hierbei so geführt, wie für die Fig. 44, wesshalb noch die Neunziger-Sehne und die Ordinaten für die Punkte m', n', p' gezogen werden müssen.

§. 46.

Wird über der Hypotenuse AC (Fig. 49) eines rechtwinkeligen Dreieckes ABC ein Kreis beschrieben, in diesem der Durchmesser $EF \perp$ auf die Hypotenuse AC gezogen, die Tangente GC gleich der halben Hypotenuse, und die Verlängerung derselben gleich der dieser Verlängerung anliegenden Kathete gemacht, sodann aus B eine Ordinate gezogen, so schneiden sich die 3 gezogenen Linien EJ, HG, FK wie auch die Kreislinie in einem einzigen Punkte.

Dieser Satz ist, wie in §. 28 nachgewiesen wurde, allgemein giltig, nur mit dem Unterschiede, dass dort die Linie FK nicht in Betracht gezogen wurde; da aber im §. 1 und 2 bewiesen wurde, dass, wenn mit einem beliebigen Radius aus C ein Bogen so beschrieben wird, dass die in C errichtete Senkrechte und die Verlängerung des Durchmessers AC geschnitten wird, die zwei Geraden EJ und FK sich in einem Punkte der Peripherie schneiden, und in dem allgemeinen Beweise §. 28 nachgewiesen wurde, dass HK und EJ sich ebenfalls in einem Punkte der Peripherie des Kreises schneiden, so müssen sich alle 3 Geraden, EJ, FK, HG und auch die Kreislinie in einem einzigen Punkte schneiden.

§. 47.

Dies Verfahren, wie wir es bei der Construction der Fig. 44 gesehen haben, mittelst der Eintheilung einer Seite die Punkte des

Kreises zu finden, dient ebenfalls zur Construction der Ellipse, indem die Punkte, mittelst welchen die Hilfslinien gezogen, und wodurch die Punkte der Ellipse aufgefunden werden, immer in der Drehungsaxe, somit fix bleiben, wenn man sich die Ellipse durch die Drehung eines Kreises um dessen Durchmesser entstanden denkt, wie bereits bei der ersten Construction der Ellipse erklärt wurde.

Soll nun irgend eine Ellipse construirt werden, so muss man zuerst die Neunziger-Sehne in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilen; am bequemsten und leichtesten ist es dieselbe in 2, 4, 8, 16, 32 .... gleiche Theile zu theilen, weil diese Eintheilung, wie Fig. 50 *(a)* zeigt, ohne Hilfe eines Zirkels also blos mittelst der Reissschiene und des 45° Dreieckes sehr schnell ausgeführt werden kann, und zwar auf folgende Art:

Ist $AC = BC$, und $\sphericalangle ACB = R$, also AB die Neunziger-Sehne, so führe man

$$\begin{array}{lll} Cm \perp AB & \text{und} & m\,\mathrm{I} \perp AC \\ \mathrm{I}\,2 \perp AB & ,, & 2\,\mathrm{II} \perp AC \\ \mathrm{II}\,3 \perp AB & ,, & 3\,\mathrm{III} \perp AC \\ \mathrm{III}\,4 \perp AB & ,, & 4\,\mathrm{IV} \perp AC, \end{array}$$

wodurch $A4 = \frac{1}{16} AB = \frac{1}{4^2} AB$

und $A\,\mathrm{IV} = \frac{1}{16} AC = \frac{1}{4^2} AC$ erhalten wird.

Auf diese Art kann man sowohl die Sehne als auch den Halbmesser nicht nur in 4, sondern auch in 8, 16, 32, 64 ...., d. i. in jede beliebige Potenz von 2 ohne Zirkel eintheilen; allein die Eintheilung der Neunziger-Sehne so wie des Halbmessers in 4 oder 16 gleiche Theile ist für den besagten Zweck hinreichend.

Des Zusammenhanges wegen wird die Construction der Ellipse auch nach dieser Art in den nächstfolgenden §§. angereiht.

§. 48.

Construction der Ellipse mittelst der Eintheilung der Neunziger-Sehne und der einen Seite des den Axen entsprechend umschriebenen Rechteckes oder Parallelogrammes.

a) Wenn die beiden Axen gegeben sind und die Ellipse durch die Drehung des über der grossen Axe beschriebenen Kreises entstanden gedacht wird.

Es sei (Fig. 50) AB die grosse und CD die kleine Axe und $EFGH$ das diesen Axen entsprechend umschriebene Rechteck der zu zeichnenden Ellipse. Man verlängere die grosse und auch die kleine Axe so, dass man auf der kleinen von O aus das Stück $OJ = OB$ abschneiden kann, und verbinde den Punkt J mit B, so ist die Gerade JB die Neunziger-Sehne desjenigen Kreises, durch dessen Drehung die in das gegebene Rechteck einzuzeichnende Ellipse entstanden gedacht wird.

Man theile also die Gerade JB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (hier des kleinen Mafsstabes wegen in 2), trage dann einen solchen Theil von B aus auf der Verlängerung der grossen Axe so oftmal auf, als in wie viele Theile die JB getheilt wurde, und verbinde die so erhaltenen Punkte mit dem Endpunkte C der kleinen Axe.

Nun theile man die grosse Halbaxe BO oder die Seite GH in n^2 mal so viele gleiche Theile, als in wie viele die Neunziger-Sehne JB getheilt wurde, also in $2^2 = 4$ gleiche Theile, und verbinde die zwei Quadratpunkte 1 und 4 der Seite GH mit dem Endpunkte F durch Gerade, so gibt der Durchschnittspunkt der Geraden $F4$ mit CII' den Ellipsenpunkt N. Ebenso ist der Durchschnittspunkt P der Geraden $F1$ mit CI' ein Ellipsenpunkt.

Dieselben Punkte der Ellipse wird man erhalten, wenn man, wie bereits nachgewiesen wurde, statt GH die halbe Grossaxe OB in die entsprechend gleiche Anzahl Theile theilt.

b) Wenn die beiden conjugirten Durchmesser ihrer Grösse und Richtung nach gegeben sind, und wenn die zu zeichnende Ellipse durch die Drehung des über dem grösseren conjugirten Durchmesser beschriebenen Kreises entstanden gedacht wird.

Es sei nun (Fig. 51) AB der grössere und CD der kleinere conjugirte Durchmesser, und $EFGH$ das diesen Durchmessern entsprechend umschriebene Parallelogramm der zu zeichenden Ellipse.

Man verlängere den grösseren conjugirten Durchmesser AB über B hinaus, errichte in dem Halbirungspunkte O der AB eine Senkrechte, schneide auf dieser von O aus das Stück $OJ = OB$ und ziehe JB, welche, wie bereits gesagt, die entsprechende Neunziger-Sehne des betreffenden Kreises ist. Man theile alsdann die JB in eine beliebige Anzahl gleicher Theile (hier in 3), trage dann einen solchen Theil auf der Verlängerung der AB von B aus so oftmal auf, als in wie viele gleiche Theile die JB getheilt wurde, und verbinde jeden so auf der Verlängerung von AB erhaltenen Punkt mit dem Endpunkte C des kleinen conjugirten Durchmessers. Wird endlich die Seite HG in n^2 mal so viele gleiche Theile getheilt, als in wie viele die JB

getheilt wurde (hier in $3^2 = 9$ gleiche Theile), und jeder Quadratpunkt der Seite GH mit dem Eckpunkte F durch Gerade verbunden, so sind die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den früher gezogenen, die Punkte der zu zeichnenden Ellipse; hier sind M, N, P die verlangten drei Punkte der Ellipse. Die diesen drei Punkten correspondirenden Punkte werden auf bereits besagte Art gefunden.

c) Wenn die beiden Axen gegeben sind und die Ellipse durch die Drehung des über der kleinen Axe beschriebenen Kreises entstanden gedacht wird.

Es sei (Fig. 52) AB die kleine und CD die grosse Axe, und $EFGH$ das diesen Axen entsprechend umschriebene Rechteck der zu zeichnenden Ellipse.

Man verlängere die kleine Axe AB über B hinaus, mache $OC' = OB$, so ist, wenn B mit C' verbunden wird, die Gerade BC' die entsprechende Neunziger-Sehne. Man theile also die BC' in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, trage einen solchen Theil auf der Verlängerung der AB so oft auf, als in wie viele die BC' getheilt wurde; nun theile man die kleinere Seite GH in die entsprechende Potenz gleicher Theile, und verfahre im Übrigen, wie vorhin bei Fig. 50 und 51 gezeigt wurde.

d) Wenn die beiden conjugirten Durchmesser gegeben sind, und die Ellipse durch die Drehung des über dem kleinen conjugirten Durchmesser beschriebenen Kreises entstanden gedacht wird.

Es sei (Fig. 53) AB der kleinere, CD der grössere conjugirte Durchmesser, und $EFGH$ das diesen beiden Durchmessern entsprechend umschriebene Parallelogramm.

Man verlängere den kleineren conjugirten Durchmesser, errichte in dessen Halbirungspunkte O eine Senkrechte und mache sie gleich OB, verbinde C' mit B, so ist BC' die entsprechende Neunziger-Sehne; nun wird die BC' in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, ein solcher Theil auf der Verlängerung der AB aufgetragen, ferner auch die GH in die entsprechende Potenz getheilt und im Übrigen wie bereits gemeldet wurde verfahren.

§. 49.

Wie man aus dem Beweise für die Richtigkeit der Construction des Kreises in Fig. 44 und aus diesen vier Constructionen der Ellipsen sieht, ist der letzte Punkt der Ellipse bei jeder beliebigen Eintheilung der Neunziger-Sehne in der Diagonale desjenigen Rechteckes oder Parallelogrammes, in welchem die Ellipse eingeschrieben werden soll.

So ist in allen vier letzten Figuren der letzte Punkt für den Ellipsenquadranten *BC* in der Diagonale *FH*, welches schon in den ersten §§. dieser Abhandlung bewiesen wurde.

Wollte man aber für denselben Ellipsenquadranten noch mehrere Punkte, welche über dem Diagonalpunkte hinaus liegen, auffinden, so müsste man auf der Verlängerung der Drehungsaxe die betreffende Einheit der entsprechenden Neunziger-Sehne so oftmal auftragen, als wie viele weitere Punkte der Ellipse gesucht werden sollen; es müssten aber auch ebenso viele Quadratpunkte auf der Verlängerung der Axe gesucht, und die entsprechenden Punkte mit *C* und *F* verbunden werden. Hierbei ist nur noch das zu bemerken, dass man einige weitere Quadratpunkte mittelst der schon aufgefundenen erhalten kann. So findet man z. B. den Quadratpunkt 81 (Fig. 52), indem man *BO* von *B* aus auf $B\,\infty$ neunmal aufträgt, wesshalb auch *B*3 auf *Bu* dreimal aufgetragen werden muss, um den zweiten Hilfspunkt zu erhalten.

Was nun den Beweis für die Richtigkeit der Construction dieser Punkte betrifft, so ist er sehr leicht in jedem der vier angeführten Fälle durch die Drehung des betreffenden Grundkreises abzuleiten, was übrigens aus den früheren Beweisen ohnehin klar ist.

Was aber die Anwendung und Brauchbarkeit dieser Construction betrifft, so haben die ersten zwei, welche in Fig. 50 und 51 angeführt wurden, immer den Vorzug, weil man hierdurch diejenigen Punkte der Ellipse, von denen die Wendung dieser Curve am meisten abhängt, sehr leicht und zwar deutlich bestimmt, und keine grosse Verlängerung der Axe braucht. In den letzten zwei Fällen hingegen werden nur die mittleren Punkte deutlich, die ersteren und letzteren aber werden je undeutlicher, je weiter man sich dem Punkte *B* oder *C* nähert.

Wir haben also des Zusammenhanges wegen diese Methode angeführt, und gehen sogleich zu einer andern über, bei welcher man gar keine Eintheilung zu machen braucht.

§. 50.

Construction der Ellipse mittelst der Fusspunkte der Ordinaten und der diesen Ordinaten entsprechenden und in die Verlängerung der Drehungsaxe umgelegten Sehnen.

a) Wenn die beiden Axen gegeben sind, und wenn die grosse Axe verlängert werden soll.

Es sei (Taf. VIII, Fig. 54) *AB* die grosse und *CD* die kleine Axe, ferner *EFGH* das den zwei gegebenen Axen entsprechend umschriebene Rechteck der zu zeichnenden Ellipse.

Man beschreibe aus dem Mittelpunkte *O* mit *BO* einen Hilfsbogen *Bu*, nehme auf demselben einen beliebigen Punkt an (hier den Punkt *J*), beschreibe dann aus *B* mit *BJ* einen Bogen, bis die Verlängerung der grossen Axe *AB* in *K* geschnitten wird; fälle von dem auf dem Hilfsbogen *Bu* angenommenen Punkte *J* eine Normale auf *AB*, und verbinde den Fusspunkt *L* dieser Normalen mit *F* und *G* durch Gerade; wird endlich der Punkt *K* mit *C* und *D* verbunden, so erhält man die zwei Durchschnittspunkte *M* und *N*, welche die verlangten Ellipsenpunkte sind.

Die zwei correspondirenden Punkte werden auf bekannte Art gefunden.

b) Wenn die beiden conjugirten Durchmesser gegeben sind, und der grössere verlängert werden soll.

Es sei (Fig. 55) *AB* der grössere und *CD* der kleinere conjugirte Durchmesser, ferner *EFGH* das diesen Axen entsprechend umschriebene Parallelogramm. Soll nun nach dieser Bedingung eine Ellipse construirt werden, so beschreibe man über dem grösseren conjugirten Durchmesser mit dem Radius gleich dem halben diesem Durchmesser einen Bogen *Bu*, nehme in demselben einen beliebigen Punkt an, fälle auf *AB* eine Ordinate *JL*, mache *BK*=*BJ* und verfahre im Übrigen wie im vorhergehenden Falle.

c) Wenn die beiden Axen gegeben sind, und wenn die kleine verlängert werden soll.

Sind *AB* und *CD* (Fig. 56) die beiden Axen, und soll nur die kleine Axe verlängert werden, wenn die Ellipse construirt wird, so nehme man die kleine Axe als den Durchmesser, zugleich aber auch als Drehungsaxe desjenigen Kreises an, durch dessen Umdrehung die zu zeichnende Ellipse entstanden gedacht wird; beschreibe über der kleinen Axe einen Halbkreis oder nur einen Bogen, nehme auf demselben einen beliebigen Punkt an, ziehe die Ordinate, z. B. *JL* und verfahre im Übrigen wie in einem der zwei vorhergehenden Fälle.

d) Wenn die beiden conjugirten Durchmesser gegeben sind, und wenn nur der kleinere verlängert werden soll.

Auch in diesem Falle wird man den kleinen Durchmesser als den Durchmesser desjenigen Kreises annehmen, durch dessen

Drehung die zu zeichnende Ellipse entstanden gedacht wird. Im Übrigen wird das Verfahren ganz ähnlich mit den vorhergehenden Fällen, welches aus der Fig. 57 deutlich zu ersehen ist.

e) Construction der Ellipse nach dieser Art in der Perspective.

Wenn wir alle diese vier Fälle näher ins Auge fassen und bedenken, dass die gezogenen Ordinaten in jedem Halbkreise bis zum Mittelpunkte zunehmen, und dann wieder abnehmen, so dass z. B. in Fig. 56 die Ordinate im Endpunkte A gleich O wird, so ergibt sich daraus Folgendes: Da im Punkte A die Ordinate O ist, so wird die diesem Punkte entsprechende Sehne gleich dem Durchmesser AB sein; der entfernteste Punkt von B auf der Verlängerung der Axe AB wird der Punkt P sein; und wenn P mit C, und A mit F durch Gerade verbunden wird, so ist Q derjenige Punkt, welcher auf die besagte Art als der letzte für den Ellipsenquadranten BC gefunden wird.

Wie man einen Diagonalpunkt bestimmt, ist ohnehin bekannt, und man hätte dann im Ganzen zwölf Punkte für die zu zeichnende Ellipse, welche in manchen Fällen hinreichend wären. Allein in den Fällen, wenn die Zeichnung in grösserem Mafsstabe ausgeführt wird, handelt es sich noch insbesondere um die nahe an den Endpunkten der Drehungsaxe EF (Fig. 54) herumliegenden Punkte dieser Curve, in welchem Falle zwischen dem Diagonalpunkte und dem Berührungspunkte dieser Linie, wenigstens noch ein Punkt gesucht werden muss; wesshalb auch eine Ordinate gezogen, oder wenigstens deren Peripheriepunkt so wie der Fusspunkt bestimmt werden muss.

Sollte also (Fig. 58) in dem perspectivischen Quadrate $ABCD$ eine Ellipse eingeschrieben werden, so zeichne man aus dem Mittelpunkte M mit dem Radius MF einen Bogen Fu, nehme auf demselben irgend einen Punkt J an, fälle die Ordinate JK, mache $FL=FJ$, verbinde den so erhaltenen Punkt L mit den Punkten G und F, und den Punkt K mit B und C, so sind die hierdurch entstandenen Durchschnittspunkte I und I' Ellipsenpunkte.

Die Diagonalpunkte II und II' werden auf die bekannte Art erhalten, nämlich indem man aus F mit der entsprechenden Neunziger-Sehne die Verlängerung der EF einschneidet; die Punkte III und III' werden mittelst des Punktes E' erhalten, indem man die Verlängerung der EF mit EF aus F in E' schneidet und im Übrigen wie bekannt verfährt.

Auf diese Art erhält man für die zu zeichnende Ellipse im Ganzen 16 Punkte.

§. 51.

Construction der Ellipse ohne Hilfskreis und ohne Ordinaten.

Es soll (Fig. 59) in dem perspectivischen Quadrate $ABCD$ eine Ellipse eingeschrieben werden.

Man ziehe in diesem die beiden Diagonalen AC und BD, (welche wir hier die Hauptdiagonalen nennen wollen), ferner die EB und HB (welche zum Unterschiede Nebendiagonalen heissen sollen), und führe durch J zu EF eine Parallele bis EA in L geschnitten ist, wodurch EA in L perspectivisch halbirt wird; ebenso halbirt man die HC in N, indem man aus Ω durch den Halbirungspunkt K eine Gerade führt; auch dieser Punkt wird mit B verbunden.

