Sitzungsber. Abt. II (2000) 209: 19–46

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

Einige q-Analoga der Catalan-Zahlen

Von

J. Cigler

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 4. Mai 2000
durch das w. M. Johann Cigler)

Wir betrachten nichtnegative Gitterwege im $\mathbf{R}^2$, die im Punkt (0,0) beginnen mit Aufstiegen (1,1), horizontalen Abschnitten (1,0) und Abstiegen (1,−1). Wir ordnen jedem Aufstieg das Gewicht 1 zu, jedem horizontalen Stück auf der Höhe k ein Gewicht s_k und jedem Abstieg, der auf der Höhe k endet, ein Gewicht t_k zu.

Bezeichnet man mit $a_{n,k}$ das Gewicht aller Gitterwege von (0,0) nach (n, k), so gilt offenbar

$$\begin{aligned} a_{0,k} &= \delta_{0,k} \\ a_{n,0} &= s_0 a_{n-1,0} + t_0 a_{n-1,1} \\ a_{n,k} &= a_{n-1,k-1} + s_k a_{n-1,k} + t_k a_{n-1,k+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Es ist dann $a_{n,n} = 1$ und $a_{n,n-1} = s_0 + s_1 + \quad + s_{n-1}$.

Sind alle $s_k = 0$, kommen also keine horizontalen Schritte vor, so nennen wir so einen Gitterweg einen Dyckweg.

Bemerkung: Man könnte allgemeiner einem Aufstieg, der auf der Höhe k endet, das Gewicht α_k, jedem horizontalen Stück auf der Höhe k ein Gewicht β_k und jedem Abstieg, der auf der Höhe k endet, ein Gewicht γ_k zuordnen. Es wäre dann $a_{n,k} = \alpha_k a_{n-1,k-1} + \beta_k a_{n-1,k} + \gamma_k a_{n-1,k+1}$. Dabei ergeben sich dieselben Gewichte $a_{n,0}$ wie wenn man $a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + s_k a_{n-1,k} + t_k a_{n-1,k+1}$ setzt mit $s_k = \beta_k, t_k = \alpha_{k+1}\gamma_k$. Denn die Gewichte der horizontalen Schritte bleiben gleich. Wenn ein Abstieg auf der Höhe k landet, muss es vorher genau einen dazu passenden Aufstieg gegeben haben, der auf die Höhe $k + 1$ geführt hat.

Wir wollen auch „duale Gitterwege" betrachten, die im Punkt (0,0) beginnen und nach links statt nach rechts gehen, mit Aufstiegen $(-1,1)$, horizontalen Abschnitten $(-1,0)$ und Abstiegen $(-1,-1)$. Wir ordnen jedem Aufstieg, der auf der Höhe k beginnt, das Gewicht t_k zu, jedem horizontalen Stück auf der Höhe k das Gewicht s_k und jedem Abstieg das Gewicht 1 zu.

Sei $a^*_{n,k}$ das Gewicht aller dualen Gitterwege von (0,0) nach $(-n,k)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a^*_{0,0} &= \delta_{0,k} \\ a^*_{n,0} &= s_0 a^*_{n-1,0} + a^*_{n-1,1} \\ a^*_{n,k} &= t_{k-1} a^*_{n-1,k-1} + s_k a^*_{n-1,k} + a^*_{n-1,k+1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Hier ist $a^*_{n,n} = t_0 t_1 \quad t_{n-1}$.

Sei nun $b^{(l)}_{n,k}$ das Gewicht aller Wege von (0,0) nach (n,k), die mit mindestens l Aufstiegen beginnen. Dann ist $b^{(0)}_{n,k} = a_{n,k}$,

$$b^{(1)}_{n,k} = a_{n,k} - s_0 a_{n-1,k} \tag{3}$$

und allgemein

$$b^{(l)}_{n,k} = b^{(l-1)}_{n,k} - s_{l-1} b^{(l-1)}_{n-1,k} - t_{l-2} b^{(l-2)}_{n-2,k}. \tag{4}$$

Daraus ergibt sich sofort, dass eindeutig bestimmte Koeffizienten $p_{l,i}$ mit $p_{l,l} = 1$ existieren, sodass

$$b^{(l)}_{n,k} = \sum_{i=0}^{l} p_{l,i} a_{n-1+i,k} \tag{5}$$

gilt.

Nun ist offenbar

$$\sum_{i=0}^{n} p_{n,i} a_{i,k} = b^{(n)}_{n,k} = \delta_{n,k} \tag{6}$$

und daher ist die Matrix der $p_{l,i}$ die Inverse der Matrix der $a_{n,k}$, d.h.

$$(a_{i,k})^n_{i,k=0} (p_{k,l})^n_{k,l=0} = (\delta_{i,l})^n_{i,l=0}. \tag{7}$$

Wir betrachten nun die Polynome $p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} p_{k,i} x^i$ Sie sind charakterisiert durch

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= x - s_0, \\ p_k(x) &= (x - s_{k-1}) p_{k-1}(x) - t_{k-2} p_{k-2}(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Setzt man

$$p_k^*(x) = \frac{p_k(x)}{t_0 t_1 \cdots t_{k-1}}, \tag{9}$$

so folgt aus (8)

$$x^n p_k^*(x) = x^{n-1}(p_{k-1}^*(x) + s_k p_k^*(x) + t_k p_{k+1}^*(x)). \tag{10}$$

Wegen (6) gilt dann

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} p_k(x). \tag{11}$$

Definiert man ein lineares Funktional F auf dem Vektorraum der Polynome durch

$$F(p_k) = \delta_{k,0}, \tag{12}$$

so folgt aus (11)

$$F(x^n) = a_{n,0} \tag{13}$$

und aus (10) ergibt sich, dass

$$a_{n,k} = F(x^n p_k^*(x)) \tag{14}$$

gilt.
Genau so ist $a_{n,k}^* = F(x^n p_k(x))$.
Weiters ist

$$F(p_n(x) p_m^*(x)) = F\left(\sum p_{n,i} x^i p_m^*(x)\right) = \sum p_{n,i} a_{i,m} = \delta_{n,m}. \tag{15}$$

Die Polynome $p_n(x)$ sind also orthogonal bezüglich des linearen Funktionals F. Sie enthalten die gesamte Information über die $a_{n,k}$. Da F wegen (13) durch die Folge $(a_n) := (a_{n,0})$ schon eindeutig festgelegt ist, hängt also alles nur von dieser Folge ab. Das ergibt sich auch folgendermaßen:

Sei

$$\overline{p_n}(x) = \det\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n+1} & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{2n-2} & x^{n-1} \\ a_n & a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{2n-1} & x^n \end{pmatrix} \tag{16}$$

Dann ist

$$F(\overline{p_n}(x)x^i) = 0 \text{ für } 0 \leq i < n, \tag{17}$$

weil dann zwei Spalten gleich sind.

Bezeichnet man mit $h_n((a_k))$ die Determinante der n-ten Hankelmatrix aus der Folge $(a_n) := (a_{n,0})$, d.h.

$$h_n((a_k)) = \det(a_{i+j})_{i,j=0}^{n}, \tag{18}$$

so folgt außerdem

$$h_n((a_k)) = \det(a_{i+j})_{i,j=0}^{n} = F(x^n\overline{p_n}(x)).$$

Ist $h_{n-1}((a_k)) \neq 0$, so ist $\overline{p_n}(x)$ ein Polynom genau n-ten Grades, hat also eine eindeutige Darstellung der Gestalt

$$\overline{p_n}(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i p_i(x) \text{ mit } c_n \neq 0.$$

Aus (17) folgt also $\overline{p_n}(x) = c_n p_n(x)$.

Da $p_n(x)$ normiert ist, ist also

$$\overline{p_n}(x) = h_{n-1}((a_k))p_n(x). \tag{19}$$

Aus (15) und (9) ergibt sich dann

$$h_n((a_k)) = \det(a_{i+j})_{i,j=0}^{n} = F(x^n\overline{p_n}(x)) = h_{n-1}((a_k))t_0 \quad \cdot t_{n-1}.$$

Da $h_0((a_k)) = 1$ ist, folgt (19) für alle n.

