Über die graphische Linien-Ellipsen-Methode.

Von Dr. Leander Ditscheiner.

(Mit 2 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 29. April 1858.)

Wenn man alle möglichen Flächen einer bestimmten Krystallreihe im Raume so legt, dass die Entfernung jeder derselben vom Coordinaten-Mittelpunkte constant immer der Einheit gleich ist, so tangiren bekanntlich alle diese Krystallflächen an eine Kugel, die im Coordinaten-Mittelpunkte ihren Mittelpunkt besitzt und deren Radius der Einheit gleich ist. Alle Flächen einer und derselben Zone berühren diese Kugel nach einer grössten Kreislinie, und die Projection derselben auf die horizontale Endfläche oder auf irgend eine zu ihr parallele Ebene hat Anlass gegeben zur graphischen Ellipsen-Methode (Sitzungsberichte der kais. Akademie d. Wissenschaften, Bd. XXVIII. Nr. 1, S. 93). Durch jeden Punkt dieser, der Zone entsprechenden grössten Kreislinie lässt sich aber eine gerade Linie im Raume legen, welche in der, im bezeichneten Punkte an die Kugel tangirenden Krystallfläche liegt und zur Zonenaxe parallel ist, welche also auch auf der Ebene der grössten Kreislinie senkrecht steht. So erklärt es sich vollkommen, dass die Flächen einer bestimmten Zone an einen Cylinder, welchen wir den Zonencylinder nennen wollen, tangiren, dessen Axe durch den Coordinaten-Mittelpunkt geht und zur Zonenaxe oder Zonengeraden parallel ist und dessen Leitlinie ein Kreis vom Radius = 1 ist, dessen Mittelpunkt in die Axe des Cylinders fällt und dessen Ebene senkrecht auf dieser Cylinderaxe zu stehen kommt. Es ist dieser Zonencylinder die zehnte Zonenfläche und zu den neun schon bekannten (Sitzungsberichte Bd. XXVIII, Nr. 3, S. 101) hinzuzufügen.

Jeder dieser Zonencylinder wird, da ihre Axen sich gegenseitig im Coordinaten-Mittelpunkte schneiden, eine durch denselben gehende Ebene, welche zur horizontalen Endfläche parallel ist, nach einer

Ellipse schneiden, die im Mittelpunkte des ganzen Schema's ihren Mittelpunkt hat und deren kleinere Axe immer der Einheit gleich ist. Die grössere Axe, so wie die Lage beider ist von den die Zone bestimmenden Gestalten abhängig. Der Zone der verticalen Prismen entspricht als Zonenlinie ein Kreis vom Radius = 1, an welchen Kreis sämmtliche anderen Zonenlinien tangiren. Die Fläche selbst ist im Schema durch eine gerade Linie vertreten, welche an alle jene Zonenlinien tangirt, welche Zonen entsprechen, in denen die genannte Fläche liegt. So entspricht jede an den Kreis vom Radius = 1 gezogene Tangente einer verticalen Prismenfläche. Dies unterscheidet diese graphische Methode der Krystallographie von der schon genannten bekannten „graphischen Ellipsen-Methode", bei der wohl auch die Zonenlinie eine Ellipse ist, aber die Flächen selbst sind bei ihr durch Punkte vertreten, die in der Zonenlinie selbst liegen. Es genügt also hier zur Bezeichnung dieser beiden Methoden die alleinige Form der Zonenlinie nicht mehr, sondern man muss auch die Art und Weise angeben, wie die Fläche selbst im Schema vertreten ist. Man könnte somit die schon bekannte graphische Ellipsen-Methode als „graphische Punkt-Ellipsen-Methode" und jene, welche in den folgenden Zeilen näher beschrieben werden soll, als „graphische Linien-Ellipsen-Methode" bezeichnen.

§. 1.

Bevor wir auf die Zonenlinie der graphischen Linien-Ellipsen-Methode selbst übergehen, wollen wir hier noch den Zonencylinder etwas näher in Betrachtung ziehen und zwar vorerst dessen Gleichung ableiten.