Nach dieser kleinen Vorarbeit wird aus F die Fm unter einem Winkel von 45° gegen EF gezogen, in E eine Senkrechte errichtet bis die Fm in m geschnitten wird, ferner aus E und M die Ep und Ms normal auf Fm geführt. Wird nun aus F mit dem Radius $= Fm$ die Verlängerung der Axe EF in m' geschnitten, so ist, wenn man m' mit G verbindet, der Punkt I in LB ein Ellipsenpunkt. Was die übrigen Punkte betrifft, so ist der Punkt II im Durchschnitte der Geraden $n'G$ mit der Nebendiagonale EB; der Punkt III liegt in der Hauptdiagonale; der Punkt IV liegt in der Nebendiagonale BH und in der Geraden Gq'; der Punkt V liegt in der Geraden BN und in der Gs'; somit sind ohne Hilfskreis und ohne Ordinaten für den Ellipsenquadranten FG fünf Punkte gefunden worden. Da also wie bekannt, die unterhalb der Axe mit diesen Punkten correspondirenden Punkte mittelst der Punkte m', n', p', q', s' und der entsprechenden Diagonalen sehr leicht gefunden werden, so haben wir für die halbe Ellipse 10, somit für die Ganze 20, und mit Einschluss der vier gegebenen Punkte im Ganzen 24 Punkte der Ellipse, welches wohl für die meisten Fälle hinreichend ist.

Diese Construction ist nicht nur wegen ihrer Einfachheit, sondern auch desshalb empfehlbar, weil man sie sehr leicht merken kann, sobald man weiss, wie die fünf fixen Punkte in der Verlängerung des als Drehungsaxe angenommenen Durchmessers, d. i. die Punkte m', n', p', q', s' auf Ey bestimmt werden.

Es wird nämlich der erste Punkt s' aus F mit der halben Neunziger Sehne bestimmt; der zweite, d. i. q' mit dem Radius gleich der grossen Halbaxe oder gleich dem grösseren halben conjugirten Durchmesser; der dritte, d. i. p' mit der ganzen Sehne; der vierte, d. i. n' mit dem doppelten Radius, und der fünfte, d. i. m' mit der doppelten Sehne bestimmt. Der erste dieser Punkte entspricht der Geraden LB, der zweite der EB, der dritte der BD, der vierte der BH, und der fünfte der Ceraden BN aus den bereits angeführten Gründen.

Werden zur Construction der Ellipse nur 12 Punkte erfordert, so kann man entweder so verfahren, dass man zwei fixe Punkte auf der Axe mit der ganzen und halben Neunziger-Sehne, wie Fig. 58 *(a)*, oder mit der ganzen und halben Axe, wie Fig. 58 *(b)* zeigt, bestimmt. Letzteres Verfahren ist höchst einfach. Hierbei braucht man nur noch das zu merken, dass im ersten Falle die Diagonale des ganzen und Viertel-Rechteckes, im zweiten Falle aber die Diagonalen der halben Rechtecke von dem der Ellipse umschriebenen Rechtecke als Hilfslinien gezogen werden.

§. 52.

Nähere Untersuchung der in §. 42 Fig. 47, angegebenen Construction der Punkte einer Kreislinie.

Obgleich nach der in den vorhergehenden §§. angegebenen Construction der Ellipse der Übelstand vermieden wird, dass man keine Eintheilung zu machen braucht, so könnte uns doch mancher praktische Zeichner hinsichtlich des Raumes, den man zur Verlängerung der Axe benöthiget, einen Vorwurf machen. Um nun auch diesen Übelstand zu heben, wollen wir nochmals die im §. 42, Fig. 47 angegebene Construction in Betracht ziehen, und hierbei die analytische Geometrie nochmals zu Hilfe nehmen. Wir werden also untersuchen, ob es nicht möglich wäre mit Benützung eines kleineren Raumes ohne die Axe zu verlängern nach dieser Art beliebig viele Punkte der Kreislinie zu finden. Betrachten wir nochmals die Fig. 47, Taf. VII, so finden wir, dass aus dem Punkte F mit dem Radius gleich FN der Durchmesser EF in J, und dessen Verlängerung in K geschnitten wird.

Da also nach der früheren Erklärung $FN = \frac{p}{n}\sqrt{2}$, aber $FK = JF = FN$ ist, so kann man für jede dieser drei Linien den Werth $\frac{p}{n}\sqrt{2}$ setzen; es wird daher auf der Verlängerung der Geraden BP auch ein zweiter Punkt des Kreises möglich sein. Um daher auch einen zweiten Punkt zu finden, verfahre man folgendermassen:

Es sei (Taf. IX, Fig. 60) $AB = CD$ und senkrecht auf einander in ihrem Halbirungspunkte, aus welchem Punkte auch der Viertelkreis BC beschrieben ist; man errichte im Endpunkte B eine Senkrechte, mache deren Stück $BE = OC = OB$, nehme auf dem Bogen BC irgend einen Punkt an, hier N, fälle von diesem eine Ordinate NP und beschreibe aus B mit BN einen Kreis, so ist hierdurch der Durchmesser AB in G und dessen Verlängerung in F geschnitten. Wird nun aus E durch den Fusspunkt der Ordinate eine Gerade geführt, sodann C mit F und G verbunden, und die CG so weit verlängert, dass die aus E durch den Punkt P gezogene Gerade bei S geschnitten wird, so ist sowohl der Durchschnittspunkt Q als auch S Punkte in der Peripherie des aus O mit $OB = OC$ beschriebenen Kreises, wovon wir uns sogleich überzeugen werden. Die Richtigkeit des Punktes Q ist bereits nachgewiesen worden; wir wollen nun hier auch die des zweiten, d. i. des Punktes S durch die analytische Geometrie nachweisen.

Zum Behufe dessen wollen wir diejenige Gleichung, welche für die aus dem Eckpunkte durch den Fusspunkt der Nomalen geführte Gerade aufgestellt wurde, benützen, indem der fragliche Punkt in der Verlängerung dieser Geraden liegen soll.

Die in §. 42 gefundene Gleichung der Geraden BP, hier der ES ist:

$$y' = \frac{n^2}{p^2} x - \frac{n^2}{p^2} + 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (II).$$

Um nun die Gleichung für die Gerade CGS aufzufinden, hat man $OB - BG = x$; und da $OB = r$, und $BG = BN = \frac{p}{n}\sqrt{2}$, also $x = r - \frac{p}{n}\sqrt{2}$ ist, so folgt durch Substitution in die allgemeine Gleichung einer Geraden

$$y = a\left(r - \frac{p}{n}\sqrt{2}\right) + b,$$

und da $r = b = 1$ ist nach der Construction, so hat man sofort:

$$y = a\left(1 - \frac{p}{n}\sqrt{2}\right) + 1\,;$$

setzt man nun $y = o$, so ist

$$o = a\left(1 - \frac{p}{n}\sqrt{2}\right) + 1$$

und

$$-1 = a\left(1 - \frac{p}{n}\sqrt{2}\right),$$

daher

$$a = \frac{-1}{1 - \frac{p}{n}\sqrt{2}} = \frac{-1}{\frac{n - p\sqrt{2}}{n}} = \frac{-n}{n - p\sqrt{2}}$$

folglich

$$a = \frac{-n}{n - p\sqrt{2}}.$$

Diesen Werth für a in die allgemeine Gleichung einer Geraden substituirt, gibt:

$$y = \frac{-nx}{n - p\sqrt{2}} + 1.$$

Da nun nach der Construction das Stück $BE = b$ für jeden beliebigen Punkt constant bleibt und $= r = 1$ ist, so folgt allgemein

$$y' = \frac{-nx'}{n - p\sqrt{2}} + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II}').$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der früher gefundenen Gleichung (I) so sieht man, dass sie mit jener, das Zeichen im Nenner ausgenommen, vollkommen übereinstimmt.

Um nun das betreffende x und y zu finden, werden wir diese zwei Gleichungen, d. i. die früher gefundene Gleichung (II) und die hier aufgestellte (II′) von einander abziehen.

Man erhält also:

$$y' - y' = \left(\frac{n^2}{p^2}x' - \frac{n^2}{p^2} + 1\right) - \left(\frac{-nx'}{n - p\sqrt{2}} + 1\right),$$

folglich $$o = \frac{n^2}{p^2}x' - \frac{n^2}{p^2} + 1 + \frac{nx'}{n - p\sqrt{2}} - 1,$$

und $$o = \frac{n^2}{p^2}x' - \frac{n^2}{p^2} + \frac{nx'}{n - p\sqrt{2}},$$

somit $$\frac{n^2}{p^2} = \frac{n^2}{p^2}x' + \frac{nx'}{n - p\sqrt{2}};$$

hebt man in diesem Ausdrucke x' als Factor heraus, so folgt:

$$\frac{n^2}{p^2} = \left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{n}{n - p\sqrt{2}}\right)x',$$

woraus

$$x' = \frac{n^2}{p^2} : \left(\frac{n^2}{p^2} + \frac{n}{n - p\sqrt{2}}\right),$$

also $$x' = \frac{n^2}{p^2} : \frac{n^2(n - p\sqrt{2}) + np^2}{p^2(n - p\sqrt{2})},$$

und $$x' = \frac{n^2}{p^2} : \frac{p^2(n - p\sqrt{2})}{n^2(n - p\sqrt{2}) + np^2}.$$

Zähler und Nenner mit np^2 dividirt, gibt sofort:

$$x' = \frac{n(n-p\sqrt{2})}{n(n+p\sqrt{2})+p^2},$$

also gehörig bezeichnet, ist

$$x'' = \frac{n(n-p\sqrt{2})}{n(n+p\sqrt{2})+p^2} = \frac{n^2-np\sqrt{2}}{n^2-np\sqrt{2}+p^2}.$$

Substituirt man diesen Werth für x in die Gleichung (II'), so hat man:

$$y'' = \frac{-n}{n-p\sqrt{2}} \cdot \frac{n(n-p\sqrt{2})}{n^2+p^2-np\sqrt{2}} + 1,$$

somit $$y'' = \frac{-n^2}{n^2+p^2-np\sqrt{2}} + 1,$$

und $$y'' = \frac{-n^2+n^2+p^2-np\sqrt{2}}{n^2+p^2-np\sqrt{2}},$$

also ist, gehörig abgekürzt

$$y'' = \frac{p^2-np\sqrt{2}}{n^2+p^2-np\sqrt{2}}.$$

Es ist also für den Punkt S die Abscisse

$$x'' = \frac{n^2-np\sqrt{2}}{n^2+p^2-np\sqrt{2}}$$

und die Ordinate

$$y'' = \frac{p^2-np\sqrt{2}}{n^2+p^2-np\sqrt{2}}.$$

Lassen wir nun diese zwei Gleichungen coëxistiren, so muss, wenn der Punkt S in der Peripherie des Kreises liegen soll

$$(x'')^2 + (y'')^2 = r^2 = 1$$

sein, und daher auch, wenn für x'' und y'' die gefundenen Werthe substituirt werden

$$\left(\frac{n^2-np\sqrt{2}}{n^2+p^2-np\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{p^2-np\sqrt{2}}{n^2+p^2-np\sqrt{2}}\right)^2 = r^2 = 1$$

erfolgen; da nun in den beiden Ausdrücken die Nenner einander gleich sind, so übergeht der obige Ausdruck in

$$\frac{(n^2-np\sqrt{2})^2 + (p^2-np\sqrt{2})^2}{(n^2+p^2-np\sqrt{2})^2} = 1.$$

Quadrirt man also diese Ausdrücke wirklich, so erhält man:

$$\frac{n^4 - 2n^3p\sqrt{2} - 2np^3\sqrt{2} + 4n^2p^2}{n^4 - 2n^3p\sqrt{2} - 2np^3\sqrt{2} + 4n^2p^2} = 1,$$

und da Zähler und Nenner einander gleich sind, so folgt

$$1 = 1;$$

es liegt daher der Punkt S in der Peripherie des aus O mit OB beschriebenen, folglich desjenigen Kreises, in dessen Peripherie auch der Punkt Q liegt; w. z. b. w.

Man erhält also stets zwei Punkte in der Peripherie, wenn man aus dem Punkte B (Fig. 61) mit dem Radius $= \frac{p}{n}\sqrt{2}$ einen Halbkreis so beschreibt, dass sowohl der Grundkreis, als auch dessen Durchmesser und die Verlängerung desselben geschnitten wird u. s. w.

§. 53.

Es kann wohl sehr leicht die Frage entstehen, warum wir gerade die Neunziger-Sehne eingetheilt, und sowohl die Construction als auch die Rechnung darauf basirt haben; welche Frage so zu sagen gewisser Massen sich von selbst aufdringt. Denn, kann man die Neunziger-Sehne eintheilen, warum denn nicht auch eine andere Sehne, warum nicht den Halbmesser?

Die Antwort darauf wird die sein, dass man dieselbe Operation mit jeder andern Sehne, wie auch mit dem Halbmesser vornehmen kann; und es wird jedesmal die Construction des Kreises auf die angegebene Art möglich sein, obgleich die auf dem als Abscissenaxe angenommenen Durchmesser erhaltenen Segmente für jede andere Linie ein anderes Gesetz befolgen. Da aber vermittelst der Eintheilung der Neunziger-Sehne das interessanteste Gesetz für die Segmente des Durchmessers erfolgt, ferner die Eintheilung dieser Sehne in der Praxis einen gewissen Vortheil gewährt, so haben wir diese Linie allen andern vorgezogen.

Um also auch der obigen Frage zu genügen, wollen wir auch den Halbmesser theilen, und mittelst dieser Theile die Construction nach der angegebenen Art vornehmen. Es sei zu diesem Behufe Fig. 62[a] der Halbmesser BC des gegebenen Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, sodann aus B mit dem Halbmesser gleich einem solchen Theile der Hilfskreis $FGJL$ beschrieben, welcher den gegebenen Kreis in G, den Halbmesser BC in F

und dessen Verlängerung in J scheidet; wird nun aus dem Punkte G auf AB eine Normale gezogen, sodann aus E durch den Fusspunkt dieser Normalen eine Gerade geführt, ferner der Punkt J mit D durch eine Gerade verbunden, und aus D durch F ebenfalls eine Gerade geführt, bis die aus E durch den Fusspunkt der Normalen geführte Gerade geschnitten wird, so sind K und L Punkte des gegebenen Kreises.

Verbinden wir den Durchschnittspunkt G mit den Punkten $A, F, B, J,$ so entstehen, wie zuvor, zwei rechtwinkelige Dreiecke AGB und $FGJ,$ aus welchen folgende zwei Proportionen sich ergeben:

$$BH : GH = GH : AH \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

$$FH : GH = GH : HJ \quad \ldots \ldots \quad (II),$$

da nun
$$AH = AB - BH$$
und
$$HI = BH + BJ$$
ist, so hat man durch Substitution dieser Werthe

$$BH : GH = GH : AB - BH \quad \ldots \quad (1')$$

und
$$FH : GH = GH : BH + BJ \quad \ldots \quad (II').$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$GH = h,\ BH = x,\ FH = y,$$

ferner
$$BF = BJ = x + y = \frac{1}{4}\,BC = \frac{1}{n}\,r, \text{ so ist,}$$
wenn
$$r = 1 \text{ gesetzt wird,}$$

$$x + y = \frac{1}{n} \text{ und } AH = 2 - x;$$

daher durch Substitution in die obigen Proportionen

$$x : h = h : (2 - x) \quad \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

$$y : h = h : \left(x + \frac{1}{n}\right) \quad \ldots \ldots \quad (\beta),$$

somit hat man aus (α)
$$h^2 = x\,(2 - x)$$
und aus (β)
$$h^2 = y\left(x + \frac{1}{n}\right);$$
daher
$$x\,(2 - x) = y\left(x + \frac{1}{n}\right) \quad \ldots \ldots \quad (\gamma).$$
Da nun
$$x + y = \frac{1}{n} \text{ gesetzt wird,}$$
so ist
$$y = \frac{1}{n} - x,$$
also
$$x\,(2 - x) = \left(\frac{1}{n} - x\right)\left(\frac{1}{n} + x\right) \quad \ldots \quad (\gamma'),$$
somit
$$2\,x - x^2 = \frac{1}{n^2} - x^2$$

und $$2\,x = \frac{1}{n^2},$$

folglich $$x = \frac{1}{2n^2}.$$

Wird ferner für $x + y$ nach und nach $\frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n} \ldots$ substituirt, so erhält man jedesmal aus den zwei aufgestellten Proportionen oder unmittelbar aus der Gleichung (γ') die entsprechenden Werthe für x.

Wird also im Allgemeinen der Halbmesser des Grundkreises in n gleiche Theile getheilt, und p solche Theile für den Halbmesser des Hilfskreises genommen, so ist dann

$$x + y = \frac{p}{n};$$

daher $$y = \frac{p}{n} - x,$$

also nach (γ) $$x\,(2 - x) = \left(\frac{p}{n} - x\right)\left(\frac{p}{n} + x\right),$$

somit $$2\,x - x^2 = \frac{p^2}{n^2} - x^2,$$

und $$2\,x = \frac{p^2}{n^2};$$

folglich ist $$x = \frac{p^2}{2n^2}$$ als eine allgemeine Gleichung für die Segmente.

Lösen wir diese Gleichung in eine Proportion auf, so haben wir:

$$2\,x : p = p : n^2,$$

d. h. in Worten ausgedrückt: Der Halbmesser des Hilfskreises ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem doppelten Segmente und dem Quadrate der Anzahl Theile, in welche der Halbmesser des Grundkreises getheilt wird.