Wegen

$$(-1)^n\overline{p_n}(0) = h_{n-1}((a_{k+1})) = \det(a_{i+j+1})_{i,j=0}^{n-1}$$

erhalten wir für die Hankeldeterminanten der Folge $(a_n) := (a_{n,0})$

$$h_n((a_k)) = \det(a_{i+j})_{i,j=0}^{n} = \prod_{k=0}^{n} t_0 \quad \cdot t_{k-1} = t_0^n t_1^{n-1} \quad t_{n-1} \tag{20}$$

und

$$h_n((a_{k+1})) = \det(a_{i+j+1})_{i,j=0}^{n} = (-1)^{n+1}h_n((a_k))p_{n+1}(0). \tag{21}$$

Bemerkung: Man hätte (20) auch folgendermaßen erhalten können: Nach Definition des zu einem gegebenen Gitterweg dualen Weges kann man jeden Gitterweg von (0,0) nach $(m+n,0)$ in einen Weg von (0,0) nach (m,i) für irgendein i und einen Weg von (m,i) nach $(m+n,0)$, der als dualer Weg von (0,0) nach $(-n,i)$ interpretiert werden kann, zerlegen. Daher gilt $a_{m+n,0} = \sum_i a_{m,i}a_{n,i}^*$. Daher ist die entsprechende Hankelmatrix das Produkt von zwei Dreiecksmatrizen, wo die eine Determinante 1 hat, während die andere $a_{i,i}^* = t_0 t_1 \cdots t_{i-1}$ erfüllt.

Für die erzeugende Funktion $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ der Folge (a_n) ergibt sich aus der Rekurrenz der orthogonalen Polynome bekanntlich (vgl. z.B. [3]) der Kettenbruch

$$f(z) = \cfrac{1}{1 - s_0 z - \cfrac{t_0 z^2}{1 - s_1 z - \cfrac{t_1 z^2}{1 - s_2 z - }}}. \tag{22}$$

Wir wollen nun ein paar Beispiele betrachten.

Sei zuerst $s_k = 0$ für alle k und $t_k = q^k$ Das ergibt das einfachste q-Analogon der Catalanzahlen. Hier ist natürlich $a_{2n+1,0} = 0$. Für die entsprechenden $a_{n,k}$ und die q-Catalanzahlen $a_{2n,0} = C_n(q)$ sind keine expliziten Formeln bekannt. Man rechnet leicht nach, dass die Folge dieser q-Catalanzahlen $C_n(q)$ mit

$$1, 1, 1 + q, 1 + 2q + q^2 + q^3, 1 + 3q + 3q^2 + 3q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6,$$

beginnt. Sie wurden von L. Carlitz und J. Riordan im Jahre 1964 in [4] eingeführt und vor allem von Carlitz genauer studiert. Wir wollen sie daher der Kürze halber die Carlitz' schen q-Catalanzahlen nennen.

Hier ist

$$f(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z^2}{1 - \cfrac{qz^2}{1 - }}} = \frac{1}{1 - z^2 f(\sqrt{q} z)},$$

woraus sich durch Koeffizientenvergleich die Rekursion

$$C_n(q) = \sum_{k=0}^{n-1} q^k C_k(q) C_{n-1-k}(q) \text{ mit } C_0(q) = 1 \text{ ergibt.} \tag{23}$$

Man kann aber den Kettenbruch auch folgendermaßen auflösen:

$$f(z) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z^2}{1 - qz^2 f(qz)}} = \frac{1 - qz^2 f(qz)}{1 - z^2 - qz^2 f(qz)}.$$

Das liefert

$$f(z) = 1 + z^2 f(z) - qz^2 f(qz) + qz^2 f(z) f(qz).$$

Hier liefert Koeffizientenvergleich eine weitere Rekursion

$$C_{n+1}(q) = C_n(q) + \sum_{k=0}^{n-1} q^{2k+1} C_k(q) C_{n-k}(q). \tag{24}$$

Die $p_n(x)$ sind dann durch
$p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_k(x) = xp_{k-1}(x) - q^{k-2} p_{k-2}(x)$ gegeben. Das führt auf die explizite Darstellung

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i q^{2\binom{i}{2}} \begin{bmatrix} n-i \\ i \end{bmatrix} x^{n-2i} \tag{25}$$

Um diese zu verifizieren, braucht man nur den Koeffizienten von

$$(-1)^i q^{2\binom{i}{2}} x^{n+1-2i} \text{ in } xp_n(x) - q^{n-1} p_{n-1}(x) = p_{n+1}(x)$$

zu vergleichen. Das ergibt die Beziehung

$$\begin{bmatrix} n-i \\ i \end{bmatrix} + q^{n-1-2(i-1)} \begin{bmatrix} n-1-(i-1) \\ i-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-i+1 \\ i \end{bmatrix},$$

die man leicht nachrechnet.

Für die Hankeldeterminanten ergibt sich in diesem Fall

$$h_n((a_k)) = \det(a_{i+j})_{i,j=0}^{n} = \prod_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} = q^{\binom{n+1}{3}}$$

und

$$h_{2n-1}((a_{k+1})) = \det(a_{i+j+1})_{i,j=0}^{2n-1} = (-1)^n q^{2\binom{n}{2}} q^{\binom{2n}{3}},$$

sowie

$$h_{2n}((a_{k+1})) = 0.$$

*

Nun wollen wir allgemeiner Dyckwege mit den Gewichten $t_{2k} = q^k$, $t_{2k+1} = sq^k$ mit einem Parameter $s \neq 0$ betrachten. Die erzeugende Funktion $f(z, s) = \sum C_n(q, s) z^{2n}$ der entsprechenden q-Catalanzahlen $C_n(q, s)$ ist dann nach (22) gegeben durch

$$f(z, s) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z^2}{1 - sz^2 f(\sqrt{q}z, s)}} = \frac{1 - sz^2 f(\sqrt{q}z, s)}{1 - z^2 - sz^2 f(\sqrt{q}z, s)}$$

Das ergibt die Rekurrenz

$$C_{n+1}(q,s) = C_n(q,s) + s\sum_{k=0}^{n-1} q^k C_k(q,s)C_{n-k}(q,s) \tag{26}$$

mit $C_0(q,s) = 1$.

Das sind im wesentlichen die q-Catalanzahlen von Polya und Gessel (vgl.[9], [11], [14]) und (26) ist der Spezialfall der Formel (6.6) bzw. (6.8) von [12], wenn man dort $a = q, b = q^{-1}$ setzt.

Vergleicht man mit der Definition von $C_n(q)$, so ergibt sich

$$C_n(q) = C_n(q^2, q)$$

Für die zu den q-Catalanzahlen von Polya und Gessel gehörigen orthogonalen Polynome gilt

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, p_1(x) = x,\\ p_{2k}(x) &= xp_{2k-1}(x) - q^{k-1}p_{2k-2}(x)\\ p_{2k+1}(x) &= xp_{2k}(x) - q^{k-1}sp_{2k-1}(x). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} p_{2k}(x) &= xp_{2k-1}(x) - q^{k-1}p_{2k-2}(x)\\ &= x^2p_{2k-2}(x) - q^{k-2}sxp_{2k-3}(x) - q^{k-1}p_{2k-2}(x)\\ &= x^2p_{2k-2}(x) - q^{k-2}s(p_{2k-2}(x) + q^{k-2}p_{2k-4}(x)) - q^{k-1}p_{2k-2}(x) \end{aligned}$$

Setzt man

$$p_{n,0}(x) = p_{2n}(\sqrt{x}), \tag{27}$$

so gilt also

$$p_{n+1,0}(x) = \left(x - q^n\left(1 + \frac{s}{q}\right)\right)p_{n,0}(x) - q^{2(n-1)}sp_{n-1,0}(x) \tag{28}$$

mit $p_{0,0}(x) = 1, p_{1,0}(x) = (x-1)$.

Analog ergibt sich

$$p_{2k+1}(x) = (x^2 - q^{k-1}(1+s))p_{2k-1}(x) - q^{2k-3}sp_{2k-3}(x). \tag{29}$$

Setzt man hier

$$p_{n,1}(x) = \frac{p_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \tag{30}$$

so erhält man

$$p_{n+1,1}(x) = (x - q^n(1+s))p_{n,1}(x) - q^{2n-1}sp_{n-1,1}(x) \tag{31}$$

mit $p_{0,1}(x) = 1, p_{1,1}(x) = (x-1-s)$.