Um die Gleichung dieses Zonencylinders abzuleiten, sei $Oxyz$, Fig. 1, ein rechtwinkliges Coordinaten-System im Raume und AA, BB, CC die oben bezeichnete Kugel, welche in O ihren Mittelpunkt hat und deren Radius = 1 ist. Ferner sei DOD' die Zonenaxe, jene Linie also, zu der die Flächen ihrer Zone alle parallel sind. Legt man also nun durch den Coordinaten-Mittelpunkt O eine Ebene senkrecht auf die Zonenaxe, welche Ebene also identisch ist mit unserer Zonenebene, so schneidet dieselbe unsere normale Kugel nach einer grössten Kreislinie EKE_1K_1, welche die Leitlinie des Zonencylinders ist. Legt man nun durch jeden Punkt dieser Leitlinie eine zur Zonenaxe parallele Linie, so bilden alle diese zusammen den Zonencylinder. Die Gleichung der Zonenaxe ist:

$$\begin{cases} x = az \\ y = bz \end{cases}$$

somit die Gleichung irgend einer Erzeugenden im Raume folgende:

$$\begin{cases} x = az + \alpha & 1) \\ y = bz + \beta & 2) \end{cases}$$

in welchen beiden Gleichungssystemen a und b die bekannten Werthe

$$a = -\frac{n' n'' (m' p'' - m'' p')}{m' m'' (p'' n' - n'' p')}$$

$$b = -\frac{p_{,} p_{,,} (m'' n' - n'' m')}{m' m'' (p'' n' - n'' p')}$$

haben, wobei also a und b mit den p und q der graphischen Kreismethode übereinstimmt.

Die Leitlinie des Zonencylinders ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 & 3) \\ ax + by + z = 0 & 4) \end{cases}$$

von welchen die erstere die Gleichung der Normalkugel, die letztere aber die Gleichung der Zonenebene ist, in welcher die genannte Leitlinie liegt.

Lässt man die vier oben bezeichneten Gleichungen coincidiren, so kommt man leicht auf eine Relation zwischen α und β, in welche man nur, um die Gleichung des Zonencylinders zu erhalten, die Werthe von α und β aus Gl. 1 und 2 zu setzen hat. Wir wollen diese Relation jedoch hier auf eine einfachere Art ableiten. Sind nämlich $x = az + \alpha$ und $y = bz + \beta$ die Gleichungen irgend einer Erzeugenden des Zonencylinders, so muss nach unserer Annahme die Entfernung derselben vom Coordinaten-Mittelpunkte immer $= 1$ sein. Nun ist aber der Entfernung einer Linie vom Coordinaten-Mittelpunkte nach den Lehren der analytischen Geometrie des Raumes folgender Relation entsprechend:

$$D = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + (a\beta + b\alpha)^2}{1 + a^2 + b^2}}$$

und wenn wir in dieser Relation $D = 1$ setzen, so folgt

$$1 + a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (a\beta + b\alpha)^2.$$

Setzt man in dieser Relation nun für α und β die Werthe

$$\alpha = x - az$$
$$\beta = y - bz,$$

so erhält man endlich die Gleichung:

$$1 + a^2 + b^2 = (x - az)^2 + (y - bz)^2 + (b(x - az) - a(y - bz))^2$$

oder, nachdem man gehörig reducirt und geordnet hat, folgt die Relation:

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 + (bx - ay)^2 - a^2 - b^2 - 1 = 0,$$

und zu welcher Gleichung man nur noch die schon oben angegebenen Werthe für a und b zu setzen hat, um unmittelbar die Coordinaten eines Punktes des Zonencylinders durch die, die Zone bestimmenden Gestalten ausgedrückt zu haben.

§. 2.

Nachdem wir nun so die allgemeine Gleichung eines Zonencylinders abgeleitet haben, übergehen wir zu einigen specielleren Fällen desselben. Wird die Zonenaxe vertical oder, was dasselbe ist, wird $a = 0$ und $b = 0$, so geht unsere allgemeine Gleichung in die folgende über:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

d. i. die Gleichung eines kreisförmigen Cylinders, dessen Axe parallel ist der coordinirten Axe Oz. Der Zone der verticalen Prismen entspricht also ein verticaler Cylinder, dessen Leitlinie ein Kreis vom Radius $= 1$ ist.