Werden mittelst dieser Gleichung die Segmente für die Eintheilung des Halbmessers in $2, 3, 4 \ldots (n-1), n$ gleiche Theile berechnet, so erhält man Brüche, deren Zähler die Quadrate der natürlichen Zahlen sind, deren Nenner aber eine Reihe der zweiten Ordnung bilden, nämlich:

$$2 \cdot 2^2,\ 2 \cdot 3^2,\ 2 \cdot 4^2,\ 2 \cdot 5^2,\ 2 \cdot 6^2,\ 2 \cdot 7^2,\ 2 \cdot 8^2, \ldots$$

oder

$$8,\quad 18,\quad 32,\quad 50,\quad 72,\quad 98,\quad 128 \ldots$$

deren constante Differenz die Zahl 4 ist.

Für die Eintheilung der Sehne von $120^0 = \sqrt{3}$, wird $x = \frac{3p^2}{2 \cdot n^2}$, und die mittelst dieser Gleichung berechneten Segmente geben Brüche, deren Zähler eine Reihe der zweiten Ordnung ist, nämlich:

3, 12, 27, 48, 55, 88 . . . . .

mit der constanten Differenz 6. Für die Eintheilung der Sehne von $45^0 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, ist $x = \frac{p^2}{n^2} - \frac{p^2}{2n^2}\sqrt{2}$.

Das interessanteste Gesetz ist also nur jenes mittelst der Eintheilung der Neunziger-Sehne, welches wir bereits angegeben haben.

Wird daher was immer für eine Linie, in wie viel immer gleiche Theile getheilt und eine beliebige Anzahl gleicher Theile zum Halbmesser des Hilfskreises genommen, so hat man, wenn dieser mit ρ bezeichnet wird, aus den zwei rechtwinkeligen Dreiecken *AGB* und *FGJ*

$$x\,(2 - x) = (\rho - x)\,(\rho + x),$$

woraus

$$x = \frac{\rho^2}{2}$$

die allgemeinste Gleichung für die Segmente folgt.

§. 54.

Es frägt sich nun jetzt, ob man mittelst dieser allgemeinen Gleichungen für die Segmente nach dem früheren Verfahren die Punkte des Kreises bestimmen kann. Wir wollen dies untersuchen, und zwar der ganzen Allgemeinheit wegen durch die höhere Analysis.

Beweis.

Da hier die Voraussetzung in Betreff der fixen Punkte dieselbe ist, und daher die zwei Punkte *D* und *E* für jedes Paar von Linien, mittelst deren die Kreispunkte bestimmt werden, ungeändert bleiben, so haben wir auch hier für jede der zwei Geraden eine Gleichung aufzustellen und sodann den Durchschnittspunkt dieser Geraden zu bestimmen.

Ist also der Ursprung der Coordinaten im Mittelpunkte des Grundkreises, und die allgemeine Gleichung irgend einer Geraden $y = a\,x + b$, so haben wir nach unserer Construction für die Gerade *DJ*

$$b = r = 1$$

daher

$$y = a\,x + 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a),$$

da ferner nach der Construction für dieselbe Gerade das Stück

CJ die Abscisse und

$$CJ = BC + BJ = 1 + \rho,$$

also $x = 1 + \rho$ ist,

so hat man sofort $y = a\,(1 + \rho) + 1$;

setzt man nun $y = o$,

so hat man $o = a\,(1 + \rho) + 1$

$$-1 = a\,(1 + \rho),$$

also $a = \frac{-1}{1+\rho}$ und daher durch Substitution in . (α)

$$y' = \frac{-x}{1+\rho} + 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(I)}$$

als die Gleichung der Geraden DJ, deren fixer Punkt D ist.

Um die Gleichung für die zweite Gerade aufzufinden, hat man abermals

$$y = a\,x + b,$$

und da nach der Construction $y = r$ ist, so hat man

$$r = a\,r + b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\alpha').$$

Da ferner für die Gerade EH das Stück CH die Abscisse, und

$CH = BC - BH = 1 - \frac{\rho^2}{2}$,

also $x = \frac{2 - \rho^2}{2}$ ist,

so folgt durch Substitution in die allgemeine Gleichung einer Geraden

$$y = a\left(\frac{2-\rho^2}{2}\right) + b;$$

setzt man nun auch hier $y = o$, so hat man ferner

$$o = a\left(\frac{2-\rho^2}{2}\right) + b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\beta');$$

zieht man von dieser Gleichung die früher gefundene Gleichung (α') ab, so erhält man

$$o - r = a\left(\frac{2-\rho^2}{2}\right) + b - ar - b,$$

also $-r = a\left(\frac{2-\rho^2}{2}\right) - ar,$

und $r = 1$ gesetzt,

ist ferner $-1 = a\left(\frac{2-\rho^2}{2}\right) - a,$

somit $-1 = a\left(\frac{2-\rho^2}{2} - 1\right) = a\left(\frac{2-\rho^2-2}{2}\right) = -\,a\,\rho^2$

folglich
$$a = \frac{2}{\rho^2};$$
substituirt man diesen Werth für a in die mit (α') bezeichnete Gleichung, so erhält man
$$r = \frac{2}{\rho^2} r + b,$$
und für
$$r = 1$$
folgt
$$1 = \frac{2}{\rho^2} + b,$$
woraus
$$b = 1 - \frac{2}{\rho^2} \text{ folgt;}$$
werden endlich die für a und b gefundenen Werthe in die allgemeine Gleichung einer Geraden substituirt, so erhält man
$$y' = \frac{2}{\rho^2} x + 1 - \frac{2}{\rho^2} \quad \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$
als die Gleichung der Geraden EH, deren fixer Punkt E ist.

Um nun den Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden zu bestimmen, muss man aus den für sie gefundenen Gleichungen das x'' und y'' suchen. Ziehen wir zu diesem Behufe diese zwei Gleichungen von einander ab, so erhalten wir
$$y' - y' = \frac{2}{\rho^2} x' + 1 - \frac{2}{\rho^2} + \frac{x'}{1+\rho} - 1 = \text{(II — I)},$$
daher
$$o = \frac{2\,x'}{\rho^2} + \frac{x'}{\rho+1} - \frac{2}{\rho^2},$$
somit
$$o = x'\left(\frac{2}{\rho^2} + \frac{1}{\rho+1}\right) - \frac{2}{\rho^2};$$
folglich
$$\frac{2}{\rho^2} = x' \frac{2(\rho+1)+\rho^2}{\rho^2(\rho+1)},$$
woraus
$$x' = \frac{2}{\rho^2} : \frac{2(\rho+1)+\rho^2}{\rho^2(\rho+1)},$$
daher
$$x' = \frac{2}{\rho^2} \cdot \frac{\rho^2(\rho+1)}{2(\rho+1)+\rho^2} = \frac{2(\rho+1)}{2(\rho+1)+\rho^2};$$
es ist also
$$x'' = \frac{2(\rho+1)}{\rho^2+2\rho+2}$$
als der allgemeine Ausdruck für die Abscisse.

Substituiren wir diesen Werth für x' in die Gleichung (II), so folgt
$$y'' = \frac{2}{\rho^2} \cdot \frac{2(\rho+1)}{\rho^2+2\rho+2} - \frac{2}{\rho^2} + 1$$
$$y'' = \frac{4(\rho+1)}{\rho^2(\rho^2+2\rho+2)} - \frac{2}{\rho^2} + 1$$

$$y'' = \frac{4\rho^2(\rho+1) - 2\rho^2(\rho^2+2\rho+2) + \rho^4(\rho^2+2\rho+2)}{\rho^4(\rho^2+2\rho+2)}$$

$$y'' = \frac{4\rho^2 + 4\rho^3 - 2\rho^4 - 4\rho^3 - 4\rho^2 + \rho^6 + 2\rho^5 + 2\rho^4}{\rho^4(\rho^2+2\rho+2)},$$

welcher Ausdruck im Zähler gehörig reducirt, gibt ferner

$$y'' = \frac{\rho^6 + 2\rho^5}{\rho^4(\rho^2+2\rho+2)} = \frac{\rho^4(\rho^2+2\rho)}{\rho^4(\rho^2+2\rho+2)} = \frac{\rho^2+2\rho}{\rho^2+2\rho+2};$$

folglich ist

$$y'' = \frac{\rho(\rho+2)}{\rho^2+2\rho+2}$$ als der allgemeine Ausdruck für die Ordinate.

Lassen wir die zwei Gleichungen

$$x'' = \frac{2(\rho+1)}{\rho^2+2\rho+2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

und

$$y'' = \frac{\rho(\rho+2)}{\rho^2+2\rho+2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

coëxistiren, so muss, wenn der Durchschnittspunkt der zwei Geraden DJ und EH in der Peripherie des Grundkreises erfolgen soll,

$$(x'')^2 + (y'')^2 = r^2 = 1$$

sein, somit auch die dafür substituirten Werthe

$$\left\{\frac{2(\rho+1)}{\rho^2+2\rho+2}\right\}^2 + \left\{\frac{\rho(\rho+2)}{\rho^2+2\rho+2}\right\}^2 = r^2 = 1$$

erfolgen.

Quadrirt man diesen Ausdruck auch wirklich, so folgt sofort

$$\left\{\frac{2(\rho+1)}{\rho^2+2\rho+2}\right\}^2 + \left\{\frac{\rho^2(\rho+2)}{\rho^2+2\rho+2}\right\}^2 = \frac{4(\rho^2+2\rho+1) + \rho^2(\rho^2+4\rho+4)}{(\rho^2+2\rho+2)^2}$$

$$= \frac{4\rho^2 + 8\rho + 4 + \rho^4 + 4\rho^3 + 4\rho^2}{(\rho^2+2\rho+2)^2}$$

$$= \frac{\rho^4 + 4\rho^3 + 8\rho^2 + 8\rho + 4}{\rho^4 + 4\rho^3 + 8\rho^2 + 8\rho + 4} = 1;$$

also ist wirklich der Durchschnittspunkt K in der Peripherie des mit BC beschriebenen Kreises.

Es bleibt uns noch zu untersuchen übrig, ob der Punkt L ebenfalls in der Peripherie desselben Kreises liegt.

Um dies zu erweisen, brauchen wir nur noch eine Gleichung für die durch den Punkt F geführte Gerade DL aufzustellen, indem die Gleichung für die Gerade EL ungeändert bleibt.

Ist also $y = ax + b$ die Gleichung einer Geraden, und die Abscisse für die Gerade DL, das Stück

$$CF = BC - BF = r - \rho = 1 - \rho,$$

also $x = 1 - \rho,$

ferner $\quad b = r = 1,$

so hat man $\quad y = a\,(1 - \rho) + b = a\,(1 - \rho) + 1;$

setzt man $\quad y = o,$

so folgt $\quad o = a\,(1 - \rho) + 1,$

also $\quad -1 = a\,(1 - \rho),$

folglich $\quad a = \dfrac{-1}{1-\rho} = \dfrac{1}{\rho-1};$

substituirt man diesen Werth für a in die allgemeine Gleichung einer Geraden, so erhält man

$$y' = \frac{x}{\rho-1} + b = \frac{x}{\rho-1} + 1 \quad \dots\dots\dots \quad (\mathrm{I}')$$

als die Gleichung der Geraden DL, deren fixer Punkt D ist.

Um nun den Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden zu bestimmen, müssen wir aus der Gleichung (I′) und der früher gefundenen Gleichung (II) das x'' und y'' suchen.

Ziehen wir zu diesem Behufe diese zwei Gleichungen von einander ab, so folgt

$$y' - y' = \left(\frac{2\,x'}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} + 1\right) - \left(\frac{x'}{\rho-1} + 1\right) = (\mathrm{II}) - (\mathrm{I}')$$

$$o = \frac{2\,x'}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} + 1 - \frac{x'}{\rho-1} - 1$$

$$o = \frac{2\,x'}{\rho^2} - \frac{x'}{\rho-1} - \frac{2}{\rho^2}$$

$$\frac{2}{\rho^2} = x'\left(\frac{2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho-1}\right),$$

woraus $\quad x' = \dfrac{2}{\rho^2} : \dfrac{2\,(\rho - 1) - \rho^2}{\rho^2\,(\rho - 1)}$

$$x' = \frac{2}{\rho^2} \cdot \frac{\rho^2\,(\rho - 1)}{2\,(\rho - 1) - \rho^2} = \frac{(2\,\rho - 1)}{2\,(\rho - 1) - \rho^2}$$

$$x' = \frac{(2\,\rho - 1)}{-\rho^2 + 2\,\rho - 1} = \frac{-2\,(\rho - 1)}{\rho^2 - 2\,\rho + 1}$$

folgt; also gehörig bezeichnet, ist die gesuchte Abscisse

$$x'' = \frac{-2\,(\rho - 1)}{\rho^2 - 2\,\rho + 1} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (\mathrm{III}').$$

Substituirt man diesen Werth für x' in die Gleichung (II), so hat man

$$y'' = \frac{2}{\rho^2} \cdot \frac{-2\,(\rho - 1)}{\rho^2 - 2\,\rho + 1} - \frac{2}{\rho^2} + 1$$

$$y'' = \frac{-4\,(\rho - 1)}{\rho^2\,(\rho^2 - 2\,\rho + 1)} - \frac{2}{\rho^2} + 1$$

$$y'' = \frac{-(4\rho - 1) - 2(\rho^2 - 2\rho + 2) + \rho^2(\rho^2 - 2\rho + 2)}{\rho^2(\rho^2 - 2\rho + 2)}$$

$$y'' = \frac{-4\rho + 4 - 2\rho^2 + 4\rho - 4 + \rho^4 - 2\rho^3 + 2\rho^2}{\rho^2(\rho^2 - 2\rho + 2)}$$

$$y'' = \frac{\rho^4 - 2\rho^3}{\rho^2(\rho^2 - 2\rho + 2)} = \frac{\rho^2 - 2\rho}{\rho^2 - 2\rho + 2};$$

also ist die gesuchte Ordinate $y'' = \dfrac{\rho(\rho - 2)}{\rho^2 - 2\rho + 2}$ . . . . . . (IV′).

Soll nun der Punkt L in der Peripherie des Kreises liegen, so muss $(x'')^2 + (y'')^2 = r^2 = 1$ sein, somit auch die dafür substituirten Werthe

$$\left\{\frac{-2(\rho - 1)}{\rho^2 - 2\rho + 1}\right\}^2 + \left\{\frac{\rho(\rho - 2)}{\rho^2 - 2\rho + 2}\right\}^2 = r^2 = 1$$

erfolgen.

Werden diese Ausdrücke auch wirklich quadrirt, so folgt sofort

$$\left\{\frac{-2(\rho - 1)}{\rho^2 - 2\rho + 2}\right\}^2 + \left\{\frac{\rho(\rho - 2)}{\rho^2 - 2\rho + 2}\right\}^2 = \frac{4(\rho - 1)^2 + \rho^2(\rho - 2)^2}{(\rho^2 - 2\rho + 2)^2}$$

$$= \frac{4(\rho^2 - 2\rho + 1) + \rho^2(\rho^2 - 4\rho + 4)}{(\rho^2 - 2\rho + 2)^2}$$

$$= \frac{4\rho^2 - 8\rho + 4 + \rho^4 - 4\rho^3 + 4\rho^2}{(\rho^2 - 2\rho + 2)^2}$$

$$= \frac{\rho^4 - 4\rho^3 + 8\rho^2 - 8\rho + 4}{\rho^4 - 4\rho^3 + 8\rho^2 - 8\rho + 4} = 1;$$

es ist daher auch der zweite Durchschnittspunkt, d. i. der Punkt L in der Peripherie des Kreises.

Wird $\rho = \frac{p}{n} r = \frac{p}{n}$ gesetzt, also das betreffende Segment $x = \frac{p^2}{2n^2}$, so erhält man folgende Gleichungen:

für die Gerade DJ $y' = \dfrac{-n x'}{n + p} + 1$ . . . . (I),

„ „ „ EL $y' = \dfrac{2n^2 x'}{p^2} - \dfrac{2n^2}{p^2} + 1$ . . . . (II),

„ „ „ DL $y' = \dfrac{-n x'}{n - p} + 1$. . . . . (I),

und als Bedingungsgleichungen für die Durchschnittspunkte dieser Geraden

$$x'' = \frac{2n(n + p)}{2n(n + p) + p^2} \quad \text{. . . . . (III),}$$

und

$$y'' = \frac{2np + p^2}{n(n + p) + p^2} \quad \text{. . . . . (IV),}$$

oder

$$x_{,}'' = \frac{2n(n-p)}{2n(n-p)+p^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{III}')$$

$$y_{,}'' = \frac{-2np+p^2}{2n(n-p)+p^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{IV}'),$$

daher im Allgemeinen

$$x_{,,}'' = \frac{2n(n\pm p)}{2n(n\pm p)+p^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{III}'')$$

$$y_{,,}'' = \frac{\pm 2np+p^2}{2n(n\pm p)+p^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{VI}'').$$

Daraus ergibt sich also, dass es gleichgiltig ist, mit welchem Radius man den Hilfskreis beschreibt, um die Hilfspunkte in der Axe zu erhalten. Der Unterschied besteht nur darin, dass die mittelst der gezogenen Normalen erhaltenen Segmente ein verschiedenes Gesetz befolgen, je nachdem man diese oder jene Linie eintheilt.

§. 55.

Aus dem Vorhergehenden lässt sich folgender Lehrsatz ableiten:

Wird in einem Kreise durch den Fusspunkt einer Ordinate aus der einen Ecke des diesem Kreise umschriebenen Quadrates eine Gerade gezogen, und aus dem dieser Ecke zunächst anliegenden Halbirungspunkte der Seite dieses Quadrates zwei Gerade so geführt, dass die auf dem Durchmesser und dessen Verlängerung erhaltenen Durchschnittspunkte von dem zweiten derselben Ecke zunächst anliegenden Halbirungspunkte so weit abstehen, als der Peripheriepunkt der Ordinate von dem letzteren Halbirungspunkte, so liegen die zwei Durchschnittspunkte der drei Geraden in der Peripherie des Kreises, oder wenn wir nur den Durchschnittspunkt des Durchmessers berücksichtigen, so hat man folgenden Satz:

Wird in einem Kreise durch den Fusspunkt der Ordinate aus der einen Ecke des diesem Kreise umschriebenen Quadrates eine Gerade geführt, und aus dem dieser Ecke zunächst anliegenden Berührungspunkte der mit der Ordinate nicht parallelen Seite eine zweite Gerade so geführt, dass sie sich in der Peripherie des Kreises schneiden, so ist das auf der Abscissen-Axe abgeschnittene Stück gleich der dieser Ordinate entsprechenden Sehne, welche der benützten Ecke am nächsten anliegt u. s. w.