Sei nun

$$\varphi_0(z) = \sum p_{n,0}(x) q^{-\binom{n+1}{2}} z^n,$$
$$\varphi_1(z) = \sum p_{n,1}(x) q^{-\binom{n+1}{2}} z^n \tag{32}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\varphi_0(z) = 1 &+ \frac{z(x-1)}{q} \sum_{n\geq 2} p_{n-1,0}(x) q^{-\binom{n+1}{2}} z^n \\ &- \left(1+\frac{s}{q}\right) \sum_{n\geq 2} p_{n-1,0}(x) q^{-\binom{n+1}{2}+n-1} z^n \\ &- s \sum_{n\geq 2} p_{n-2,0}(x) q^{-\binom{n+1}{2}+2(n-2)} z^n\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left(1+\frac{z}{q}\right)\left(1+\frac{sz}{q^2}\right)\varphi_0(z) = 1 + \frac{sz}{q^2} + \frac{xz}{q}\varphi_0\left(\frac{z}{q}\right).$$

Daraus ergibt sich schließlich

$$\varphi_0(z) = \sum_{i\geq 0} \frac{q^{-\binom{i+1}{2}} x^i z^i}{\left(1+\frac{z}{q}\right) \quad \left(1+\frac{z}{q^{i+1}}\right)\left(1+\frac{sz}{q^2}\right) \quad \left(1+\frac{sz}{q^{i+1}}\right)}. \tag{33}$$

Analog zeigt man

$$\varphi_1(z) = \sum_{i\geq 0} \frac{q^{-\binom{i+1}{2}} x^i z^i}{\left(1+\frac{z}{q}\right) \quad \left(1+\frac{z}{q^{i+1}}\right)\left(1+\frac{sz}{q}\right) \quad \left(1+\frac{sz}{q^{i+1}}\right)}. \tag{34}$$

Setzt man

$$h(z) = \frac{z}{\left(1+\frac{z}{q}\right)\left(1+\frac{sz}{q}\right)}, \tag{35}$$

so schreiben sich diese Formeln in der Gestalt

$$z\varphi_1(z) = \sum_{i\geq 0} x^i h(z) h\left(\frac{z}{q}\right) \quad \cdot h\left(\frac{z}{q^i}\right) \tag{36}$$

und

$$\varphi_0(z) = \left(1 + \frac{sz}{q}\right)\varphi_1(z). \tag{37}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$p_{n,0}(x) = p_{n,1}(x) + q^{n-1} s p_{n-1,1}(x). \tag{38}$$

Aus (36) ergibt sich für die erzeugende Funktion der Koeffizienten von x^{i-1} in $p_{n-1,1}(x)$

$$P(i,s,z) := \sum_{n\geq 1} p_{n-1,1,i-1} q^{-\binom{n}{2}} z^n = h(z) h\left(\frac{z}{q}\right) \quad h\left(\frac{z}{q^{i-1}}\right),$$

d.h.

$$P(x,s,z) = P(1,s,z) P\left(1,s,\frac{z}{q}\right) \quad P\left(1,s,\frac{z}{q^{x-1}}\right). \tag{39}$$

Analog ergibt sich

$$P_0(i,s,z) := \sum_{n\geq 1} p_{n-1,0,i-1} q^{-\binom{n}{2}} z^n = \frac{z}{1+\frac{z}{q}} h\left(\frac{z}{q}\right) \cdot\cdot h\left(\frac{z}{q^{i-1}}\right),$$

d.h.

$$P_0(x,s,z) = P_0(1,s,z) P\left(1,s,\frac{z}{q}\right) \quad P\left(1,s,\frac{z}{q^{x-1}}\right) \tag{40}$$

mit

$$P_0(1,s,z) = \frac{z}{1+\frac{z}{q}}.$$

Sei

$$h_i(z) = \frac{1}{(1+z)(1+qz) \quad (1+q^{i-1}z)} = \sum_n \begin{bmatrix} n+i-1 \\ i-1 \end{bmatrix} (-z)^n$$

und $h_0(z) = 1$.

Aus (33) folgt, wenn man z durch qz ersetzt,

$$q^{-\binom{n}{2}} p_{n,0}(x) = \langle z^n \rangle \sum q^{-\binom{i}{2}} x^i z^i h_{i+1}\left(\frac{z}{q^i}\right) h_i\left(\frac{sz}{q^i}\right). \tag{41}$$

Nun ist

$$h_{i+1}\left(\frac{z}{q^i}\right) h_i\left(\frac{sz}{q^i}\right) = \sum_l \begin{bmatrix} n-l+i \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l+i-1 \\ i-1 \end{bmatrix} (-1)^n q^{-in} s^l$$

Daher ergibt sich

$$p_{n,0}(x) = \sum (-1)^{n-i} q^{\binom{n-i}{2}} x^i \sum_{l=0}^{n-i} \begin{bmatrix} n-l \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i+l-1 \\ l \end{bmatrix} s^l \tag{42}$$

Analog ergibt sich

$$p_{n,1}(x) = \sum (-1)^{n-i} q^{\binom{n-i}{2}} x^i \sum_{l=0}^{n-i} \begin{bmatrix} n-l \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i+l \\ i \end{bmatrix} s^l \tag{43}$$

Sei nun F_0 das lineare Funktional auf dem Vektorraum der Polynome, das durch $F_0(x^n) = C_n(q,s)$ definiert ist und analog F_1 mit

$$F_1(x^n) = C_{n+1}(q,s).$$

Wendet man auf (33) das lineare Funktional F_0 an, so ergibt sich, wenn man z durch qz ersetzt,

$$1 = \sum_{i \geq 0} q^{-\binom{i}{2}} \frac{C_i(q,s) z^i}{(1+z)\left(1+\frac{z}{q}\right) \quad \left(1+\frac{z}{q^i}\right)\left(1+\frac{sz}{q}\right) \quad \left(1+\frac{sz}{q^i}\right)}$$

Das ist Formel (6.2) von [12].

Daraus folgt einerseits

$$z = \sum_{i \geq 0} q^{-\binom{i}{2}} \frac{C_i(q,s) z^{i+1}}{(1+z)\left(1+\frac{z}{q}\right) \quad \left(1+\frac{z}{q^i}\right)\left(1+\frac{sz}{q}\right) \quad \left(1+\frac{sz}{q^i}\right)} \tag{44}$$

und durch Multiplikation mit $1+z$

$$z = \sum_{i \geq 1} q^{-\binom{i}{2}} \frac{C_i(q,s) z^i}{\left(1+\frac{z}{q}\right) \quad \left(1+\frac{z}{q^i}\right)\left(1+\frac{sz}{q}\right) \quad \left(1+\frac{sz}{q^i}\right)}.$$

Das ist Formel (5.2) von [9].

Aus (34) ergibt sich genauso

$$z = \sum_{i \geq 0} q^{-\binom{i}{2}} \frac{C_{i+1}(q,s) z^{i+1}}{\begin{gathered}(1+z)\left(1+\frac{z}{q}\right) \quad \left(1+\frac{z}{q^i}\right) \\ \cdot (1+sz)\left(1+\frac{sz}{q}\right) \quad \left(1+\frac{sz}{q^i}\right)\end{gathered}}. \tag{45}$$

*

Man kann (28) als die orthogonalen Polynome zu den Gitterwegen mit den Gewichten

$$\begin{aligned} s_0 &= 1, \\ s_k &= q^k + q^{k-1}s, k \geq 1, \\ t_k &= q^{2k}s \end{aligned}$$

deuten.

Die entsprechenden $a_{n,k}$, die wir jetzt $c_{n,k}$ nennen, sind gegeben durch

$$\begin{aligned} c_{0,k} &= \delta_{0,k} \\ c_{n,0} &= c_{n-1,0} + sc_{n-1,1} \\ c_{n,k} &= c_{n-1,k-1} + (q^k + q^{k-1}s)c_{n-1,k} + q^{2k}sc_{n-1,k+1} \end{aligned}$$

Weiters ist

$$c_{n,0} = C_n(q, s).$$

Für die Hankeldeterminanten gilt

$$h_n((C_k(q, s)) = s^{\binom{n+1}{2}} q^{2\binom{n+1}{3}} \tag{46}$$

bzw.

$$h_n((C_{k+1}(q, s)) = s^{\binom{n+1}{2}} q^{2\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}} = s^{\binom{n+1}{2}} q^{1^2+2^2+\cdots+n^2} \tag{47}$$

Durch diese beiden Hankeldeterminanten für alle n sind die $C_n(q, s)$ wieder eindeutig charakterisiert.

Eine analoge Deutung lässt (31) zu:

Hier ist $s_k = q^k(1 + s), t_k = q^{2k+1}s$.

Die entsprechenden $a_{n,k}$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} a_{0,k} &= \delta_{0,k} \\ a_{n,0} &= (1 + s)a_{n-1,0} + qsa_{n-1,1} \\ a_{n,k} &= a_{n-1,k-1} + q^k(1 + s)a_{n-1,k} + q^{2k+1}sa_{n-1,k+1} \end{aligned}$$

Weiters ist

$$a_{n,0} = C_{n+1}(q, s).$$

Für die Hankeldeterminante ergibt sich

$$h_n((C_{k+2}(q, s)) = s^{\binom{n+1}{2}} q^{1^2+2^2+\cdots+n^2+\binom{n+1}{2}} \sum_{l=0}^{n+1} s^l \tag{48}$$

Setzt man $b_{n,k} = q^{\binom{k+1}{2}} a_{n,k}$, so gilt

$$\begin{aligned} b_{0,k} &= \delta_{0,k} \\ b_{n,0} &= (1+s) b_{n-1,0} + s b_{n-1,1} \\ b_{n,k} &= q^k (b_{n-1,k-1} + (1+s) b_{n-1,k} + s b_{n-1,k+1}) \end{aligned}$$

Es gilt dann

$$b_{n,x+y} = \sum_{k \geq 0} b_{k,x} b_{n-k-1,y-1} q^{y(k+1)} \tag{49}$$

Denn man betrachte den längsten Gitterweg, der auf die Höhe $y-1$ führt. Er habe die Länge $n-k-1$. Anschließend muss es einen Aufstieg geben. Dieser hat das Gewicht q^y Schließlich bleibt ein Weg der Länge k, der auf der Höhe y beginnt und selbst die Höhe x besitzt. Das Gewicht dieses Weges ist das q^{yk}-fache des vom Nullpunkt ausgehenden Weges, weil alle Aufstiege und Abstiege das q^y-fache Gewicht haben.