Wird die Zonenaxe horizontal, bringen also alle Flächen dieser Zone horizontale Combinationskanten unter sich hervor, dann wird sowohl a als $b = \infty$, aber das Verhältniss $\frac{a}{b} = c$ bleibt ein bestimmtes. Setzen wir für a und b, ∞ in unsere Gleichung des Zonencylinders, so genügt sie in der Form, in der wir sie oben aufgestellt, nicht, wir bringen dieselbe jedoch in eine uns günstigere Form, wenn wir die ganze Gleichung durch b^2 dividiren. Wir erhalten also die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{b} - cz\right)^2 + \left(\frac{y}{b} + z\right)^2 + (x - cy)^2 - c^2 - 1 - \frac{1}{b^2} = 0$$

und in dieser Gleichung nun $b = \infty$ gesetzt, erhalten wir:

$$c^2 z^2 + z^2 + x^2 + c^2 y^2 - 2cxy - (c^2 + 1) = 0$$

als die Gleichung jenes Zonencylinders, der einer Zone mit horizontalen Combinationskanten entspricht.

Wird in dieser Gleichung $c = 0$, so geht die genannte Gleichung über in

$$y^2 + z^2 = 1,$$

welche Gleichung einem zur coordinirten Axe Ox parallelen Cylinder entspricht. Er vertritt also die Combination $P - \infty \,.\, Pr + \infty$ im Raume.

Wird in obiger Gleichung $c = \infty$, so geht, nachdem man die ganze Gleichung durch c^2 dividirt hat, diese in folgende über:

$$x^2 + z^2 = 1,$$

welche einem zur Axe Oy parallelen Cylinder im Raume entsprechend ist und in demselben die Combination $P - \infty \,.\, \bar{P}r + \infty$ vertritt.

Die Grösse c, welche wir in den letzteren Relationen benützt haben, ist gegeben nach der Relation:

$$c = \frac{(n_{\prime} p_{\prime\prime} - n_{\prime\prime} p_{\prime}) n_{\prime} n_{\prime\prime} c}{(m_{\prime\prime} n_{\prime} - n_{\prime\prime} m_{\prime}) p_{\prime} p_{\prime\prime} b}.$$

Ist somit $c = 0$, so kann dies nur dann stattfinden, wenn die Relation

$$\frac{n_{\prime}}{p_{\prime}} = \frac{n_{\prime\prime}}{p_{\prime\prime}}$$

statthat, ebenso kann nur $c = \infty$ werden, wenn die Relation

$$\frac{m_{\prime\prime}}{n_{\prime\prime}} = \frac{m_{\prime}}{n_{\prime}}$$

zwischen den sich combinirenden Gestalten der Krystallreihe stattfindet.

§. 3.

Nachdem wir nun in den vorhergehenden Paragraphen die wichtigsten Eigenschaften des Zonencylinders im Raume kennen gelernt haben, übergehen wir nun sogleich auf die Untersuchung der Verhältnisse im Schema der graphischen Linien-Ellipsen-Methode selbst, und beginnen dieselbe, indem wir zuerst die Lage des Flächenortes im Schema bestimmen.

Es sei also zu diesem Behufe eine Krystallfläche durch ihre Axenverhältnisse $a_{,} : b_{,} : c_{,} = ma : nb : pc$ gegeben. Die Gleichung der zu dieser durch den Coordinaten-Mittelpunkt parallel gelegten Ebene im Raume ist

$$\frac{1}{ma} x + \frac{1}{nb} y + \frac{1}{pc} z = 0.$$

Ist irgend eine Ebene durch ihre Gleichung $Ax + By + Cz + D$ im Raume gegeben, so lehrt die analytische Geometrie des Raumes, dass die Entfernung dieser Ebene vom Coordinaten-Mittelpunkte folgende ist:

$$P = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Nun soll aber für unsere Gleichung $P = 1$ sein, es muss desshalb sein:

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Da nun nach obiger Gleichung $A = \frac{1}{ma}$, $B = \frac{1}{nb}$ und $C = \frac{1}{pc}$, so haben wir zu setzen:

$$D = \sqrt{\frac{n^2 b^2 p^2 c^2 + m^2 n^2 a^2 b^2 + m^2 p^2 a^2 c^2}{m^2 n^2 p^2 a^2 b^2 c^2}}$$

und unsere Gleichung für die Ebene wird somit folgende:

$$n p b c x + m p a c y + m n a b z$$
$$\pm \sqrt{m^2 n^2 a^2 b^2 + m^2 p^2 a^2 c^2 + n^2 p^2 b^2 c^2} = 0.$$

Diese Ebene schneidet unsere Projections-Ebene Oxy nach der Linie:

$$y = -\frac{nb}{ma} x \mp \sqrt{\frac{n^2 b^2}{p^2 c^2} + \frac{n^2 b^2}{m^2 a^2} + 1},$$

welche Linie der Flächenort unserer Ebene $a_{,} : b_{,} : c_{,} = ma : nb : nc$, wobei c sich auf die verticale Axe, b auf die grössere und a auf die kleinere horizontale Diagonale der Grundgestalt bezieht.