Da jeder Ordinate im Halbkreise zwei Sehnen entsprechen, so kann man bei der Bestimmung der Kreispunkte jede derselben benützen, wie dies Fig. 61 zeigt, in welchem Falle man doppelt so viele Punkte erhält, als es mit Benützung nur der einen Sehne möglich ist. Denn wird die Ordinate *JP* gezogen und aus *B* mit der Sehne *BJ* der Durchmesser *AB* in *K* und dessen Verlängerung in *L* geschnitten und auf die besagte Art verfahren, so erhält man den Punkt *I* und *II*; wird nun auch aus dem zweiten Endpunkte des Durchmessers *AB* mit der zweiten Sehne, d. i. mit *AJ* dieser Durchmesser in *M* und dessen Verlängerung in *N* geschnitten, ferner aus *E* durch den Fusspunkt *P* eine Gerade geführt, *C* mit *N* und *M* verbunden und die *CM* verlängert, so erhält man die Punkte *III* und *IV*; und wenn die so aufgefundenen fixen Punkte in der Axe, wie auch der untere Halbirungspunkt *D* und die zwei Eckpunkte *G* und *H* benützt werden, so erhält man acht Punkte, somit im Ganzen, wenn auch die parallelen Sehnen gezogen werden, 16 Punkte in der Peripherie des Kreises.

Dieser merkwürdige Satz gibt uns ein Mittel an die Hand die Ellipse in allen Fällen mit grossem Vortheile zu construiren, indem man zur Bestimmung von 8 Punkten nur einen einzigen Punkt auf dem Durchmesser oder dessen Verlängerung zu bestimmen braucht, wie wir aus den nächstfolgenden Beispielen sehen werden.

§. 56.

Bevor wir dies durch einige Beispiele erläutern, wollen wir zuerst über die Construction der Fig. 61 eine genaue Betrachtung anstellen, und sehen welche Punkte man in der Peripherie des Grundkreises erhalten kann, wenn wir uns die *BF* um den Punkt *F* gedreht denken, und *B* als den Anfangspunkt betrachten.

Offenbar wird nach dieser Construction, wie man aus Fig. 62 sieht, der eine letzte Punkt in der Peripherie der Punkt *A* sein, weil nach dem früher erklärten die Normale für *A* gleich *o* wird, und daher der oberhalb des Durchmessers *AB* in der Geraden *AF* liegende Punkt *V'* der letzte in dem Quadranten *BC* sein. Wir können daher nach dieser Construction allein keine weiteren Punkte bestimmen.

Wird aber diese Construction mit der in Fig. 44 angegebenen in Verbindung gebracht, so erhält man, wie Fig. 63 zeigt, nach den beiden Richtungen auch noch weitere Punkte auf den beiderseitigen Verlängerungen des Durchmessers *AB*, mithin auch noch weitere Punkte in der Peripherie des Kreises, so dass wenn die Gerade *EB* immer weiter und weiter gegen *C* gerückt wird, auch die hierdurch bestimmten Punkte der Peripherie näher und näher an den Punkt C kommen; wird endlich die aus E gezogene Linie parallel zu AB, so fallen beide Punkte zusammen, und zwar im Berührungspunkte C der Seite des diesem Kreise umschriebenen Quadrates, oder in dem Berührungspunkte der zu AB parallel geführten Tangente.

Es wird also die letzte Stellung der um den Punkt E gedrehten Geraden eine Tangente sein.

Man kann daher mittelst der Ordinaten die Punkte in der Peripherie des Kreises nach den beiden Richtungen nur bis zu der Linie AE erhalten; wollte man aber über diese hinaus auch noch weitere Punkte in der Peripherie erhalten, so muss man nach der in §. 38 (Fig. 44) angegebenen Construction verfahren, indem man von B aus nach den beiden Richtungen die entsprechenden Einheiten gesetzmässig aufträgt, wie dies aus Fig. 63 ersichtlich ist.

Hier wurde die Neunziger-Sehne BC in drei gleiche Theile getheilt, und ein solcher Theil auf der Axe XY von B aus beiderseits aufgetragen, sodann die diesem Theile entsprechenden Quadratpunkte vermittelst der Quadrat-Einheit B 1 des Halbmessers BO von B aus in der Richtung nach links bestimmt.

§. 57.

Wir werden mit Hilfe des im §. 55 angegebenen Satzes Construction der Ellipse vornehmen, wobei wir zwei Fälle unterscheiden wollen: *A.* wenn eine der zwei gegebenen Axen verlängert wird, und *B.* wenn gar keine verlängert werden darf.

A. Construction der Ellipse, wenn eine von den zwei Axen verlängert werden darf.

a) Construction der Ellipse, wenn die grosse Axe verlängert werden kann.

Es sei (Fig. 64) AB die grosse, CD die kleine Axe, und $EFGH$ das diesen Axen entsprechend umschriebene Rechteck. Man verlängere die grosse Axe AB über B hinaus, beschreibe über AB aus O mit dem Radius gleich OB einen Bogen Bu, nehme auf demselben einen beliebigen Punkt K an, fälle aus diesem eine Lothrechte auf die grosse Axe, welche in L geschnitten wird. Nun beschreibe man aus B mit dem Radius gleich der Entfernung BK einen Halbkreis, der die grosse Axe in M und deren Verlängerung in N schneidet. Wird endlich aus E durch den Punkt L eine Gerade geführt, sodann

C mit *M* und *N* verbunden und die *CM* so verlängert, dass die aus *E* geführte Gerade geschnitten wird, so erhält man *P* und *Q* als Ellipsenpunkte.

Führt man aus *F* ebenfalls durch *L* eine Gerade und aus *D* durch *M* und *N* zwei Geraden, so schneiden sie sich ebenfalls in zwei Punkten, d. i. in P' und Q', welche zu den früheren zwei Punkten correspondirende Punkte sind.

Zu diesen vier so gefundenen Punkten werden in der unteren Hälfte der Ellipse auch die vier correspondirenden Punkte, wie dies durch Pfeile angezeigt ist, gefunden.

b) Construction der Ellipse, wenn der grössere conjugirte Durchmesser verlängert werden kann.

Sind *AB* und *CD* (Fig. 65) die beiden conjugirten Durchmesser, und *EFGH* das diesen Axen entsprechende Parallelogramm, so verlängere man die *AB* über *B* hinaus, beschreibe aus *O* mit *OB* einen Bogen *Bu*, nehme auf demselben einen beliebigen Punkt *J* an, fälle von demselben eine Ordinate *JK*, lege die gedachte Sehne *BJ* um den Punkt *B* einmal in die Axe und dann in deren Verlängerung um, wie dies mittelst des gezogenen Halbkreises angedeutet ist, und verfahre im Übrigen wie im vorhergehenden Falle.

c) Construction der Ellipse, wenn nur die kleine Axe verlängert werden darf.

Es sei (Fig. 66) *AB* die kleine und *CD* die grosse Axe; man verlängere die kleine Axe *AB* über *B* hinaus, beschreibe über dieser Axe einen Halbkreis oder nur einen Bogen (hier den Halbkreis $AC'B$), nehme auf demselben einen beliebigen Punkt *J* an, fälle von demselben eine Normale auf *AB* und mache $LB = BM =$ der Entfernung *BJ*; wird endlich aus *F* durch den Fusspunkt *K* der Ordinate *JK* eine Gerade geführt, sodann *C* mit *M* und *L* verbunden und die *CL* bis *P* verlängert, so ist *N* der eine und *P* der zweite Punkt der Ellipse. Werden ferner die Linien *GQ*, *DQ* und *DM* gezogen, so erfolgen abermals zwei Punkte der Ellipse.

Die correspondirenden Punkte werden auf bekannte Art gesucht, wie dies aus der Figur ersichtlich ist.

d) Construction der Ellipse, wenn nur der kleinere conjugirte Durchmesser verlängert werden darf.

Es sei (Fig. 67) *AB* der kleinere, *CD* der grössere conjugirte Durchmesser, und *EFGH* das diesen Durchmessern entsprechend umschriebene Parallelogramm. Soll in diesem nur die *AB* verlängert werden, so wird auch hier so verfahren wie im vorhergehenden Falle, wie sich dies aus der Figur ersehen lässt.

Wie man aus allen diesen Fällen sieht, muss man jedesmal das den gegebenen Axen entsprechend umschriebene Rechteck oder Parallelogramm oder wenigstens dessen zwei Eckpunkte bestimmen; allein da es jedesmal besser ist in jedem der vier Endpunkte der gegebenen Axen Tangenten zu ziehen, weil dadurch sehr leicht verhütet wird, dass die Ellipse über dieselben nicht hinaustritt, so ist auch das jedesmal umschriebene Rechteck oder Parallelogramm gar nicht überflüssig; von den anderen Linien aber werden diejenigen weggelassen werden können, welche zuletzt gezogen werden sollen, weil man an den betreffenden Stellen nur einen Einschnitt zu machen braucht. Wenn man also dies streng nimmt, so brauchte man hier in jedem der vier Fälle nur zwei Hilfslinien zu ziehen, d. i. diejenigen nur, welche aus den zwei Eckpunkten durch den Fusspunkt der Ordinaten geführt werden. In der Fig. 64 sind diese *EQ* und *FQ'*; in Fig. 65 sind *FR* und *GQ*; in Fig. 66 sind *FP* und *GQ*, und in Fig. 67 sind *FR* und *GP* solche Linien, in deren jeder zwei Punkte der Ellipse liegen.

§. 58.

B. Construction der Ellipse mit Hilfe des im §. 55 angegebenen Satzes, wenn gar keine Axe verlängert werden darf.

Es soll in dem Trapeze *EFGH* (Fig. 68) als dem perspectivischen Quadrate, in welchem *AB* und *CD* als gegeben betrachtet werden können, eine Ellipse construirt werden.

Betrachtet man die früheren vier Fälle genau, so ergibt sich sogleich, dass auch hier die Construction nicht schwer ist; wird also *AB* als der Durchmesser desjenigen Kreises angenommen, durch dessen Umdrehung die einzuschreibende Ellipse entstanden gedacht wird, so ist *CD* als ein zweiter perspectivischer Durchmesser. Wird nun aus *O* mit *OB* ein Bogen beschrieben, in demselben irgend ein Punkt angenommen, von demselben eine Ordinate gefällt, die Entfernung *BJ* in die *AB* um den Punkt *B* umgelegt, sodann aus *C* und *D* durch den Punkt *L*, und aus *F* und *G* durch den Punkt *K* Gerade geführt, so sind die zwei Durchschnittspunkte dieser vier Geraden,

d. i. *M* und *N* Punkte der in das perspectivische Quadrat *EFGH* einzuzeichnenden Ellipse.

Auf ähnliche Art wird man daher in jedem Rechtecke oder Parallelogramme, ohne dass man die Axen verlängert, Ellipsenpunkte bestimmen können, wobei jedesmal nur zwei Punkte erfolgen, wenn vier Linien gezogen werden; allein auch hier können zwei weggelassen werden, indem man in den zwei aus den Eckpunkten geführten Geraden Einschnitte macht.

§. 59.

Construction der Diagonalpunkte, ohne dass irgend eine der zwei Axen verlängert werden darf.

Es sei zur Construction der Ellipse das perspectivische Quadrat *EFGH* (Fig. 69), folglich auch die *AB* und *CD* gegeben; man ziehe die beiden Diagonalen *EG*, *FH*, errichte im Mittelpunkte *O* die $JO \perp AB$, mache $JO = BO = AO$, und beschreibe mit dem Radius gleich der Entfernung *AJ* aus *A* den Bogen *JK*, und aus *B* den Bogen *JL*. Werden endlich aus *C* und *D* durch *K* und *L* vier Gerade so geführt, dass die Diagonalen geschnitten werden, so sind die dadurch erhaltenen vier Durchschnittspunkte, d. i. *M*, *N*, *P*, *Q* die verlangten Diagonalpunkte der in das perspectivische Quadrat *EFGH* einzuschreibenden Ellipse.

Wie man aus der Figur sieht, werden in jedem perspectivischen Quadrate zwei der vier Punkte viel schärfer und deutlicher erhalten als die anderen zwei; man wird sich daher an jene mehr als an diese halten müssen. Bei einem Parallelogramme werden je zwei und zwei in derselben Diagonale liegenden Punkte gleich scharf geschnitten, bei einem Rechtecke werden alle vier unter einem gleichen, mehr oder weniger deutlichen Schnitt erhalten, je nachdem die Differenz der beiden Axen mehr oder weniger gering ist. Es ist jedoch diese Methode viel einfacher als die in den ersten §§. dieser Abhandlung angegebenen, weil man hier weder den Durchmesser zu verlängern noch keine Eintheilung zu machen braucht; ja man kann sogar die drei Bögen, welche hier zur Bestimmung der zwei fixen Punkte *K* und *L* beschrieben worden sind, wie auch die vier Geraden, welche durch diese zwei Punkte aus *C* und *D* gezogen wurden, weglassen, indem man in den Diagonalen nur die Einschnitte macht.

§. 60.

Allgemeines Verfahren, beliebig viele Punkte einer Ellipse zu finden, ohne dass eine von den zwei Axen oder einer von den zwei conjugirten Durchmessern verlängert zu werden braucht.

Es sei (Taf. X, Fig. 70) AB der grössere, CD der kleinere conjugirte Durchmesser, und $EFGH$ das diesen Durchmessern entsprechend umschriebene Parallelogramm. Man beschreibe aus O mit OB den Bogen Bu, nehme auf demselben beliebig viele Punkte an, hier drei, d. i. a, b, c, fälle von jedem derselben eine Ordinate auf AB, und ziehe aus jedem der zwei Ecken F und G durch die Fusspunkte dieser Ordinaten gerade Linien. Werden nun die diesen Ordinaten entsprechenden Sehnen Ba, Bb, Bc in die AB um den Punkt B umgelegt, und aus C und D durch die auf diese Art erhaltenen Punkte m, n, p Gerade geführt, bis die ihnen entsprechenden aus den Eckpunkten gezogenen Geraden geschnitten sind, so erhält man hier die Punkte I, II, III und I′, II′, III′.

Die Richtung der letzteren sechs Linien wurde nur mittelst Pfeile bezeichnet.

Werden zu den so gefundenen sechs Punkten auch die correspondirenden Punkte gesucht, so erhält man bei Annahme von drei Punkten auf dem Hilfsbogen im Ganzen 16 Punkte für die zu zeichnende Ellipse.

Auf diese Weise kann man für jeden gegebenen Fall beliebig viele Punkte finden.

§. 61.

Construction der Polygone in den perspectivischen Ebenen.

Mit Hilfe der aufgestellten Sätze von der Construction des Kreises, kann man jedes Polygon, welches in einer verticalen, horizontalen oder in irgend einer gegen die Bildfläche schiefen Ebene, in die perspectivisch horizontale, verticale, oder in irgend eine schiefe Ebene bringen, ohne dass man sich des Distanzpunktes bedient, wie dies sogleich gezeigt werden soll.

Es sei (Fig. 71) das sternförmige Polygon $acegil$ in der verticalen Ebene gegeben; man soll dies in die perspectivisch-horizontale Ebene drehen, wenn das Auge in unendlicher Entfernung angenommen wird. Natürlicher Weise muss hier die verkürzte Linie $c'i'$ gegeben sein. Es wird also das dieser Sternfigur umschriebene Quadrat $CDEF$ nach der Drehung in ein Parallelogramm übergehen, welches alsdann $C'D'E'F'$ sein wird. Es handelt sich daher hier nur um die vier Punkte a, e, g, l, welche vermöge §. 31 (Fig. 33 u. 34) auf eine höchst einfache Art gefunden werden. Ist nämlich das Parallelogramm $C'D'E'F'$ gezeichnet, so ziehe man in diesem eine von den zwei möglichen Diagonalen (in deren Verlängerung in unendlicher Entfernung der Distanzpunkt sich befinden muss); fälle von den Punkten a und e die al und eg lothrecht auf AB, und führe durch die Punkte n und p die $a'l'$ wie auch $e'g'$ parallel zu $C'F'$. Werden endlich die ap so wie en um ihre Fusspunkte beiderseits in die Axe $p'n'$ umgelegt und durch die so erhaltenen Punkte p' und p'' zu der gezogenen Diagonale $C'E'$ Parallele geführt, bis die durch p und n parallel zu $C'F'$ gezogenen Geraden geschnitten werden, so erhält man die vier verlangten Punkte, welche hier a', e', g', l', sind. Diese mit einander, wie auch andere schon bestimmten Punkte durch Gerade verbunden, geben die verlangte Sternfigur in der Ebene $C'D'E'F'$, wie aus der Figur ersichtlich ist.

Wären nun die Wege für die drei Punkte a, c, e, d. i. die entsprechenden Ellipsen, welche während der Drehung beschrieben werden, gezeichnet, so könnte man mit Leichtigkeit jede beliebige Stellung dieses Polygons angeben.

Auf diese Art kann man jedes beliebige regelmässige wie unregelmässige Polygon in einer beliebigen Ebene darstellen.

§. 62.

Ist die Entfernung des Beobachters von der Tafel bestimmt, so müssen für einen jeden gegebenen Punkt zwei fixe Punkte in der Drehungsaxe gesucht werden, mittelst welchen man dann den gegebenen Punkt in die perspectivische Ebene bringt.

Es sei (Fig. 72) der Punkt a in der verticalen Ebene gegeben, man soll ihn in die perspectivisch-horizontale Ebene bringen.

Bekanntlich wird jeder Punkt aus der verticalen Ebene in die perspectivisch-horizontale gebracht, wenn man eine diesem Punkte entsprechende Ordinate zieht, durch deren Fusspunkt eine Linie nach dem Hauptpunkte führt u. s. w.