Setzt man

$$A(x,s,z) = \sum_{n \geq 1} q^{\binom{x}{2}} a_{n-1,x-1} z^n \text{ für } x \geq 1 \text{ und } A(0,s,z) = 1, \tag{50}$$

so gilt also

$$A(x+y,s,z) = A(y,s,z) A(x,s,q^y z). \tag{51}$$

Daraus folgt

$$A(x,s,z) = A(1,s,z) A(1,s,qz) \quad \cdot A(1,s,q^{x-1} z). \tag{52}$$

Die Identität (7) lässt sich jetzt auch durch die folgenden äquivalenten Aussagen beschreiben:

$$\sum_{n \geq 1} p_{n-1,1,x-1} q^{-\binom{n}{2}} A(n,s,z) = z^x \tag{53}$$

bzw.

$$\sum_{n \geq 1} a_{n-1,x-1} q^{\binom{x}{2}} P_1(n,z) = z^x \tag{54}$$

Analog zeigt man für

$$\begin{aligned} A_0(x,s,z) &= \sum_{n \geq 1} q^{\binom{x}{2}} c_{n-1,x-1} z^n \\ A_0(x,s,z) &= A_0(1,s,z) A\left(1, \frac{s}{q}, qz\right) \quad \cdot A\left(1, \frac{s}{q}, q^{x-1} z\right). \end{aligned} \tag{55}$$

Diese Identitäten werden noch übersichtlicher, wenn man die folgenden Matrizen betrachtet:

$(\hat{a}_{n,k})$ mit $\hat{a}_{n,k} = a_{n-1,k-1}q^{\binom{k}{2}}$ für $n \geq 1, k \geq 1$ und $\hat{a}_{n,0} = \delta_{n,0}$, $\hat{a}_{0,k} = \delta_{k,0}$ und analog $(\hat{p}_{n,k})$ mit $\hat{p}_{n,k} = p_{n-1,k-1}q^{-\binom{n}{2}}$ für $n \geq 1$, $k \geq 1$ und $\hat{p}_{n,0} = \delta_{n,0}, \hat{p}_{0,k} = \delta_{k,0}$.

Dann ist

$$(1, z, z^2, \quad \cdot)(\hat{a}_{n,k}) = (A(0,s,z), A(1,s,z), A(2,s,z), \quad \cdot)$$

und

$$(1, z, z^2, \quad \cdot)(\hat{p}_{n,k}) = (P(0,s,z), P(1,s,z), P(2,s,z), \quad \cdot).$$

Somit gilt etwa

$$\sum_{n \geq 1} p_{n-1,1,x-1} q^{-\binom{n}{2}} A(n,s,z)$$

$$= (A(0,s,z), A(1,s,z), A(2,s,z), \quad \cdot) \begin{pmatrix} \hat{p}_{0,x} \\ \hat{p}_{1,x} \\ \hat{p}_{2,x} \\ \end{pmatrix}$$

$$= (1, z, z^2, \quad \cdot)(\hat{a}_{n,k}) \begin{pmatrix} \hat{p}_{0,x} \\ \hat{p}_{1,x} \\ \hat{p}_{2,x} \\ \end{pmatrix} = z^x$$

Interessant sind auch noch die Polynome $\pi_n(x)$, die durch

$$\begin{pmatrix} \pi_0(x) \\ \pi_1(x) \\ \pi_2(x) \\ \end{pmatrix} = (\hat{p}_{n,k}) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{x}{1!} \\ \frac{x^2}{2!} \\ \end{pmatrix} \text{ definiert sind.}$$

Sie erfüllen daher

$$\sum \pi_n(x) A(n,s,z) = e^{xz}$$

Aus der Theorie von Garsia [10] folgt, dass die Polynome $\pi_n(x)$ vom q-Faltungstyp sind und eine analoge Charakterisierung wie in der Rota'schen Theorie besitzen. Das lässt sich in unserem Fall aber auch sehr leicht direkt zeigen:

Wendet man nämlich auf die obige Gleichung den Differentiationsoperator $D=\frac{d}{dx}$ k-mal an, so ergibt sich $\sum(D^k\pi_n(x))A(n,s,z)= z^k e^{xz}$. Daher ist

$$\sum A(1,s,D)\pi_n(x)A(n,s,z)=A(1,s,z)e^{xz}=A(1,s,z)e^{\frac{x}{q}qz}$$
$$=A(1,s,z)\sum\pi_n\left(\frac{x}{q}\right)A(n,s,qz)=\sum\pi_n\left(\frac{x}{q}\right)A(n+1,s,z).$$

Koeffizientenvergleich liefert

$MA(1,s,D)\pi_n(x)=\pi_{n-1}(x)$, wenn M der Operator ist, der durch $Mx^n=q^nx^n$ definiert ist. Der Operator $MA(1,s,D)$ ist also das q-Analogon des entsprechenden Deltaoperators der Rota'schen Theorie. Diese Polynome sind vom q-Faltungstyp, d.h. sie erfüllen

$$\pi_n(x+y)=\sum_k\pi_k(x)\pi_{n-k}\left(\frac{y}{q^k}\right).$$

Denn

$$\sum\pi_n(x+y)A(n,s,z)=e^{(x+y)}=\sum\pi_k(x)A(k,s,z)e^{\frac{y}{q^k}q^kz}$$
$$=\sum\pi_k(x)A(k,s,z)\sum\pi_j\left(\frac{y}{q^k}\right)A(j,s,q^kz)$$
$$=\sum A(n,s,z)\sum\pi_k(x)\pi_{n-k}\left(\frac{y}{q^k}\right).$$

Dual dazu kann man die Polynome

$$\begin{pmatrix}\alpha_0(x)\\ \alpha_1(x)\\ \alpha_2(x)\\ \vdots\end{pmatrix}=(\hat{a}_{n,k})\begin{pmatrix}1\\ \frac{x}{1!}\\ \frac{x^2}{2!}\\ \vdots\end{pmatrix}$$

einführen.

Sie erfüllen

$$\alpha_n(x+y)=\sum\alpha_k(x)\alpha_{n-k}(q^ky)$$

und

$$M^{-1}P(1,s,D)\alpha_n(x)=M^{-1}\frac{D}{\left(1+\frac{D}{q}\right)\left(1+\frac{sD}{q}\right)}\alpha_n(x)=\alpha_{n-1}(x).$$

Sei nun

$$f_0(z,s)=\sum_{n\geq 0} C_n(q,s)z^n \tag{56}$$

und

$$f_1(z,s)=\sum_{n\geq 0} C_{n+1}(q,s)z^n \tag{57}$$

Dann ist $f(z,s)=f_0(z^2,s)$ und $f_0(z,s)=1+zf_1(z,s)$.

Aus (22) ergibt sich

$$\begin{aligned} f_1(z,s) &= \cfrac{1}{1-(1+s)z-\cfrac{qsz^2}{1-q(1+s)z-}} \\ &= \frac{1}{1-(1+s)z-qsz^2 f_1(qz,s)} \end{aligned}$$

oder damit äquivalent

$$f_1(z,s)=1+(1+s)zf_1(z,s)+qsz^2 f_1(z,s)f_1(qz,s). \tag{58}$$

Koeffizientenvergleich liefert hier

$$C_{n+1}(q,s)=C_n(q,s)+s\sum_{k=0}^{n-1} q^k C_k(q,s)C_{n-k}(q,s). \tag{59}$$

Das ist Formel (6.6) bzw. (6.8) von [12].

Für $f_0(z,s)$ ergibt sich

$$f_0(z,s)=\cfrac{1}{1-z-\cfrac{sz^2}{1-q\left(1+\frac{s}{q}\right)z-}}=\frac{1}{1-z-sz^2 f_1\left(qz,\frac{s}{q}\right)}.$$

Daraus ergibt sich

$$f_1(z,s)=1+zf_1(z,s)+szf_1\left(qz,\frac{s}{q}\right)+sz^2 f_1(z,s)f_1\left(qz,\frac{s}{q}\right). \tag{60}$$

Koeffizientenvergleich liefert hier

$$C_{n+1}(q,s)=C_n(q,s)+\frac{s}{q}\sum_{k=1}^{n} q^k C_k\left(q,\frac{s}{q}\right)C_{n-k}(q,s). \tag{61}$$

Das entspricht den Formeln (6.5) und (6.7) in [12].