Um die Linie selbst im Schema aufzutragen, dienen die folgenden Werthe:

$$m_{,} = \mp \frac{ma}{nb}\sqrt{\frac{n^2 b^2}{p^2 c^2} + \frac{n^2 b^2}{m^2 a^2} + 1}.$$

$$n_{,} = \mp \sqrt{\frac{n^2 b^2}{p^2 c^2} + \frac{n^2 b^2}{m^2 a^2} + 1}.$$

Es sind dies die Abstände des Coordinaten-Mittelpunktes von den Durchschnittspunkten des Flächenortes mit den Coordinaten-Axen Ox und Oy.

Um die Fläche selbst mittelst dieser Coordinaten im Raume zu bestimmen, hat man noch die Entfernung des Durchschnittspunktes der Ebene mit der Coordinaten-Axe Oz anzugeben, welche die folgende Gleichung gibt:

$$p_{,} = \mp \sqrt{1 + \frac{p^2 c^2}{n^2 b^2} + \frac{p^2 c^2}{m^2 a^2}}.$$

Da nun dieselben Abstände für den Flächenort der Quenstedtschen graphischen Punkt-Methode durch die Gleichungen:

$$m_{,,} = ma, \quad n_{,,} = nb, \quad p_{,,} = pc$$

gegeben sind und obige Relationen sich auf die Formen:

$$m_{,,} = ma\sqrt{\frac{1}{m^2 a^2} + \frac{1}{n^2 b^2} + \frac{1}{p^2 c^2}},$$

$$n_{,,} = nb\sqrt{\frac{1}{m^2 a^2} + \frac{1}{n^2 b^2} + \frac{1}{p^2 c^2}},$$

$$p_{,,} = pc\sqrt{\frac{1}{m^2 a^2} + \frac{1}{n^2 b^2} + \frac{1}{p^2 c^2}}$$

bringen lassen, so sieht man, dass der Flächenort der graphischen Linien-Ellipsen-Methode parallel ist mit jenen der graphischen Punkt-Methode, also auch mit jenen der graphischen Parabel-Methode.

Die Construction unseres Flächenortes auf graphischem Wege wird desshalb auch keiner Schwierigkeit unterliegen. Man bestimmt sich nämlich im Schema, Fig. 2, den Flächenort $A_{,}B_{,}$ der graphischen Punkt-Methode, zieht vom Coordinaten-Mittelpunkte O eine senkrechte Linie OD' auf diesen und trägt auf die Linie Ox die Länge $OD' = OE$ auf. Der Punkt E mit A'' verbunden und zu dieser

Verbindungslinie an den Kreis $A'NA''$ vom Radius $= 1$ eine Tangente FE' gezogen, gibt den Punkt E'. Trägt man nun auf der Linie OD' die Länge $OD = OE'$ auf und zieht durch den so erhaltenen Punkt D' zur $A'B'$ die parallele Linie AB, so ist diese der gesuchte Flächenort.

Wir wollen nun hier sogleich auf einige specielle Fälle des Flächenortes unser Augenmerk richten. Wird also vorerst $p = \infty$, dann geht offenbar unsere allgemeine Krystallfläche in eine verticale Prismenfläche über, und die Gleichung des Flächenortes wird in folgende übergehen:

$$y = -\frac{nb}{ma}x \mp \sqrt{1 + \frac{n^2b^2}{m^2a^2}}.$$

Wir ersehen schon jetzt aus dieser Gleichung, dass, welche Werthe a, b, m und n auch immer haben mögen, die Entfernung des Flächenortes vom Coordinaten-Mittelpunkte immer $= 1$ ist. Die graphische Darstellung des Flächenortes einer Prismenfläche ist desshalb ganz einfach: man zieht an einem Kreis vom Radius $= 1$ eine Tangente so, dass sie parallel ist dem entsprechenden Flächenorte der graphischen Punkt-Methode. Schon hier sieht man die Regel durchscheinen, dass die Zonenlinie für die Zone der verticalen Prismen ein Kreis vom Radius $= 1$ sei.