Allein wir wollen in dieser Aufgabe die Bedingung einführen, dass durch diesen Punkt die ihm entsprechende Ordinate nicht gezogen werden darf. Man wird daher in diesem Falle folgendermassen verfahren können: Es sei ZZ die Horizontal-Linie, vv' die Vertical-

Linie, deren Durchschnittspunkt Ω der Augepunkt, und $\triangle$ der Distanzpunkt. Man ziehe also eine beliebige Gerade mn, führe durch deren Fusspunkt p eine Linie nach dem Hauptpunkte, mache $mp = np$, und $m'p$ perspectivisch gleich $n'p = mp = np$. Wird nun m mit a verbunden und die ma bis zu der Axe xy verlängert, so ist b der eine fixe Punkt; wird ferner n mit a verbunden, so ist c der zweite fixe Punkt; da also der Punkt m' in der perspectivisch-horizontalen Ebene ist, so liegt der Punkt a in der Geraden $m'b$; aber eben aus dem Grunde liegt derselbe Punkt auch in der Verlängerung der Geraden $n'c$, folglich muss er im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden und daher in a' sein.

Sind mehrere Punkte gegeben, so können alle solche mittelst der zwei Punkte m' und n' in der verlangten Ebene entsprechend gefunden werden, ohne dass man sich weiters des Distanzpunktes bedient.

§. 63.

Construction eines regelmässigen Fünfeckes in der perspectivisch-horizontalen Ebene.

Es sei (Fig. 73) das regelmässige Fünfeck $abcde$ in der verticalen Ebene, welche zugleich parallel zur Bildfläche ist, gegeben. Dieses Fünfeck soll in derjenigen perspectivisch-horizontalen Ebene gezeichnet werden, welche durch den horizontalen Durchmesser des diesem Polygone umschriebenen Kreises normal auf die Tafel gelegt wird. Man ziehe zu diesem Behufe CO und $BD \perp AB$, verbinde die Fusspunkte dieser Senkrechten mit dem Augepunkte durch Gerade, und suche auf diesen mittelst des Distanzpunktes die dem Punkte c, C und D entsprechenden Punkte $c'C'$ und D'. Ist dies geschehen, so verbinde man den Punkt c mit a durch eine Gerade, welche die AB in a schneidet, führe dann aus D durch den Eckpunkt a dieses Fünfeckes eine Gerade bis die Axe xy in a'' geschnitten wird, und man erhält zwei fixe Punkte a' und a''; wird alsdann D' mit a'' verbunden, und aus c' durch a' eine Gerade geführt bis die $D'a''$ geschnitten wird, so ist der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden, d. i. a''' das Bild des Punktes a in der perspectivisch-horizontalen Ebene.

Wird ferner C mit b verbunden, so ist b' der eine fixe Punkt, und cb bis zu der Axe verlängert gibt den zweiten fixen Punkt b''; daher c' mit b'' verbunden, und aus C' durch b' eine Gerade geführt, gibt den gesuchten Punkt b''' ebenfalls in derselben Ebene. Die anderen zwei Punkte d' und e' werden mittelst der durch die gefundenen Punkte gezogenen Parallelen bestimmt.

Streng genommen braucht man für jeden Punkt nur eine Gerade zu ziehen, weil die zwei fixen Punkte nur mittelst des Einschneidens gefunden werden, wie bereits erklärt wurde.

§. 64.

Construction eines unregelmässigen Polygons in der perspectivisch-horizontalen Ebene.

Die Construction unregelmässiger Polygone geschieht auf eben diese Art, wie die der regelmässigen; mit dem Unterschiede, dass dabei mehr fixe Punkte bestimmt werden müssen, weil keine correspondirenden Punkte vorhanden sind, oder wenigstens ist es selten der Fall, dass es solche gibt.

Im Allgemeinen muss hierbei über der Axe ein Quadrat verzeichnet werden, wie hier (Fig. 74) das Quadrat $MNPQ$, dessen zwei Eckpunkte M und N so beschaffen sein müssen, dass man von diesen aus, durch die Polygonpunkte Gerade geführt, die Schnittpunkte in der Axe erhalten kann, d. h. es müssen die Punkte M und N bedeutend höher oder niederer als alle Polygonpunkte liegen; wo im letzteren Falle die in der Axe liegenden Punkte ausgenommen sind.

Man verbinde also die Fusspunkte P und Q der Verticalen MP und NQ mit dem Augepunkte Ω, und mache $M'P$ perspectivisch gleich MP und ebenso $N'Q$ perspectivisch gleich NQ; mittelst dieser zwei Punkte werden die gegebenen Polygonpunkte auf folgende Art bestimmt: Der Punkt a hat in Bezug auf den Punkt M den fixen Punkt in a' und in Bezug auf den Punkt N, den fixen Punkt a''; es liegt somit der fragliche Punkt in der Geraden $M'a'$ und in der Geraden $N'a''$, folglich im Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden, d. i. in a'''.

Auf dieselbe Weise werden auch alle übrigen Punkte gefunden, wie die Figur zeigt.

Am Schlusse dieser Construction erhält man zuweilen die letzten Punkte nur durch die Verlängerung der Seiten. So findet man den Punkt f''' indem man nur in Bezug auf den Punkt M den einen fixen Punkt f' sucht, fg bis zu der Axe verlängert, M' mit f' verbindet und aus f'' durch g''' eine Gerade führt.

§. 65.

Construction der Ellipse von der Ellipse in den perspectivischen Ebenen.

Einen viel grösseren Vortheil gewährt die im vorhergehenden §. angegebene Verfahrungsart bei der Construction einer Ellipse von der gegebenen Ellipse. Dieser Fall tritt dann ein, wenn das Bild eines Kreises gezeichnet werden soll, dessen Ebene einfach oder doppelt schief gegen die Tafel ist, denn wenn man in jedem dieser Fälle dem gegebenen Kreise ein Quadrat umschreibt, so ist dessen Bild nach der orthogonalen Projection in der horizontalen Ebene für den ersten Fall ein Rechteck und für den zweiten Fall ein Parallelogramm, und daher wird jedesmal das Bild des gegebenen Kreises eine Ellipse sein.

Ist also die horizontale Projection eines Kreises gegeben, so kann man in dieser Projectionsebene nach der angegebenen Art die Hilfspunkte der Drehungsaxe suchen, und solche auch in der perspectivisch-horizontalen Ebene bestimmen.

Da aber jedesmal das perspectivische Parallelogramm gezeichnet werden muss, und da bekanntlich der Ellipse unzählig viele Parallelogramme umschrieben werden können, so folgt daraus, dass man auch ein Parallelogramm verzeichnen kann, dessen zwei Seiten parallel zur Basis der Tafel sind.

Ist dies geschehen, so findet man auch sehr leicht den zur Basis in der perspectivisch-horizontalen Ebene parallelen Durchmesser, mittelst dessen man auch beliebig viele Punkte der Ellipse finden kann, wie die nachfolgenden Beispiele zeigen.

Wir wollen uns aber hierbei, um die Sache desto deutlicher zu geben, des geometrischen Grundrisses bedienen. Nehmen wir also zuerst den Fall an, wenn die Ebene des Kreises schief gegen die horizontale Projectionsebene ist, und normal auf der Tafel, ohne dabei horizontal oder vertical zu sein.

Es sei also in diesem Falle (Taf. XI, Fig. 75) $A' B'$ die grosse und $C' D'$ die kleine Axe der Ellipse $A'C'B'D'$, welche dem Rechtecke $E'F'G'H'$ eingeschrieben ist.

Es sei ferner $E'F'$ die horizontale und $E''G''$ die verticale Trasse derjenigen Ebene, in welcher der Kreis sich befindet, dessen Bild die Ellipse $A'C'B'D'$ in der horizontalen Ebene ist.

Man zeichne also das Rechteck $EFGH$ perspectivisch gleich dem Rechtecke $E'F'G'H'$, ziehe in diesem die beiden Diagonalen, und durch deren Durchschnittspunkt O die CD ‖ zur Basis der Tafel, so ist CD als der Durchmesser desjenigen Kreises anzusehen, durch dessen Drehung aus der verticalen Ebene in die perspectivisch-horizontale diejenige Ellipse entstanden gedacht wird, welche in das Rechteck $EFGH$ eingeschrieben werden soll.

Es ist somit dieser Fall auf den im §. 22, Fig. 28 zurückgeführt, und hinsichtlich der weiteren Construction als ein solcher behandelt. Es wird nämlich, wie in Fig. 28 die CD verlängert, durch O eine Senkrechte geführt, $OC'' = OD'' = \frac{CD}{2}$ gemacht, sodann in C nach aufwärts und in D nach abwärts Lothrechte gezogen, und mittelst dieser wie auch mittelst der zwei Punkte C'' und D'' auf der Axe XX' die fixen Punkte als Hilfspunkte und dann auch die der Ellipse, wie in §. 22, Fig. 28, gesucht.

§. 66.

Construction der Ellipse von der Ellipse, wenn in der Projectionsebene keine von den zwei Axen gegeben ist.

Ist bei der Projection eines Kreises, dessen Ebene doppelt schief gegen die Bildfläche also weder die grosse noch die kleine Axe der so erhaltenen Ellipse gegeben, oder wenn solche auch gegeben wären, keine von denselben parallel zur Basis der Tafel, so lässt sich auch dieser Fall auf einen einfachen reduciren. Es braucht hierbei nur die Projection des Mittelpunktes gegeben zu sein, wo dann durch diesen Punkt ein zur Basis paralleler Durchmesser gezogen, und mittelst der Tangenten auch ein zweiter als conjugirter Durchmesser aufgefunden werden kann.

Es sei nun (Fig. 76) die Ellipse $A'C'B'D'$ als die horizontale Projection eines Kreises, dessen Ebene doppelt schief gegen die beiden Projectionsebenen ist; es sei ferner O' der Mittelpunkt dieser Ellipse. Man ziehe $A'B'$ parallel zur Basis der Bildfläche, ferner $E'F'$ ‖ $G'H'$ ‖ $A'B'$, suche die Berührungspunkte C' und D', verbinde sie mit einander durch eine Gerade und ziehe $E'H'$ ‖ $F'G'$ ‖ $C'D'$. Man bringe ferner $A'B'$ und $C'D'$ in die perspectivisch-horizontale Ebene, wodurch man in derselben die zwei Geraden AB und CD erhält. Es ist also AB als der Durchmesser desjenigen Kreises anzusehen, durch dessen Drehung aus der verticalen Ebene um diesen horizontalen Durchmesser in die perspectivisch-horizontale Ebene die zu zeichnende Ellipse entstanden gedacht wird.

Wird also AB beiderseits verlängert, ferner Au, pq und Bw normal auf AB gezogen, sodann $Op = Oq$ gemacht, so kann man im Übrigen ganz nach der im §. 22, Fig. 28 angegebenen Weise verfahren, wie dies aus der Figur zu ersehen ist, wo hier mittelst der vier fixen Punkte $mnr's'$ acht Punkte für die zu zeichnende Ellipse gefunden wurden.

§. 67.

Construction der Ellipse von der gegebenen Ellipse, wenn jene durch die Drehung um die grosse Axe aus der verticalen Ebene in die perspectivisch-horizontale entstanden gedacht wird. Es sei (Fig. 77) die Ellipse $ACBD$ in der verticalen Ebene so gegeben, dass die grosse Axe AB parallel zur Basis der Tafel ist; es sei ferner ZZ die Horizontal-Linie, vv' die Vertical-Linie, $\triangle$ der Distanzpunkt und Ω der Augepunkt. Man verlängere die grosse Axe AB beiderseits, ziehe zwei Lothrechte in beliebiger Entfernung von einander, also MP und $NB \perp AB$, mache $MP = NB = BP$, führe dann durch die Fusspunkte dieser zwei Senkrechten, also durch P und B gerade Linien nach dem Augepunkte, mache $M'P = MP = D'P = N'B$ in der durch AB gelegt gedachten perspectivisch-horizontalen Ebene. Es entspricht also der Punkt M' dem Punkte M, der Punkt N' dem Punkte N u. s. w. Nun führe man aus dem Punkte M eine Gerade Mm so, dass die gegebene Ellipse in zwei Punkten a und b geschnitten wird; da nun die Punkte M' und m in der perspectivisch-horizontalen Ebene liegen, und die Gerade $M'm$ der Mm entspricht, so müssen in derselben Ebene auch die zwei Punkte a und b liegen; wird ferner aus N durch a die Gerade $N\alpha$, und aus demselben Punkte durch b die Gerade $N\beta$ gezogen, so liegen die zwei Punkte a und b auch in diesen Geraden, welche die zwei fixen Punkte n und p haben. Werden endlich aus N' durch die zwei fixen Punkte n und p Gerade geführt, d. i. $N'n\alpha'$ und $N'p\beta'$, so sind die zwei Durchschnittspunkte dieser zwei Geraden, mit der Geraden $M'm$, d. i. a' und b' Punkte der verlangten Ellipse.

Da ferner die zwei aus N gezogenen Geraden die gegebene Ellipse in α und β schneiden, so benützt man dies, verbindet α und β mit M, bestimmt dadurch die zwei fixen Punkte r und q, führt dann durch diese aus M' Gerade, wodurch sich α' und β' als die zwei anderen Punkte der verlangten Ellipse ergeben.

Werden zu diesen Punkten auch die correspondirenden Punkte gesucht, so hat man im Ganzen zwölf Punkte der zu zeichnenden Ellipse.

Um auch hier das Anhäufen von Linien zu vermeiden, verfahre man auf die bereits angegebene Weise, und lasse bei der Bestimmung der fixen Punkte die unnöthigen Hilfslinien weg, indem man nur die Einschnitte in der Axe macht.

Wird z. B. der fixe Punkt m bestimmt, a und b markirt, so braucht man die Gerade Mm nicht zu ziehen, sondern die Kante des Lineals um den fixen Punkt m bis auf M' zu drehen und nur die $M'm$ zu ziehen u. s. w., was der praktische Zeichner ohnehin leicht einsehen wird.

Man braucht also auch hier, um zwei Punkte der Ellipse zu bestimmen, nur eine einzige Linie zu ziehen, wenn sonst die Hilfspunkte so wie die fixen Punkte gehörig aufgefunden und kennbar bezeichnet werden.

Wie man aus diesem Beispiele sieht, ist die Construction der Ellipse von der Ellipse höchst einfach; und zwar aus dem Grunde, weil jede aus dem einen oder dem andern Hilfspunkte M oder N gezogene Gerade die gegebene Ellipse in zwei Punkten schneidet, aber nur Einen fixen Punkt hat.

Auch ist die angeführte Construction allgemein giltig und in den meisten Fällen anwendbar, mag die Drehungsaxe durch den Mittelpunkt der Ellipse gehen, dieselbe schneiden, berühren, oder ausserhalb derselben gegeben sein.

§. 68.

Zum Schlusse dieser Abhandlung wollen wir nur noch eine Aufgabe anführen, deren einfache aber auch allgemeine Lösung bisher nicht bekannt ist, nämlich: Es soll eine Ellipse construirt werden, wenn nur eine Axe und eine Tangente gegeben ist.

Die Anwendung dieser Aufgabe kommt, wie Taf. XII, Fig. 78 und 79 zeigt, in der Baukunst bei der Construction der Bohlendächer vor, wo nämlich die Kanten der Sparen ED und DH Fig. 78 als die Tangenten, und die Spannweite AB als die grosse Axe gegeben ist, OC aber nicht bekannt ist.

Hier handelt es sich vorerst um die geometrische Construction der Berührungspunkte der gegebenen Tangenten, alsdann aber überhaupt um die Construction beliebig vieler Punkte für die zu zeichnende Ellipse.

Bekanntlich sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden, denn entweder werden sich die zwei gegebenen Geraden, gehörig verlängert, noch auf der Zeichenfläche schneiden, oder es ist dies nicht der Fall.

Die Lösung des ersten Falles findet man wohl in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie, allein die des zweiten nicht, und es dürfte daher die Lösung des zweiten Falles durch die Construction nicht überflüssig sein; sie ist folgende:

Es sei (Fig. 80) AB die grosse Axe und tg die Richtung der Tangente, welche durch die Ordinaten Am und Bn gegeben ist. Der Berührungspunkt dieser Tangente wird gefunden, wenn man Am über A nach abwärts verlängert, $Aq = Am$ macht, q mit n durch eine Gerade verbindet, welche die gegebene Axe in O' schneidet, und in diesem Durchschnittspunkte eine Senkrechte errichtet, bis die gegebene Tangente in E geschnitten wird; so ist E der gesuchte Berührungspunkt.

Wird ferner $Bp = Bn$ gemacht, und durch p und q eine Gerade geführt, so ist diese, d. i. $t' g'$, eine zweite Tangente der zu zeichnenden Ellipse.

Man kann daher, wenn eine Tangente gegeben ist, auch eine zweite auf diese Art sehr leicht auffinden, und daher ein Trapez hier $mnpq$ construiren, in welchem sich nach bekannten perspectivischen Grundsätzen eine Ellipse einschreiben lässt, welche dann die verlangte Ellipse sein wird.

Um für diese Ellipse beliebig viele Punkte zu bestimmen, wird ferner Fig. 80^{α} aus O' mit dem Radius $O'E = O'F$ der Hilfskreis $A'EB'F$ beschrieben, und nach einer oder der andern von uns angegebenen Methode vorgegangen, indem man EF als Drehungsaxe annimmt und in derselben die erforderlichen fixen Punkte aufsucht.

Man wird also auch hier am bequemsten zuerst die Diagonalpunkte suchen, indem man aus E mit dem Radius gleich $A'E$ die Verlängerung der Axe FE in G schneidet, sodann G mit A und B verbindet, wodurch die Diagonalen in H und K geschnitten werden; die mit diesen zwei Punkten correspondirenden Punkte werden auf bekannte Art gefunden.

Da hier die Punkte oberhalb der Axe AB verschieden hoch liegen, so werden mittelst der zur grossen Axe AB gezogenen

Parallelen noch vier Punkte, somit im Ganzen zwölf Punkte für die zu zeichnende Ellipse gefunden.

Man kann aber mittelst der Ordinaten oder nach §. 22, Fig. 28 auch noch mehr Punkte sehr leicht finden.