Vergleicht man schließlich die Kettenbrüche von $f_0(z,s)$ und $f_1(z,s)$, so ergibt sich

$$\frac{1}{1+zf_1(z,qs)}=\frac{1}{f_1(z,s)}+sz.$$

Das liefert sofort die Formel

$$f_1(z,s)=(1+zf_1(z,qs))(1+szf_1(z,s)). \tag{62}$$

Koeffizientenvergleich gibt hier

$$C_{n+1}(q,s)=C_n(q,qs)+s\sum_{k=0}^{n-1}C_k(q,qs)C_{n-k}(q,s), \tag{63}$$

was den Formeln (6.3) bzw. (6.4) in [12] entspricht.

Bemerkung: Diese Identität legt die folgende Interpretation von $C_n(q,s)$ nahe: $C_n(q,s)$ ist das Gewicht aller Dyckwege von (0,0) nach $(2n,0)$ wo jedes "Tal" der Höhe k das Gewicht $q^k s$ besitzt.

Das ergibt sich sofort, wenn man einen Dyckweg von (0,0) nach $(2n,0)$ in einen Aufstieg, einen (eventuell leeren) maximalen Dyckweg von (1,1) nach $(1+2k,1)$, den darauf folgenden Abstieg und einen (eventuell leeren) restlichen Dyckweg von $(2k+2,0)$ nach $(2n,0)$ zerlegt.

Eine weitere Interpretation ergibt sich folgendermaßen: Vor jedem Tal gibt es einen Aufstieg und $i+1$ Abstiege für ein $i\geq 0$. Ersetzt man diese durch eine Abstieg der Höhe i und lässt die anderen Aufstiege fest, so erhält man einen Gitterweg von (0,0) nach $(n,0)$ mit Aufstiegen der Höhe 1 und Abstiegen beliebiger Höhe. Dem obigen Gewicht entspricht hier das Gewicht, das jedem Aufstieg das Gewicht 1 und jedem Abstieg auf die Höhe k das Gewicht $q^k s$ zuordnet.

Für den Fall der $C_n(q)$ ist $s=1, q=q^2$ und man erhält für die entsprechenden Hankeldeterminanten

$$h_n((C_k(q)))=q^{\binom{n+1}{2}+4\binom{n+1}{3}}, \tag{64}$$

$$h_n((C_{k+1}(q)))=q^{2(1^2+2^2+\cdots+n^2)+\binom{n+1}{2}}, \tag{65}$$

$$h_n((C_{k+2}(q)))=q^{2(1^2+2^2+\cdots+n^2)+2\binom{n+1}{2}}[n+2]. \tag{66}$$

Für die orthogonalen Polynome ergibt sich hier aus (25)

$$p_{n,0}(x)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i q^{2\binom{i}{2}}\begin{bmatrix}2n-i\\ i\end{bmatrix}x^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}q^{2\binom{n-i}{2}}\begin{bmatrix}n+i\\ 2i\end{bmatrix}x^i \tag{67}$$

bzw.

$$p_{n,1}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} q^{2\binom{n-i}{2}} \begin{bmatrix} n+i+1 \\ 2i+1 \end{bmatrix} x^i \tag{68}$$

G. Andrews [2] hat ein q-Analogon gefunden, welches durch eine analoge Formel wie für $q = 1$ gegeben ist und außerdem eine einfache Rekurrenzrelation besitzt. Hier soll ein neuer Zugang zu diesem q-Analogon gegeben werden. Wir betrachten wieder Dyckwege, d.h. Gitterwege ohne horizontale Stücke und ordnen jedem Aufstieg das Gewicht 1 und jedem Abstieg, der auf der Höhe k endet, das Gewicht $t_k(s) = t(q^k s)$ zu mit $t(s) = \frac{4q^2 s}{(1+qs)(1+q^2 s)}$ zu.

Für die entsprechenden q-Catalanzahlen, die wir mit $Ca_n(q,s)$ bezeichnen wollen, ergibt sich dann sofort die Rekursion

$$Ca_{n+1}(q,s) = t(s) \sum_{k=0}^{n} Ca_k(q,qs) Ca_{n-k}(q,s).$$

Das q-Analogon von Andrews entspricht dem Fall $s = 1$. Da für $s \neq 1$ keine explizite Formel für diese q-Catalanzahlen zu existieren scheint, ist diese Rekursion wahrscheinlich nicht sehr brauchbar.

Nun wollen wir die orthogonalen Polynome $p_n(x)$ explizit berechnen. Es gilt

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{4^i q^{i^2+i} s^i}{\prod_{j=0}^{i-1} (1+q^{j+1}s)(1+q^{n-j}s)} \begin{bmatrix} n-i \\ i \end{bmatrix} x^{n-2i} \tag{69}$$

Denn wenn wir die Koeffizienten von x^{n+1-2i} in $p_{n+1}(x) = xp_n(x) - t_{n-1} p_{n-1}(x)$ vergleichen, erhalten wir

$$\begin{aligned} q^i(1+q^{n+1-i}s) \begin{bmatrix} n+1-i \\ i \end{bmatrix} &= q^i(1+q^{n+1}s) \begin{bmatrix} n-i \\ i \end{bmatrix} \\ &\quad + q^{n+1-i}(1+q^i s) \begin{bmatrix} n-i \\ i-1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

was man sofort durch Ausrechnen verifizieren kann.

Betrachten wir zunächst beliebige Dyckwege, wo die Abstiege die Gewichte t_k besitzen.

Sei $G_m(k)$ das Gewicht aller Wege mit m Abstiegen, die auf die Höhe $k-1$ führen, d.h.

$$G_m(k) = a_{2m+k-1,k-1} = F(x^{2m+k-1} p_{k-1}^*). \tag{70}$$

Aus der kombinatorischen Bedeutung von $G_m(k)$ ergibt sich sofort

$$G_n(k+1) = G_n(k) + t_k G_{n-1}(k+2). \tag{71}$$

Das folgt auch sofort durch einfache Rechnung:

$$\begin{aligned} G_n(k+1) &= F(x^{2n+k-1} x p_k^*(x)) \\ &= F(x^{2n+k-1} p_{k-1}^*(x) + x^{2n-2+k+1} t_k p_{k+1}^*(x)) \\ &= G_n(k) + t_k G_{n-1}(k+2). \end{aligned}$$

Daraus lässt sich eine weitere Interpretation der $G_n(x)$ herleiten. $G_n(k) = \sum t_{c_1} t_{c_2} \cdots t_{c_n}$, wobei $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ alle Folgen durchläuft mit $0 \leq c_1 < k, c_{i+1} \leq c_i + 1$.

Denn $G_1(1) = C_1(q) = t_0$.

Hier stimmt die Behauptung also. Wenn sie bereits für alle $m < n$ und alle $k \geq 0$ bewiesen ist, so ergibt sich für n mit Induktion nach k

$$\begin{aligned} G_n(k+1) &= G_n(k) + t_k G_{n-1}(k+2) \\ &= \sum_{c_1 < k} t_{c_1} \cdots t_{c_n} + t_k \sum_{c_2 \leq k+1} t_{c_2} \cdots t_{c_n} = \sum_{c_1 < k+1} t_{c_1} \cdots t_{c_n} \end{aligned}$$

woraus alles folgt.

Dieses Resultat kann folgendermaßen interpretiert werden: Ein Dyckweg mit n Abstiegen, der auf die Höhe k führt, endet im Punkt $(2n+k, k)$. Die Höhen c_i der Abstiege – von rechts nach links betrachtet – erfüllen $0 \leq c_1 < k, c_{i+1} \leq c_i + 1$. Durch die Angabe dieser Höhen ist der Dyckweg eindeutig festgelegt und sein Gewicht kann also daraus unmittelbar abgelesen werden.

Für $q = 1$ ist $G_m(x)$ ein Polynom m-ten Grades, das sogenannte Gouldpolynom $G_m(x) = \frac{x}{2m+x}\binom{2m+x}{m}$.

Diese Polynome sind durch die folgenden Eigenschaften vollständig charakterisiert:

1) $\deg G_n(x) = n$
2) $G_n(0) = \delta_{n,0}$
3) $E^{-2}\Delta G_n(x) = G_{n-1}(x)$

Denn 2) ist klar und 3) folgt sofort aus (87).

Entwickelt man $G_n(x)$ mit Hilfe der Binomialkoeffizienten in der Form $G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\binom{x}{k}$, so ergibt sich aus 2) und 3) sofort

$$\begin{aligned} c_{n,k} &= \Delta^k G_n(x)|_{x=0} = E^{2k}(E^{-2}\Delta)^k G_n(x)|_{x=0} = E^{2k} G_{n-k}(x)|_{x=0} \\ &= G_{n-k}(2k) \end{aligned}$$

Man erhält also die explizite Formel

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} G_{n-k}(2k)\binom{x}{k}. \tag{72}$$

Für die erzeugende Funktion bedeutet das

$$G(x,z) = G(1,z)^x = \sum_k \binom{x}{k} z^k G(1,z)^{2k} = (1 + zG(1,z)^2)^x,$$

was wegen evident ist.