Um die Gleichung des Flächenortes der horizontalen Prismen zur grösseren Diagonale zu erhalten, haben wir $m = \infty$ zu setzen, es folgt somit:

$$y = \mp\sqrt{\frac{n^2b^2}{p^2c^2} + 1}.$$

welche Gleichung in jedem Falle eine zur Axe Oy senkrechte Linie bestimmt. Wird in unserer allgemeinen Gleichung des Flächenortes $n = \infty$, dann geht dieselbe in folgende über:

$$x = \pm\sqrt{1 + \frac{m^2a^2}{p^2c^2}},$$

offenbar eine auf der Coordinaten-Axe Ox senkrecht stehende Linie. Die Flächenorte von $\breve{P}r + \infty$ und $\bar{P}r + \infty$ stehen senkrecht auf ihren entsprechenden Coordinaten-Axen Oy und Ox und tangiren zugleich an den Kreis vom Radius $= 1$. Der Flächenort von $P - \infty$

ist seiner Lage nach, wie bei den anderen graphischen Methoden, nicht bestimmt, liegt aber vom Coordinaten-Mittelpunkte O aus in unendlicher Entfernung, senkrecht auf jeder von O aus gezogenen Linie. Die Flächenorte der graphischen Punkt-Methode und der graphischen Linien-Ellipsen-Methode der geraden Endfläche sind also identisch.

§. 4.

Um diejenige Ebene im Raume zu bestimmen, welche zu gleicher Zeit in zwei bestimmten Zonen liegt, so seien die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} x = az \\ y = bz \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a_{,}z \\ y = b_{,}z \end{cases}$$

die Gleichungen der den beiden genannten Zonen entsprechenden Zonenaxen, so ist die durch sie gehende Ebene bestimmt durch die Gleichung:

$$(b - b_{,})\,x + (a_{,} - a)\,y + (ab_{,} - ba_{,})\,z = 0$$

und da für unser System in jeder Gleichung der Ebene die Relation stattfindet

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

so haben wir als Gleichung der von uns zu bestimmenden Ebene die Relation:

$$(b - b_{,})\,x + (a_{,} - a)\,y + (ab_{,} - ba_{,})\,z$$
$$\pm \sqrt{(b - b_{,})^2 + (a_{,} - a_{,})^2 + (ab_{,} - ba_{,})^2} = 0,$$

in welche Gleichung man nur zu setzen hat für a und b, a_1 und b_1, die schon oben angegebenen Relationen.

Man ersieht, dass dieser Gleichung im Raume zwei parallele Ebenen entsprechen, die beide um die Einheit entfernt, jedoch zu verschiedenen Seiten des Coordinaten-Mittelpunktes liegen. Ein ähnliches oder eigentlich dasselbe Verhältniss findet bei jeder Krystallfläche Statt, indem in unserer allgemeinen Gleichung:

$$Ax + By + Cz \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 0$$

jenes Glied, welches die Entfernung vom Coordinaten-Mittelpunkte bestimmt, positiv und negativ sein kann.

Setzt man in der oben abgeleiteten Gleichung $z = 0$, so erhält man

$$y = \frac{b - b}{a_, - a} x \mp \sqrt{1 + \left(\frac{b_, - b}{a_, - a}\right)^2 + \left(\frac{ab_, - ba_,}{a_, - a}\right)^2}$$

als die Gleichung des Flächenortes für die in den beiden gegebenen Zonen liegende Krystallfläche, welche mittelst der folgenden Gleichungen:

$$m = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{a_, - a}{b_, - b}\right)^2 + \left(\frac{ab_, - ba_,}{b_, - b}\right)^2}$$

$$n = \mp \sqrt{1 + \left(\frac{b_, - b}{a_, - a}\right)^2 + \left(\frac{ab_, - ba}{a_, - a_,}\right)^2}$$

leicht in unser Schema eingetragen werden kann. Wir werden weiter unten sehen, wie wir diesen Flächenort ohne Hilfe dieser beiden Gleichungen graphisch construiren können.