Es erübrigt uns noch bei dieser Aufgabe, die Auffindung der kleinen Axe zu bestimmen, deren Richtung ohnehin bekannt ist; denn legt man durch den Halbirungspunkt O der grossen Axe die CD lothrecht auf AB, so liegt in dieser die kleine Axe. Hat man nun zuerst mehrere Punkte der Ellipse aufgefunden und diese gezeichnet, so wird dadurch gewissermassen auch die kleine Axe begrenzt.

Man untersucht also die Richtigkeit der Endpunkte der so erhaltenen Axe, z. B. des Punktes C', auf folgende Art: Es wird nämlich der zu untersuchende Punkt C' mit A durch eine Gerade verbunden, aus E mit EL ein Halbkreis beschrieben, welcher den aus O' beschriebenen Kreis in J schneidet; ferner aus J die JJ' normal auf EF gezogen, und aus m durch J' eine Gerade geführt, bis sie die AC' schneidet; erfolgt nun der Durchschnittspunkt dieser zwei Geraden in der Geraden CD, so ist dieser ein Endpunkt der kleinen Axe [1]).

§. 69.

Um das im letzten Paragraphe angegebene Verfahren gehörig zu begründen, wollen wir annehmen, dass sich die zwei gegebenen Geraden, d. i. die grosse Axe und die Tangente, wenn sie gehörig verlängert werden, noch auf der Zeichenfläche schneiden, wie Fig. 81 zeigt.

Es sei also AB die grosse Axe und $m'n'$ die Tangente, welche sich in Ω schneiden, durch welchen Durchschnittspunkt aber auch die correspondirende Tangente $p'q'$ gehen muss.

Legt man nun durch A und B die Verticalen $m'q'$ und $n'p'$, so entsteht dadurch das Trapez $m'n'p'q'$, in welchem die Diagonalen gezogen und bis zu der durch den Punkt Ω gezogenen Geraden ZZ' verlängert, dieselbe in $\triangle$ und $\triangle'$ schneiden. Es ist daher Ω der Augepunkt, $\triangle$, $\triangle'$ die Distanzpunkte, und $\Omega\triangle = \Omega\triangle'$ die Entfernung des Beobachters von der Tafel. Somit ist hier $m'n'p'q'$ das perspectivische Quadrat, welches bei dieser Distanz aus dem geometrischen Quadrate $mnpq$ entstanden ist, und weil die Distanz

[1]) Wir behalten uns vor über die Bestimmung der Axen als ein Anhang zu dieser Abhandlung vorzulegen.

zu gering ist, als ein verzehrtes Bild dieses Quadrates erscheint. Denn wie bekannt, erscheint ein und derselbe Kreis bei verschiedenen Distanzen des Beobachters auch verhältnissmässig mehr oder weniger gestreckt und gedrückt, jedoch behält er immer die Form einer Ellipse.

Wird die Distanz gleich o, so ist dann die grosse Axe ∞ lang, ist hingegen die Distanz ∞ gross, so wird die grosse Axe $= o$ u. s. w., was allerdings auch von anderen Punkten abhängt.

Ebenso kann man sich diese Ellipse durch die Drehung des aus O' mit $O'F$ über EF in der verticalen und zur Tafel parallelen Ebene beschriebenen Kreises entstanden denken, wobei nach den Grundsätzen der Perspective $mq \parallel np$ als Parallele zur Tafel auch nach der Drehung stets parallel bleiben müssen, während mn und pq, gehörig verlängert durch den Augepunkt Ω gehen müssen, wenn der Kreis aus der verticalen und zur Tafel parallelen Ebene in die perspectivisch horizontale und normale auf die Tafel gedreht wird. Kommt dann bei der Drehung dieses Kreises der Punkt A nach A', so muss gleichzeitig B nach B' kommen, indem die aus $\triangle$ und $\triangle'$ durch O' gezogenen Geraden, die in B errichtete Senkrechte in n' und p' schneiden u. s. w. Es kommt m nach m', n nach n', p nach p' und q nach q', und somit ist $m'n'p'q'$ das Bild des Quadrates $mnpq$.

Was also von diesem Quadrate gilt, das gilt auch von jedem Punkte der Ellipse, indem ein jeder solcher bei der bestimmten Distanz verhältnissmässig seine Lage verändern musste.

Die Richtigkeit der Construction bei der Bestimmung beliebiger Anzahl von Punkten für die Ellipse erfolgt aus der früher erklärten Verfahrungsart (Fig. 21 — 24).

Aus der näheren Betrachtung der Fig. 81 folgt ferner, dass man auch in dem 1. Falle, wenn die zwei gegebenen Linien sich noch auf der Zeichenfläche schneiden, sowohl den Berührungspunkt als auch beliebig viele Punkte der Ellipse auf eine höchst einfache Art auffinden kann. Denn man braucht nicht einmal die beiden gegebenen Linien bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte zu verlängern und ebenso auch nicht über der grossen Axe einen Kreis zu beschreiben, sobald man die von uns angegebene Verfahrungsart kennt, wie in einem geometrischen Trapeze oder perspectivischen Quadrate die Ellipsenpunkte gefunden werden.

§. 70.

Wir haben in Fig. 12 und 13 bereits erklärt, dass man sich eine und dieselbe Ellipse auf verschiedene Art entstanden denken kann. In Fig. 12 und 13 entstehen die Ellipsen durch die Drehung zweier verschiedener Kreise, wovon der eine über der grossen und der andere über der kleinen Axe beschrieben wird.

Wird also über der grossen Axe (Fig. 81) ein Quadrat *MNPQ* verzeichnet, so dass die grosse Axe eine zu den zwei gegenüberliegenden Seiten dieses Quadrates parallele Halbirungslinie bleibt, und in diesem Quadrate ein Kreis eingeschrieben, so kann man sich die Ellipse $AC'BD'$ auch durch die Drehung dieses Kreises entstanden denken. Diese Entstehungsart kann man aber nur dann benützen, wenn die Lage des Punktes C nach der Drehung bestimmt ist, was bei der vorgelegten Aufgabe in der Baukunst nie der Fall ist.

Eine nähere Betrachtung der vorgelegten Aufgabe (Fig. 80) zeigt uns, dass jedesmal, wenn eine Tangente gegeben ist, stets sechs Tangenten als gegeben betrachtet werden können, wovon je zwei und zwei correspondirende Tangenten sind.

In dem angeführten Falle werden zur Construction der Ellipse vier Tangenten benützt, d. i. diejenigen zwei, welche die Verlängerung der grossen Axe schneiden oder schneiden sollen, und die zwei, welche in den Endpunkten der grossen Axe normal auf diese gezogen werden. Es entsteht hierdurch das geometrische Trapez, welches in Bezug auf den Augepunkt so wie auf den Distanzpunkt nichts anderes als ein perspectivisches Quadrat ist, ohne welches man die Lösung der vorgelegten Aufgabe im zweiten Falle nicht im Stande ist auszuführen.

Sind aber zwei verschiedene Tangenten gegeben, so können auch zwei verschiedene Trapeze, deren jedes die Höhe gleich der grossen Axe hat, gezeichnet werden, und bei der Bestimmung der Ellipsenpunkte ist es hinreichend die vier Diagonalpunkte zu bestimmen, indem man mittelst der parallelen Sehnen auch die correspondirenden Punkte sehr leicht auffinden kann, in welchem Falle also im Ganzen 24 — 26 Punkte der Ellipse, also mehr als ein geübter Zeichner braucht, gefunden werden.

§. 71.

Ganz allgemein wird diese Aufgabe gestellt, wenn man die Ordinaten, mittelst deren die Tangente bestimmt wird, unter einem beliebigen Winkel annimmt, wie Fig. 82 zeigt, wo dann die Axe

AB nur einer von den zwei conjugirten Durchmessern ist, von dem zweiten aber nur die Richtung gegeben ist.

Es ist daher in diesem Falle zur Construction der Ellipse eine Tangente *tH* und ein conjugirter Durchmesser *AB* gegeben.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist folgende:

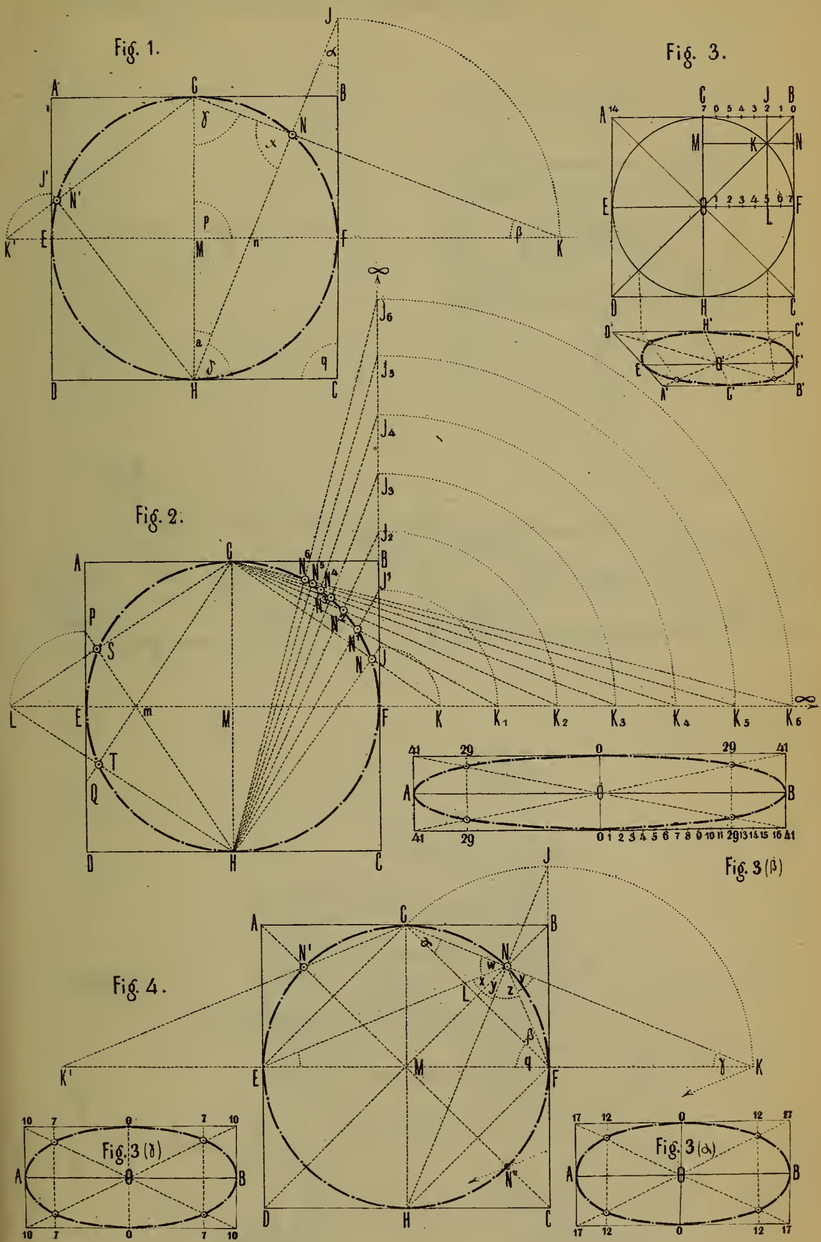
Da die Richtung des zweiten conjugirten Durchmessers gegeben ist, so ziehe man durch *A* und *B* die *EF* und $HG \parallel CD$, mache $AF = AE$ und $BG = BH$, und verbinde *G* mit *F* durch eine Gerade, wodurch das geometrische Trapez oder das perspectivische Quadrat *EFGH* entsteht. Werden in diesem die beiden Diagonalen *EG* und *FH* gezogen, und durch den Durchschnittspunkt, welcher in der *AB* erfolgen muss, eine Parallele zu *CD* geführt, so sind *J* und *K* Berührungspunkte dieser Tangenten an die zu zeichnende Ellipse. Wird ferner aus O' mit $O'J = O'K$ über *JK* ein Kreis beschrieben, so ist er derjenige, durch dessen Drehung aus der verticalen Ebene in die perspectivisch-horizontale um die Axe *JK* die zu zeichnende Ellipse entstanden gedacht wird.

Vergleicht man Fig. 81 mit 82, so sieht man, dass die Construction der letzteren ganz allgemein ist, denn es gibt in der perspectivisch-horizontalen oder verticalen Ebene, welche normal auf der Bildfläche ist, jedesmal nur eine einzige Linie, welche geometrisch entweder horizontal oder vertical ist; alle anderen Linien sind schief, indem sie nach dem Hauptpunkte oder nach irgend einem andern Verschwindungspunkte convergiren.

Es sind also Fig. 82 *EF* und *GH*, ferner *JK* und *CD*, welche zu einander parallel gezogen wurden, nichts anderes als die zur Basis der Tafel gezogenen Parallelen, wenn man sich die Glastafel oder die Bildfläche in *EF* und in deren Verlängerung aufgestellt denkt. Daher ist auch dieser Fall auf den im §. 22, Fig 28 reducirt, wo dann die Construction der Ellipsenpunkte nach dieser oder jener Weise vorgenommen werden kann. Wie man aus Fig. 82 sieht, braucht man hierbei nur die vier Diagonalpunkte zu bestimmen, weil man schon dadurch, indem sie in verschiedener Höhe sind, im Ganzen 14 Punkte für die zu zeichnende Ellipse erhält.

Es ist daher die Lösung der zuletzt vorgelegten Aufgabe, wie wir gesehen haben, selbst dann höchst einfach, wenn man den Durchschnittspunkt der beiden gegebenen Geraden auf der Zeichenfläche nicht erhalten kann, und die Richtung der beiden Axen beliebig ist.

Fialkowski. Construction des Kreises und der Ellipse.



Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Sitzungsb. d. k. Akad. d. W. math. naturw. Cl. XVI. Bd. 1 Heft. 1855.

Fialkowski. Construction des Kreises und der Ellipse.

Fig. 5.

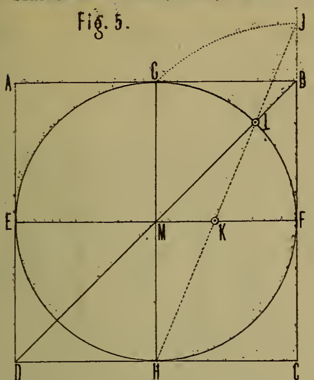


Fig. 6.

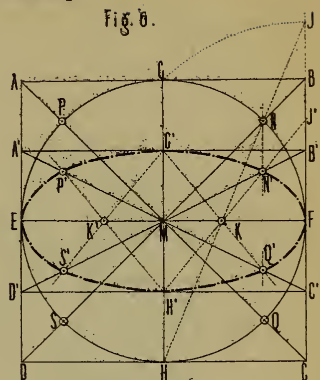


Fig. 8.

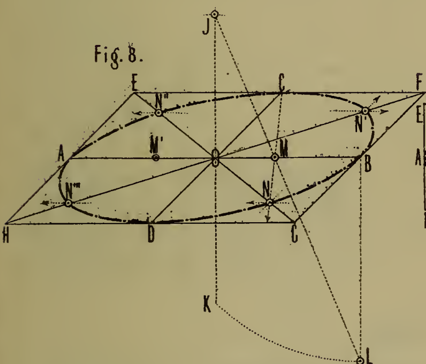


Fig. 7.

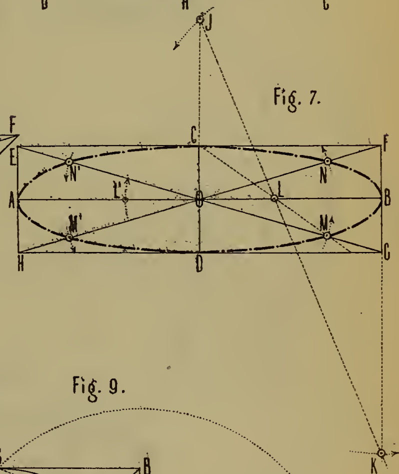


Fig. 9.

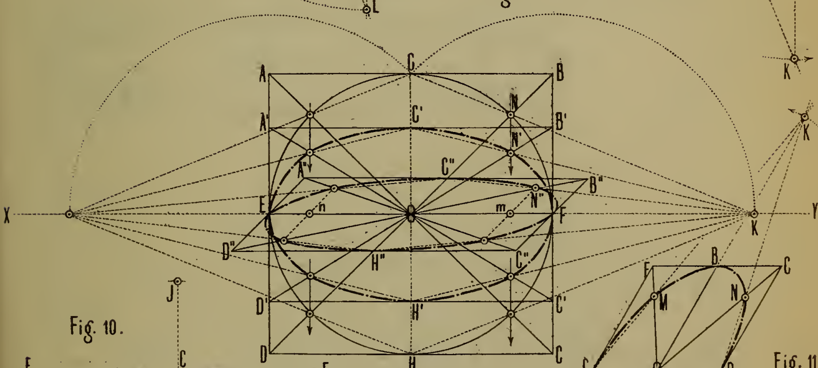


Fig. 10.