Im Fall der Gewichte auf den Dyckwegen, die zu den Carlitz'schen q-Catalanzahlen führen, ergibt sich aus der kombinatorischen Bedeutung die wichtige Formel

$$G_n(x+y) = \sum_k G_{n-k}(y) q^{ky} G_k(x). \tag{73}$$

Denn sei $n-k$ die Anzahl der Abstiege für das längste Anfangsstück des Dyckweges, das auf der Höhe $y-1$ endet. Darauf muss natürlich ein Aufstieg folgen. Der Restweg ist schließlich ein Dyckweg mit k Abstiegen von (0,0) nach $(*, x-1)$, der um y Einheiten in die Höhe gehoben wurde, so dass jeder der k Abstiege das q^y-fache Gewicht des ursprünglichen Weges besitzt.

Für die erzeugende Funktion $G(x,z) := \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) z^n$ der $G_n(x)$ ergibt sich daraus die Beziehung

$$G(x+y,z) = G(y,z)G(x,q^y z), \tag{74}$$

aus welcher schließlich $G(x,z) = G(1,z)G(1,qz) \quad \cdot G(1,q^{x-1}z)$ folgt.

Nun ist $G(1,z) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(q) z^n$.

Beachtet man, dass $G_n(2) = a_{2n+1,1} = a_{2n+2,0} = C_{n+1}(q)$, so folgt $zG(2,z) = G(1,z) - 1$ und daher

$$G(1,z) = 1 + zG(2,z) = 1 + zG(1,z)G(1,qz). \tag{75}$$

*

Die Formel (72) besitzt wieder ein schönes q-Analogon, nämlich

$$G(x,z) = \sum_k \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} q^{3\binom{k}{2}} z^k G(2k,z). \tag{76}$$

Für die Koeffizienten ergibt sich daher

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} q^{3\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} G_{n-k}(2k). \tag{77}$$

Zum Beweis gehen wir folgendermaßen vor:

$$\begin{aligned} G(x,z) &= G(x-1,z)G(1,q^{x-1}z) \\ &= G(x-1,z)(1+q^{x-1}zG(1,q^{x-1}z)G(1,q^{x}z)) \\ &= G(x-1,z)+q^{x-1}zG(x+1,z) \\ &= G(x-1,z)+q^{x-1}zG(1,z)G(1,qz)G(x-1,q^2z) \\ &= (1+q^{x-1}zG(1,z)G(1,qz)\varepsilon^2)G(x-1,z). \end{aligned}$$

Nun gilt die Formel (vgl. z.B. [5])

$$(1+a)(1+qa)\quad (1+q^{x-1}a)=\sum_k \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}}a^k$$

Wendet man diese mit $a=z(G(1,z)\varepsilon)^2$ an, so ergibt sich

$$G(x,z)=\prod_{i=0}^{x-1}(1+q^iz(G(1,z)\varepsilon)^2)1=\sum_k \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} q^{3\binom{k}{2}}z^kG(2k,z),$$

wie behauptet.

Wir wollen nun mit einer Methode, die wir bereits in [7] verwendet haben, eine weitere Ableitung der Formel (77) geben. Zu diesem Zweck betrachten wir beliebige (nicht notwendig nichtnegative) Gitterwege mit Aufstiegen und Abstiegen der Höhe 1, wobei das Gewicht eines Abstieges auf die Höhe k durch q^k gegeben ist. Wir codieren einen solchen Gitterweg der Länge s durch ein Wort $y_{i_1}y_{i_2}\quad\cdot y_{i_s}$, wobei jedem Aufstieg der Buchstabe y_0 und jedem Abstieg der Buchstabe y_1 zugeordnet sei. Wir nehmen an, dass die y_i die q-Kommutativitätsregeln $y_0y_1=qy_1y_0$ erfüllen. Dann kann jedes Wort $\nu=y_{i_1}y_{i_2}\quad\cdot y_{i_s}$ eindeutig in der Gestalt $\nu=\alpha(\nu)y_1^dy_0^u$ geschrieben werden, wobei d die Anzahl der Abstiege und u die Anzahl der Aufstiege bedeutet. Man sieht nun leicht mit Induktion nach der Länge des Wortes, dass $\alpha(\nu)=q^{\binom{d+1}{2}}w(\nu)$ gilt, wenn $w(\nu)$ das Gewicht des Weges, der durch das Wort ν codiert wird, bedeutet. Denn das stimmt für $s=1\quad w(y_0)=1=\alpha(y_0)$ und $\alpha(y_1)=1=qw(y_1)$. Ist es schon für $w(\nu)$ gezeigt, so ergibt sich $w(\nu y_0)=w(\nu)$ und $w(\nu y_1)=w(\nu)q^{u-d-1}$ Nun ist $\nu y_1=\alpha(\nu)y_1^dy_0^uy_1=q^u\alpha(\nu)y_1^{d+1}y_0^u$ und somit

$$q^{\binom{d+2}{2}}w(\nu y_1)=q^uq^{\binom{d+1}{2}}w(\nu)=q^u\alpha(\nu)=\alpha(\nu y_1),\ \text{wzzw.}$$

Jeder Weg von (0,0) nach $(2n+x-1,x-1)$ führt über genau einen Punkt der Form $(2n-1,2k-1)$. Dieser hat genau $n-k$ Abstiege.

Der Restweg von $(2n-1, 2k-1)$ nach $(2n+x-1, x-1)$ hat die Länge x und genau k Abstiege. Dabei tritt jedes Wort der Länge x auf, weil keiner dieser Wege negativ werden kann. Nun ist nach dem q-binomischen Lehrsatz

$$(y_1 + y_0)^x = \sum \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} y_1^k y_0^{x-k}$$

Somit gilt für jeden Weg ν von (0,0) nach $(2n-1, 2k-1)$, dass die Menge aller Fortsetzungen zu einem Weg nach $(2n+x-1, x-1)$ durch $\nu \left[\begin{smallmatrix} x \\ k \end{smallmatrix}\right] y_1^k y_0^{x-k}$ codiert ist. Summiert man über alle solchen ν, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_\nu \alpha(\nu) y_1^{n-k} y_0^{n+k-1} &= q^{\binom{n-k+1}{2}} \sum_\nu w(\nu) y_1^{n-k} y_0^{n+k-1} \\ &= G_{n-k}(2k) y_1^{n-k} y_0^{n+k-1} q^{\binom{n-k+1}{2}} \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \sum_\nu \nu \sum_k \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} y_1^k y_0^{x-k} &= \sum_k G_{n-k}(2k) y_1^{n-k} y_0^{n+k-1} q^{\binom{n-k+1}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} y_1^k y_0^{x-k} \\ &= q^{\binom{n+1}{2}} \sum_k G_{n-k}(2k) q^{3\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} y_1^n y_0^{n+x-1} \end{aligned}$$

Für das Gewicht $G_n(x)$ der Menge aller dieser Wege ergibt sich daher nach den obigen Überlegungen

$$G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} q^{3\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} G_{n-k}(2k).$$

Wir können nun die q-Gould-Polynome $G_n(x)$ ganz analog charakterisieren wie im Fall $q = 1$.

Wir bezeichnen endliche Linearkombinationen der q-Binomialkoeffizienten $\left[\begin{smallmatrix} x \\ k \end{smallmatrix}\right]$ mit Koeffizienten aus dem Körper der rationalen Funktionen in der Unbestimmten q als q-Polynome. Betrachtet man auf diesem Vektorraum die linearen Operatoren E und Δ, die durch $E\left[\begin{smallmatrix} x \\ k \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} x+1 \\ k \end{smallmatrix}\right]$ und $\Delta\left[\begin{smallmatrix} x \\ k \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{q^x}\left(\left[\begin{smallmatrix} x+1 \\ k \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} x \\ k \end{smallmatrix}\right]\right)$ oder damit äquivalent durch $\Delta q^{\binom{k}{2}} \left[\begin{smallmatrix} x \\ k \end{smallmatrix}\right] = q^{\binom{k-1}{2}} \left[\begin{smallmatrix} x \\ k-1 \end{smallmatrix}\right]$ definiert sind, so ist (71) gleichbedeutend mit

$$E^{-2} \Delta G_n(x) = G_{n-1}(x). \tag{78}$$

Die anderen zwei Eigenschaften der klassischen Gouldpolynome sind offenbar auch erfüllt und man überlegt sich leicht, dass die $G_n(x)$ dadurch eindeutig charakterisiert sind.