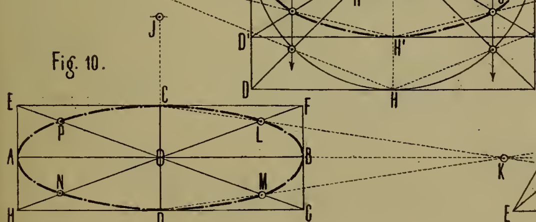
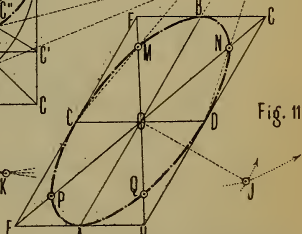
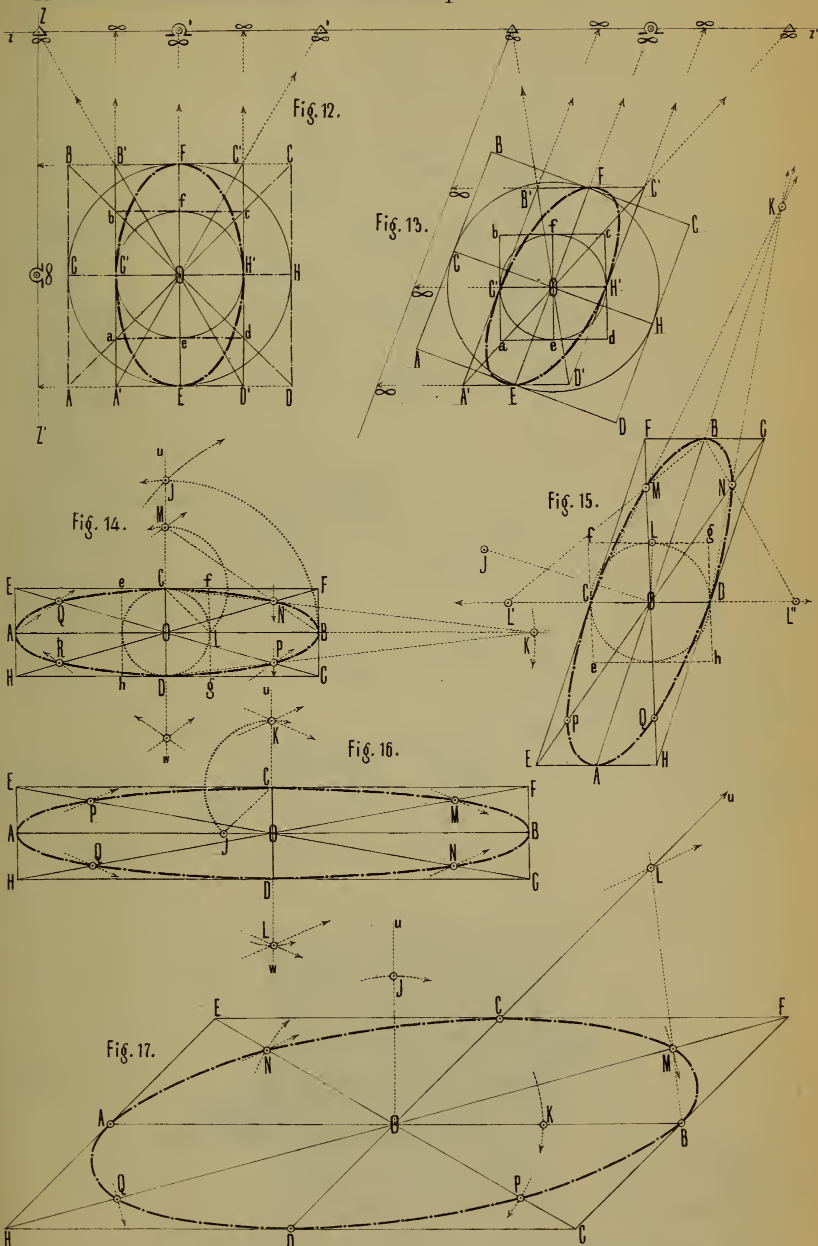


Fig. 11.

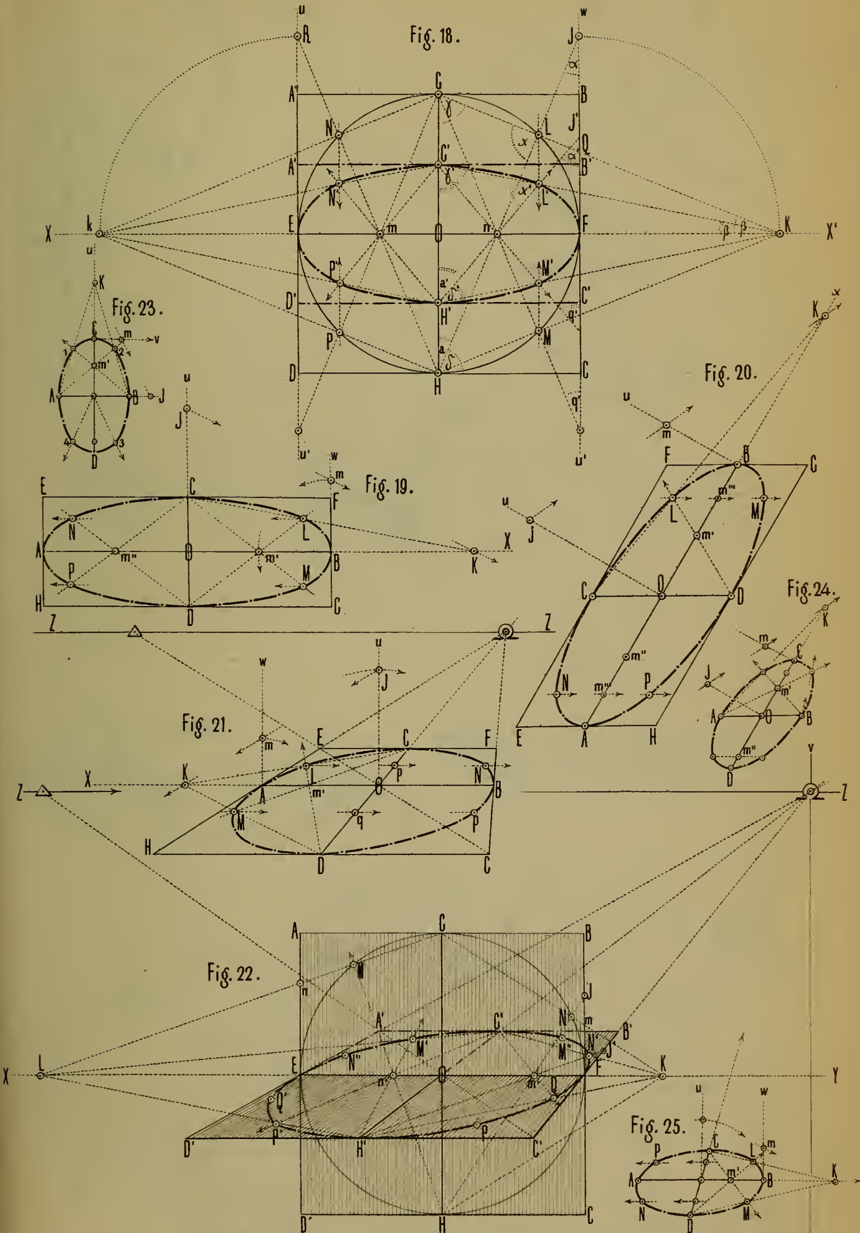


Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

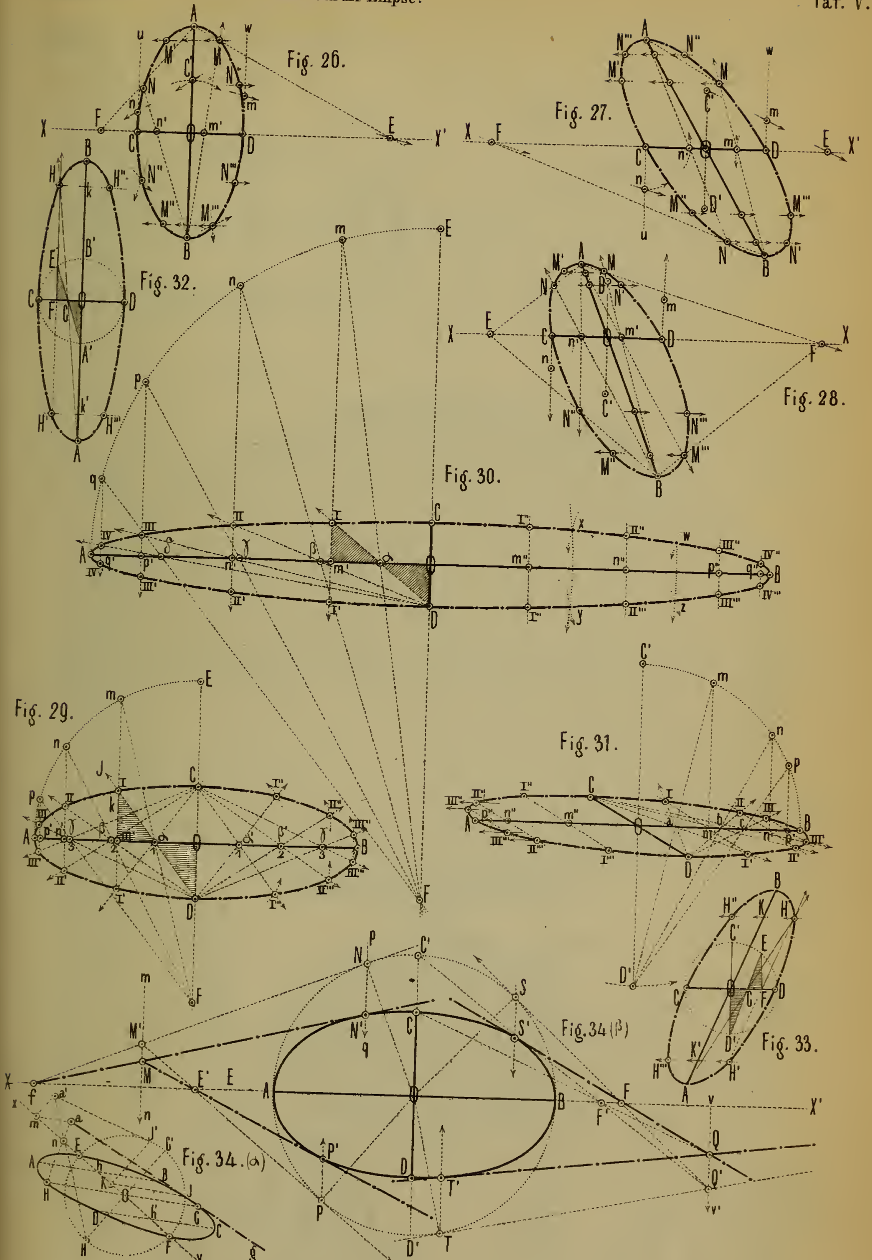


Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

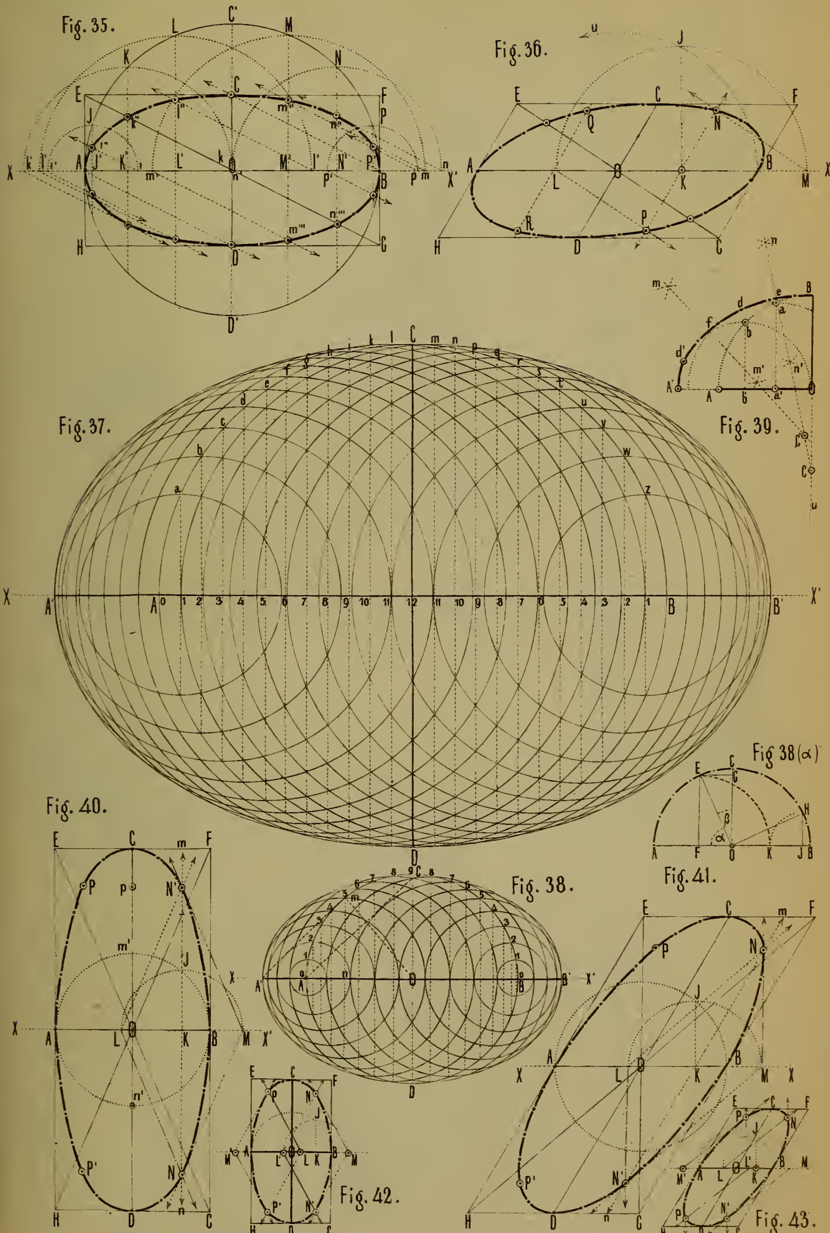
Fialkowski. Construction des Kreises und der Ellipse.



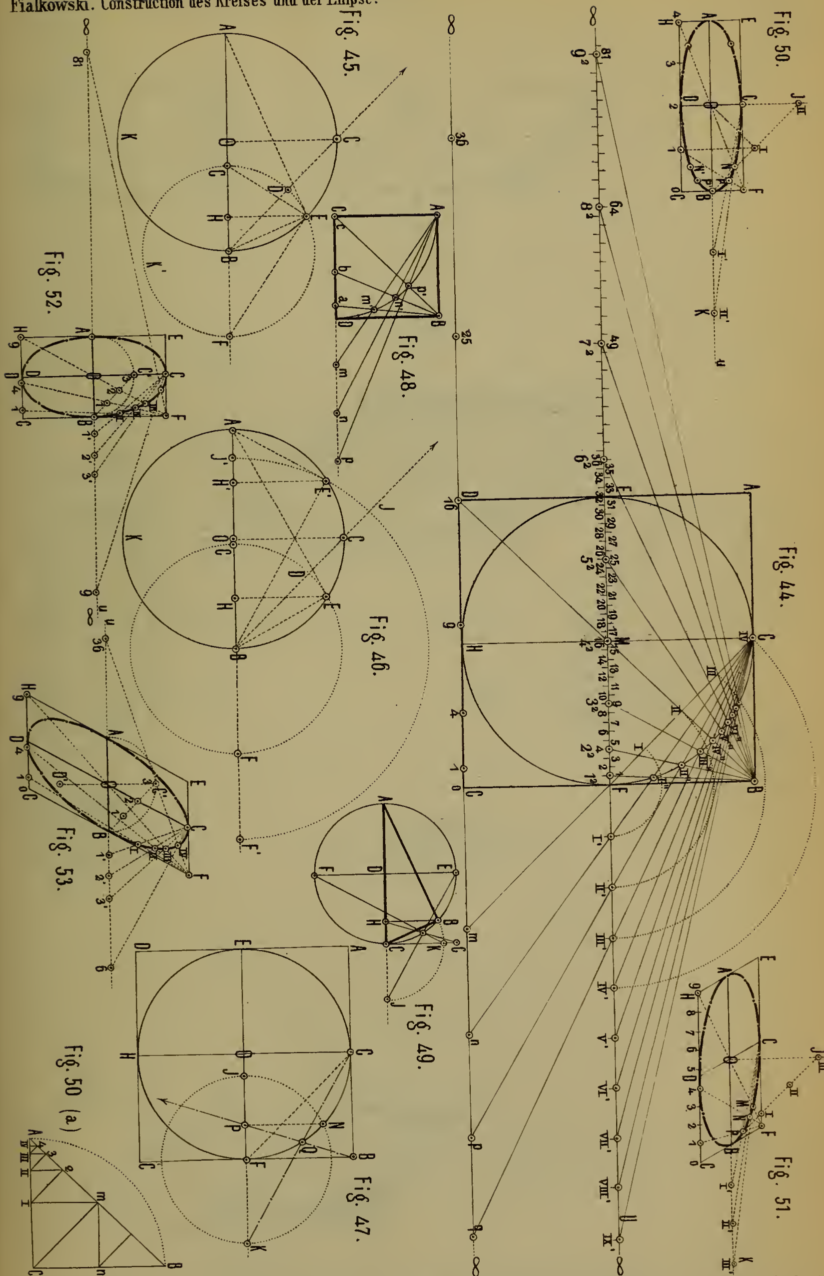
Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.



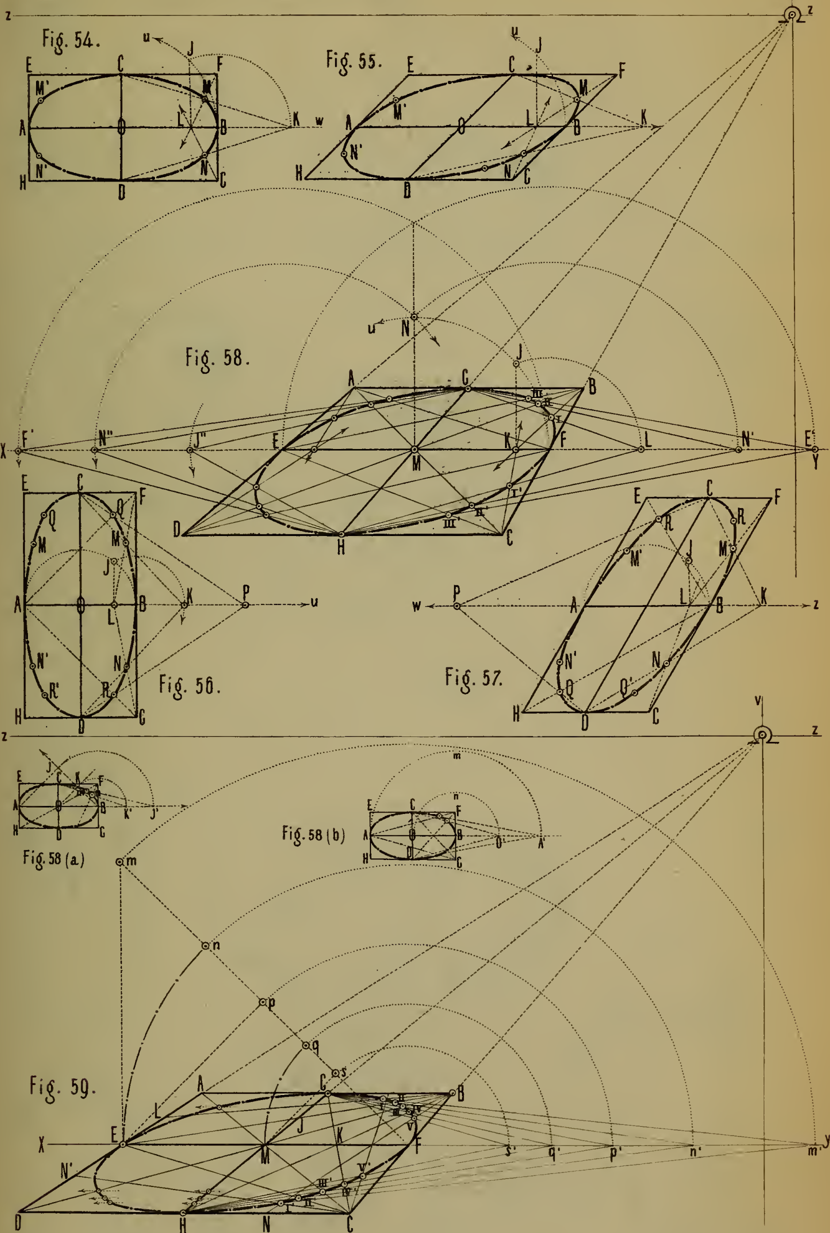
Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.



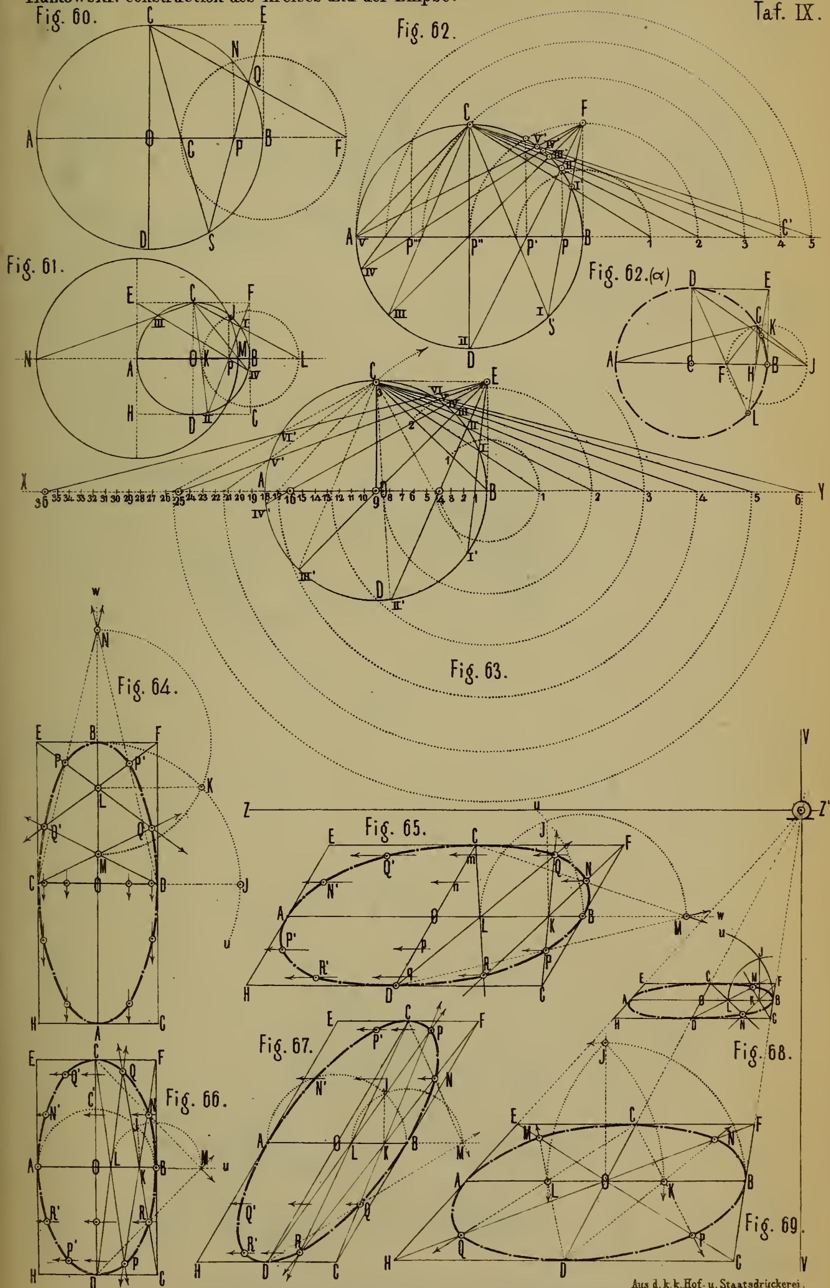
Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei



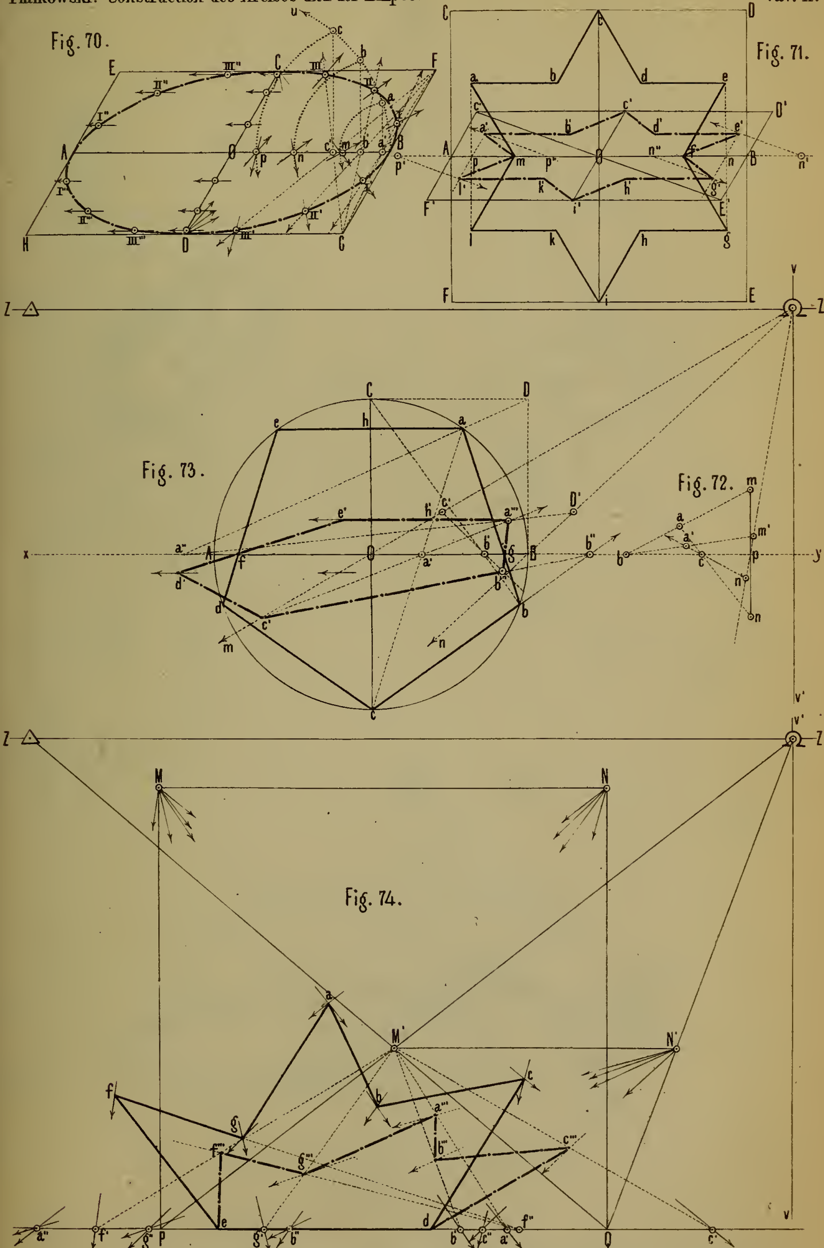
Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.



Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.



Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.



Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

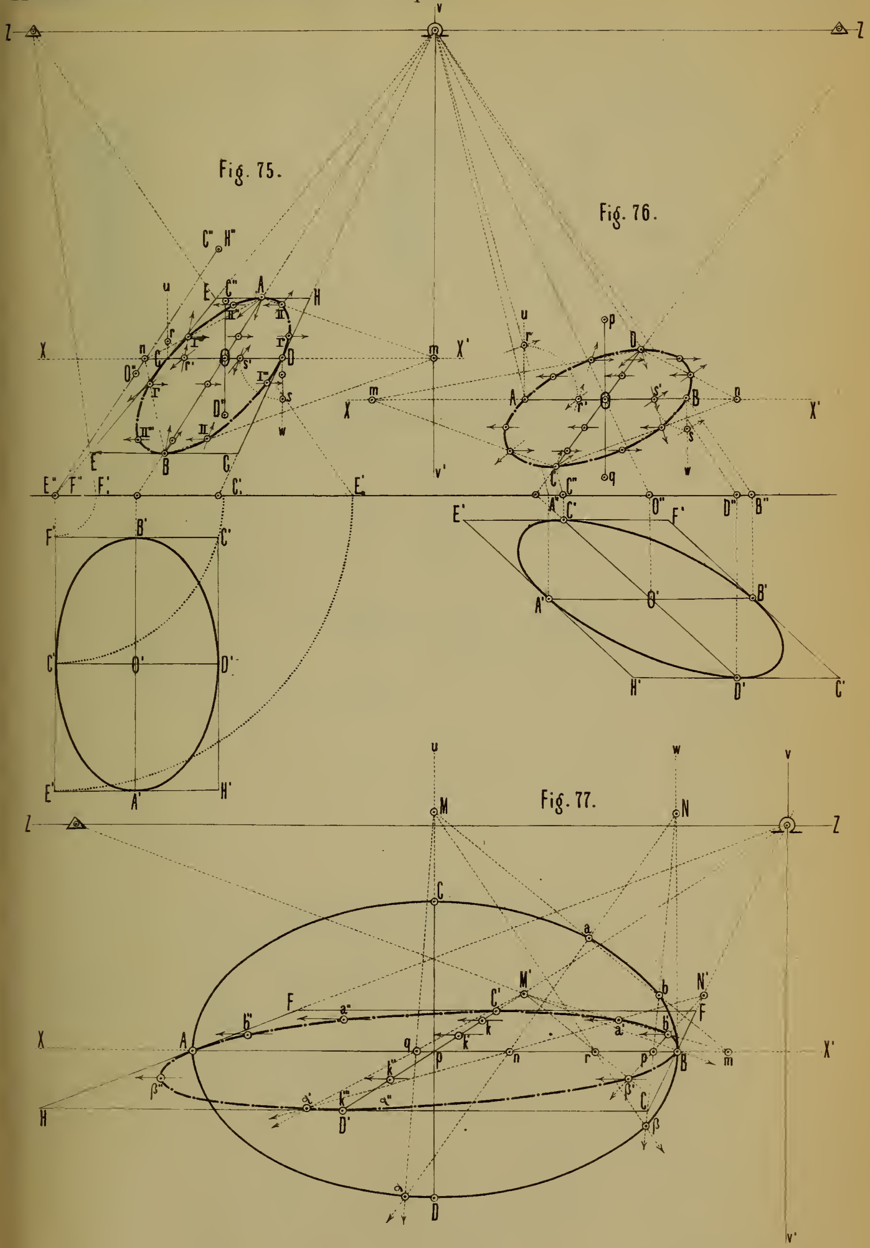


Fig. 75.

Fig. 76.

Fig. 77.

Aus d. k. k. Hof u. Staatsdruckerei.

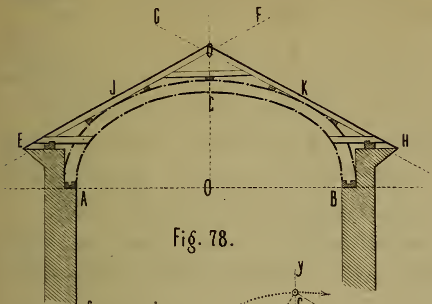


Fig. 78.

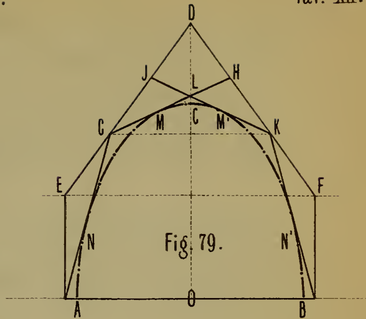


Fig. 79.

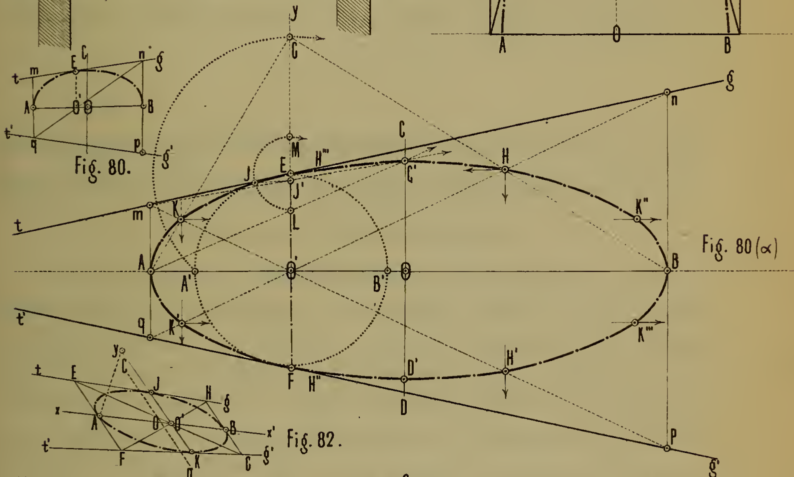


Fig. 80.

Fig. 80 (α)

Fig. 82.

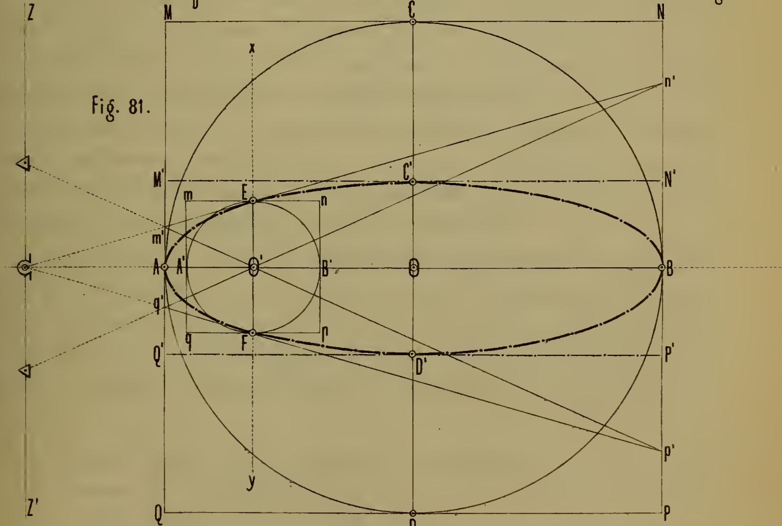


Fig. 81.

M. Aigner sc.

Aus d. k. k. Hof- u. Staatsdruckerei.

Auf ähnliche Art würde man verfahren, wenn die kleine Axe und verschiedene Tangenten gegeben sind, wie dies Fig. 79 zeigt, wo zugleich die Anwendung dieser Aufgabe versinnlicht wird.

Da nun auch in diesem Falle die Construction der Ellipse ganz analog mit der im letzteren Falle angegeben ist, so finden wir es für überflüssig, selbe hier durchzuführen.

Dass sich aus den hier aufgestellten und bewiesenen Constructionen auch noch andere ableiten lassen, ist wohl nicht zu zweifeln, welches der Untersuchung der Wissenschaft anheimgestelll bleibt.

Die konische Refraction am Diopsid, nebst Bemerkungen über einige Erscheinungen der konischen Refraction am Aragon.

Von dem w. M. W. **Haidinger.**

1. Als Vorwort zu einer Mittheilung, die sich auf den Diopsid bezieht, bitte ich um Erlaubniss, wenn auch nicht für mich selbst, eine Reclamation zu erheben, veranlasst durch meine frühere Darstellung der Geschichte der Studien in Bezug auf die Lage der optischen Axen desselben [1]. Meinem hochverehrten Freunde Gustav Rose verdanke ich nämlich die Kenntniss der Thatsache, dass Herr Dr. Julius Wilhelm Ewald in Berlin bereits im Jahre 1837, also mehrere Jahre vor Herrn Professor Miller's Mittheilung in den *Cambridge Transactions* die Verhältnisse der optischen Axen des Diopsids mit vollständiger Genauigkeit dargestellt hat. Es geschah dies in seiner schönen Inaugural-Dissertation *De Crystallis duorum axium opticorum dissertatio optica,* die nur in lateinischer Sprache für sich veröffentlicht wurde, wovon aber leider keine Auszüge in die periodische wissenschaftliche Literatur übergingen.

Aber Herrn Dr. Ewald's Abhandlung enthält noch eine Angabe die als Berichtigung oder vielmehr als eine Ergänzung zu meiner früheren Angabe dienen kann, indem sie eine directe Beobachtung an die Stelle einer Schlussfolgerung stellt. Aus den Beobachtungen in Fig. 3 und Fig. 4 hatte ich nämlich für die Fig. 2 den Charakter

---

[1] Pleochroismus einiger Augite und Amphibole. Sitzungsberichte d. kais. Akademie d. Wissensch. 1854. Bd. 12, S. 1074.