*

Wir wollen nun eine weitere Formel für $G_n(x)$, die schon in der ursprünglichen Arbeit von Carlitz und Riordan in etwas undurchschaubarer Verkleidung vorkommt, nämlich

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix} G_{n-k}(k) \tag{79}$$

beweisen.

Diese Formel ist wieder äquivalent mit

$$G(x,z) = \sum_k \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} z^k G(k,z). \tag{80}$$

Hier gehen wir von der ebenfalls wohlbekannten Formel

$$\frac{1}{(1-a)(1-qa) \quad (1-q^{x-1}a)} = \sum_k \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix} a^k$$

aus und wenden sie für $a = zG(1,z)\varepsilon$ an. Das ergibt

$$\frac{1}{(1-zG(1,z)\varepsilon)(1-qzG(1,z)\varepsilon) \quad \cdot (1-q^{x-1}zG(1,z)\varepsilon)} 1$$
$$= \sum_k \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix} (zG(1,z)\varepsilon)^k 1 = \sum_k \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{k}{2}} z^k G(k,z).$$

Wir müssen nur mehr zeigen, dass $(1-q^x zG(1,z)\varepsilon)G(x+1,z) = G(x,z)$ oder $G(x+1,z) - q^x zG(1,z)\ G(x+1,qz) = G(x,z)$ gilt. Das ist aber gleichbedeutend mit der bereits bewiesenen Formel

$$G(1,q^x z) - q^x zG(1,q^x z)G(1,q^{x+1}z) = 1.$$

*

Auch die Formel (79) hat eine einfache kombinatorische Interpretation. Dazu suchen wir für einen gegebenen Weg von (0,0) nach $(2n+x-1, x-1)$ den letzten Abstieg vor welchem genau $n-1$ Aufstiege und eine gewisse Anzahl $n-k$ von Abstiegen liegen und gehen gehen analog wie oben vor.

Summiert man über alle Wege von (0,0) nach $(2n-k-1, k-1)$, so erhält man

$$\sum_\nu \nu = \sum_\nu \alpha(\nu) y_1^{n-k} y_0^{n-1} = q^{\binom{n-k+1}{2}} \sum_\nu w(\nu) y_1^{n-k} y_0^{n-1}$$
$$= q^{\binom{n-k+1}{2}} G_{n-k}(k) y_1^{n-k} y_0^{n-1}$$

Auf so einen Weg folgt ein Aufstieg und dann ein beliebiger Weg von $(2n-k,k)$ nach $(2n+x-1,x-1)$. Summiert man über alle diese Wege, so ergibt sich $\left[{x+k-1 \atop k}\right] y_1^k y_0^{x-1}$

Daher erhalten wir insgesamt

$$q^{\binom{n-k+1}{2}} \sum_k G_{n-k}(k) y_1^{n-k} y_0^n \left[\begin{matrix} x+k-1 \\ k \end{matrix}\right] y_1^k y_0^{x-1}$$

Für die Gewichte ergibt sich also die gesuchte Formel.

*

Im allgemeinen Fall kann man natürlich keine so schönen Formeln erwarten, obwohl die Situation ganz ähnlich ist. Wenn wir Dyckwege betrachten, deren Abstiege wieder die Gewichte t_k besitzen, so lassen sich diese wie oben zerlegen. Um das Gewicht der Restwege zu bestimmen, sei $H_k(x,y)$ das Gewicht der Dyckwege, die von $(0,2k+y-1)$ ausgehen, die Länge x besitzen und genau k Abstiege haben. Sie enden dann im Punkt $(x,x+y-1)$. Damit die Wege nichtnegativ bleiben, betrachten wir nur $y \geq -k+1$. Dann ergibt sich sofort

$$H_k(x,y) = t_{x+y-1} H_{k-1}(x-1,y+2) + H_k(x-1,y) \tag{81}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} H_0(x,y) &= 1, x \geq 0, \text{ und} \\ H_k(0,y) &= \delta_{0,y}. \end{aligned}$$

Dann folgt für $n \geq 1$ mit derselben kombinatorischen Überlegung wie oben

$$G_n(x) = \sum_{k \geq 1} G_{n-k}(2k) H_k(x,0) \tag{82}$$

bzw.

$$G_n(x) = \sum_{k \geq 1} G_{n-k}(k) H_k(x+k-1,-k+1). \tag{83}$$

Für den Fall $t_k = q^k$ verifiziert man sofort die Formel

$$H_k(x,y) = q^{ky+3\binom{k}{2}} \left[\begin{matrix} x \\ k \end{matrix}\right]$$

Denn sie erfüllt wegen $\left[{x+1 \atop k}\right] - \left[{x \atop k}\right] = q^{x-k+1}\left[{x \atop k-1}\right]$ die obige Rekurrenz und natürlich auch die Randbedingungen.

Wir wollen nun zeigen, dass die Funktionen $G_n(x)$, die oben definiert wurden durch $G_n(0) = \delta_{n,0}$ und $G_n(k+1) = G_n(k) + t_k G_{n-1}(k+2)$ im Fall $t_k(s) = t(q^k s)$ mit $t(s) = \frac{4q^2 s}{(1+qs)(1+q^2 s)}$ für $s = 1$ ebenfalls explizit dargestellt werden können:

Für alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ und $x \geq 0$ gilt

$$G_n(x) = \frac{(2q)^{2n}}{\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)(1+q^{x+j})} \frac{[x]}{[x+2n]} \begin{bmatrix} x+2n \\ n \end{bmatrix} \tag{84}$$

Beweis:

$$\frac{G_n(x+1)-G_n(x)}{t_x} = \frac{(2q)^{2n-2}}{\prod_{j=1}^{n-1}(1+q^j)(1+q^{x+2+j})} \frac{[2n+x-1]!}{[x+n+1]![n-1]!} \cdot r$$

$$\text{mit } r = \frac{(1+q^{x+1})[x+1][2n+x] - (1+q^{x+n+1})[x+n+1][x]}{(1+q^n)[n]q^x}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &(q-1)^2(1+q^{x+1})[x+1][2n+x] - (1+q^{x+n+1})[x+n+1][x] \\ &= \left((q^{2x+2}-1)(q^{2n+x}-1) - (q^{2n+2x+2}-1)(q^x-1)\right) \\ &= (q^{2n+3x+2} - q^{2n+x} - q^{2x+2} - q^{2n+3x+2} + q^x + q^{2n+2x+2}) \\ &= (1-q^{x+2})(1-q^n)(1+q^n)q^x \end{aligned}$$

und daher ergibt sich

$$r = [x+2].$$

Somit ist $\frac{G_n(x+1)-G_n(x)}{t_x} = G_{n-1}(x+2)$, wie behauptet.

Speziell ergibt sich also für die entsprechenden q-Catalanzahlen, die wir mit $Ca_n(q)$ bezeichnen wollen,

$$\begin{aligned} Ca_n(q) = G_n(1) &= \frac{1}{[2n+1]} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n \end{bmatrix} \frac{(2q)^{2n}}{\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)(1+q^{j+1})} \\ &= \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} \frac{(2q)^{2n}}{(1+q)(1+q^{n+1})\prod_{j=2}^{n}(1+q^j)^2} \end{aligned}$$

für $n \geq 1$.

Andrews hat in [2] statt $Ca_n(1)$ die Ausdrücke

$$\frac{2q}{1+q} Ca_n(q) = \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} \frac{(2q)^{2n+1}}{(1+q^{n+1})\prod_{j=1}^{n}(1+q^j)^2}$$

betrachtet und gezeigt, dass sie eine analoge Rekurrenzrelation erfüllen wie die üblichen Catalanzahlen. In unserer Notation lautet sie folgendermaßen:

$$Ca_n(q) = \frac{4q^2}{(1+q)(1+q^{n+1})} \sum_{k=0}^{n-1} q^k Ca_k(q) Ca_{n-1-k}(q) \tag{85}$$

mit $Ca_0(q) = 1$.

Der Vollständigkeit halber wollen wir den Beweis von Andrews in etwas anderer Notation wiederholen:

Betrachtet man

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{bmatrix}_{q^2} = \frac{(q^1-1)(q^{-1}-1)(q^{-3}-1) \quad (q^{-2n+3}-1)}{(q^2-1)(q^4-1) \quad (q^{2n}-1)},$$

so rechnet man sofort nach, dass

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2} &= \frac{(q^1-1)(q^{-1}-1)(q^{-3}-1) \quad (q^{-2n+1}-1)}{(q^2-1)(q^4-1) \quad (q^{2n+2}-1)} \\ &= \frac{(-1)^n q^{-n^2}}{(q+1)^2(q^2+1)^2 \quad (q^n+1)^2(q^{n+1}+1)} \frac{1}{[n+1]} \begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gilt. Ein Vergleich mit $Ca_n(q)$ ergibt daher

$$Ca_n(q) = (-1)^n q^{n^2+2n} 2^{2n} (q+1) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2} \tag{86}$$

Speziell ist $Ca_{-1}(q) = -\frac{1+q}{4q}$.

Nun gilt bekanntlich (vgl. z.B. [5]) die q-Vandermonde' sche Formel

$$\sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix} q^{\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} y \\ n-k \end{bmatrix} q^{ky} = q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} x+y \\ n \end{bmatrix}.$$

Ersetzt man hier q durch q^2 und setzt $x = y = \frac{1}{2}$, so bekommt man

$$\sum_{k=0}^{n} q^{2\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ k \end{bmatrix}_{q^2} q^{2\binom{n-k}{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n-k \end{bmatrix}_{q^2} q^k = q^{2\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ n \end{bmatrix}_{q^2} \tag{87}$$

Für $n \geq 2$ liefert das den Wert 0.

Setzt man

$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2-n} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n \end{bmatrix}_{q^2} z^n$, so ist (87) äquivalent mit

$$h(z)h(qz) = 1 + z, \tag{88}$$

wie man durch Koeffizientenvergleich sofort verifiziert.

Ersetzt man in (87) n durch $n+1$, so ist diese Gleichung wegen (86) äquivalent mit

$$\sum_{k=0}^{n+1} Ca_{k-1}(q)Ca_{n-k}(q)q^k = 0.$$

Aus $Ca_{-1}(q) = -\frac{1+q}{4q}$ ergibt sich

$$\frac{1+q}{4q} Ca_n(q)(1+q^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} Ca_{k-1}(q)Ca_{n-k}(q)q^k$$

und schließlich die gewünschte Formel (85).

Aus (86) folgt

$$h(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} q^{n^2+n} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ n+1 \end{bmatrix}_{q^2} z^{n+1} = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^n q^{-n} 2^{-2n} \frac{1}{1+q} Ca_n(q) z^{n+1},$$

d.h.

$$h(z) = -\frac{4q}{1+q} Ca_{-1}(q) + z \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{Ca_n(q)}{(1+q)q^n 2^{2n}} z^n$$

Somit ergibt sich

$$h(-4qz) = 1 - \frac{4qz}{1+q} \sum_{n=0}^{\infty} Ca_n(q) z^n$$

Ist also $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Ca_n(q)z^n$ die erzeugende Funktion der Andrews' schen q-Catalanzahlen, so gilt wegen

$$h(z)h(qz) = 1 + z\left(1 - \frac{4qz}{1+q} F(z)\right)\left(1 - \frac{4q^2 z}{1+q} F(qz)\right) = 1 - 4qz$$

oder

$$1 - \frac{F(z)}{1+q} - \frac{qF(qz)}{1+q} + \frac{4q^2 z F(z) F(qz)}{(1+q)^2} = 0. \tag{89}$$

Setzt man $q_k(x) = p_{2k}(\sqrt{x})$, so ergibt sich

$$q_k(x) = \sum (-1)^i \frac{4^i q^{i^2+i}}{\prod_{j=0}^{i-1}(1+q^{j+1})(1+q^{2k-j})} \begin{bmatrix} 2k-i \\ i \end{bmatrix} x^{k-i}$$

und die Rekurrenz

$$q_k(x) = (x - t_{2k-2} - t_{2k-3})q_{k-1}(x) - t_{2k-3}t_{2k-4}q_{k-2}(x)$$

mit $q_0(x) = 1$ und $q_1(x) = x - t_0$.

Analog ergibt sich mit $r_k(x) = \frac{p_{2k+1}(\sqrt{x})}{x}$ die Formel

$$r_k(x) = \sum (-1)^i \frac{4^i q^{i^2+i}}{\prod_{j=0}^{i-1}(1+q^{j+1})(1+q^{2k+1-j})} \begin{bmatrix} 2k+1-i \\ i \end{bmatrix} x^{k-i}$$

und die Rekurrenz

$$r_k(x) = (x - t_{2k-1} - t_{2k-2}) r_{k-1}(x) - t_{2k-2} t_{2k-3} r_{k-2}(x)$$

mit $r_0(x) = 1$ und $r_1(x) = x - t_0 - t_1$.

Es ist dann klar, dass für das lineare Funktional F_0, welches durch $F_0(q_k(x)) = \delta_{k,0}$ definiert ist, $F_0(x^n) = F(x^{2n}) = Ca_n(q)$ gilt. Analog erfüllt das lineare Funktional F_1 mit $F_1(r_k(x)) = \delta_{k,0}$ die Gleichung $F_1(x^n) = F(x^{2n+2}) = Ca_{n+1}(q)$.

Daraus lassen sich wieder einige Hankeldeterminanten ableiten. Man rechnet leicht nach, dass die folgenden Formeln gelten:

$$\det\left(\frac{2q}{1+q} Ca_{i+j}(q)\right)_0^{n-1} = \frac{2^{\binom{2n}{2}} q^{4\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}}}{\prod_{i=1}^{2n-1}(1+q^i)^{2n-i}}, \tag{90}$$

$$\det\left(\frac{2q}{1+q} Ca_{i+j+1}(q)\right)_0^{n-1} = \frac{2^{\binom{2n+1}{2}} q^{4\binom{n+1}{3}+3\binom{n+1}{2}}}{\prod_{i=1}^{2n}(1+q^i)^{2n+1-i}}, \tag{91}$$

$$\det\left(\frac{2q}{1+q} Ca_{i+j+2}(q)\right)_0^{n-1} = \frac{2^{(2n+3)n} q^{4\binom{n+2}{3}+\binom{n+1}{2}} (1+q^{n+1})[n+1]}{\prod_{i=1}^{2n+1}(1+q^i)^{2n+2-i}}. \tag{92}$$

Auch im Fall der Andrews'schen Catalanzahlen lassen sich die Formeln (82) und (83) explizit darstellen.

Hier ergibt sich für beliebige s

$$H_k(x,y) = \frac{(4q^y s)^k q^{\frac{k(3k+1)}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}}{\prod_{i=1}^{k}(1+sq^{y+k-1+i})(1+sq^{x+y+i})}$$

Denn man verifiziert sofort die Rekurrenz und die Randbedingungen.

Literatur

[1] Aigner, M.: Catalan-like Numbers and Determinants. J. Comb. Theory A **87**, 33–51 (1999).
[2] Andrews, G. E.: Catalan Numbers, q-Catalan Numbers and Hypergeometric Series. J. Comb. Th. A **44**, 267–273 (1987).
[3] Andrews, G. E., Askey, R., Roy, R.: Special functions. Cambridge Univ. Press 1999.
[4] Carlitz, L., Riordan, J.: Two element lattice permutation numbers and their q-generalization. Duke J. **31**, 371–388 (1964).
[5] Cigler, J.: Operatormethoden für q-Identitäten I. Mh. Math. **88**, 87–105 (1979).
[6] Cigler, J.: Operatormethoden für q-Identitäten IV. ÖAW Sitzungsber. **205**, 169–174 (1996).
[7] Cigler, J.: q-Catalan und q-Motzkinzahlen, ÖAW Sitzungsber. **208**, 3–20 (1999).
[8] Cigler, J.: Operatormethoden für q-Identitäten VII. ÖAW Sitzungsber. **208**, 123–142 (1999).
[9] Fürlinger, J., Hofbauer, J.: q-Catalan numbers. J. Comb. Th. A **40**, 248–264 (1985).
[10] Garsia, A.M.: A q-analogue of the Lagrange inversion formula, Houston J. Math. **7**, 205–237 (1981).
[11] Gessel, I.: A noncommutative generalization and a q-analog of the Lagrange inversion formula. TAMS **277**, 173–201 (1980).
[12] Krattenthaler, C.: Counting Lattice Paths with a Linear Boundary II. ÖAW Sitzungsber. **198**, 171–199 (1989).
[13] Krattenthaler, C.: Advanced Determinant Calculus, Semin. Lotharingien Combin. **42**, B42q (1998).
[14] Polya, G.: On the number of certain lattice polygons. J. Comb. Th. **6**, 102–105 (1969).
[15] Rota, G. C.: Finite Operator Calculus. Academic Press 1975.
[16] Schützenberger, M. P.: Une interprétation de certaines solutions de l'équation fonctionelle: $F(x+y) = F(x)F(y)$, C. R. Acad. Sci. Paris **236**, 352–353 (1953).
[17] Stanley, R. P.: Enumerative Combinatorics, Vol.2. Cambridge Univ. Press 1999.
[18] Viennot, G.: Une théorie combinatoire des polynomes orthogonaux generaux. Montréal 1983.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. J. Cigler, Institut für Mathematik, Strudlhofgasse 4, 1090 Wien.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 2000

Band/Volume: 209_2

Autor(en)/Author(s): Cigler J.

Artikel/Article: Einige q-Analoga der Catalan-Zahlen. 19-46