Um diese Ebene im Raume mittelst der drei Axencoordinaten bestimmen zu können, haben wir nur noch die Länge der verticalen Axe zu bestimmen, indem für die beiden horizontalen Axenrichtungen dieselben Relationen stattfinden wie für die Bestimmung des Flächenortes in der Ebene. Die Länge der verticalen Axenrichtung ist gegeben durch die Relation:

$$p = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{a_, - a}{ba_, - b_,a}\right)^2 + \left(\frac{b_, - b}{ba_, - b_,a}\right)^2},$$

welche Relation man erhält, wenn man in der allgemeinen Gleichung dieser Ebene x und $y = 0$ setzt und in der speciellen z den Werth p beilegt.

§. 5.

Wir kommen nun dahin, die Zonenlinie der graphischen Linien-Ellipsen-Methode zu bestimmen, d. i. die Gleichung jener krummen Linie aufzusuchen, an welche alle jene Geraden tangiren, welche Flächen einer und derselben Zone im Schema vertreten.

Am einfachsten werden wir offenbar diese Gleichung erhalten, wenn wir aus der Gleichung des Zonencylinders die Gleichung des Schnittes desselben mit der Projections-Ebene, d. i. die horizontale coordinirte Ebene $Oxyz$ ableiten, indem dieser Schnitt selbst unsere Zonenlinie ist.

Ist demnach

$$(x - az)^2 + (y - bz)^2 + (bx - ay)^2 + (a^2 + b^2 + 1) = 0$$

die oben abgeleitete Gleichung des Zonencylinders und setzen wir in derselben $z = 0$ als die Gleichung unserer Projections-Ebene, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 + (bx - ay)^2 - (a^2 + b^2 + 1) = 0.$$

oder nachdem man gehörig reducirt hat,

$$x^2(1 + b^2) + y^2(1 + a^2) - 2abxy - (a^2 + b^2 + 1) = 0,$$

indem wir nun statt a und b unsere gewöhnlich gebrauchten Buchstaben p und q auch hier wieder setzen wollen, erhalten wir die Relation:

$$x^2(1 + q^2) + y^2(1 + p^2) - 2pqxy - (p^2 + q^2 + 1) = 0$$

als die Gleichung der Zonenlinie der graphischen Linien-Ellipsen-Methode.

Es ist die durch diese Linie bestimmte Gleichung offenbar jene einer Ellipse, denn es wird von ihr der allgemeinen Bedingungsgleichung:

$$B^2 - 4AC < 0$$

vollkommen entsprochen, indem der Werth

$$4p^2q^2 - 4(1 + q^2)(1 + p^2) = -4(1 + p^2) + q^2$$

immer negativ oder kleiner als 0 ist, welche Bedingung aber einer Ellipse allein unter den krummen Linien zweiter Ordnung entsprechend ist.

Wir haben gesehen, dass die Zonenlinie der graphischen Punkt-Ellipsen-Methode (Sitzungsberichte, Bd. XXVIII, Nr. 3) ebenfalls eine Ellipse ist, deren Gleichung wir gefunden haben als folgende:

$$x^2(1 + p^2) + y^2(1 + q^2) - 2pqxy - 1 = 0,$$

welche Gleichung mit der obigen in einem schönen Zusammenhange steht, was wir weiter unten näher ins Auge fassen werden.

Wir können aber schon auf den ersten Blick, den wir auf beide Gleichungen werfen, sehen, dass für $p = 0$ und $q = 0$ diese beiden

Gleichungen übergehen in $x^2 + y^2 = 1$, dass also die Zone der verticalen Prismen in beiden Schemata ein Kreis vom Radius $= 1$ ist, der im Coordinaten-Mittelpunkte O seinen Mittelpunkt hat.

§. 6.

Um die durch ihre folgende Gleichung:

$$x^2(1+q^2) + y^2(1+p^2) - 2pqxy - (a^2+b^2-1) = 0$$

gegebene Curve näher studiren zu können, müssen wir dieselbe von der allgemeinen Form einer krummen Linie des zweiten Grades:

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

auf die für die Betrachtung bequemere Form:

$$Mx^2 + Ny^2 = P$$

bringen, welche Veränderung wir durch Transformation der Coordinaten leicht bezwecken können. Wir haben, wenn wir die allgemeinste Gleichung einer Linie der zweiten Ordnung mit der Gleichung der Zonenlinie vergleichen:

$$A = 1 + p^2.\ B = -2pq.\ C = 1 + q^2.\ D = 0.\ E = 0.$$
$$F = -(p^2 + q^2 + 1)$$

zu setzen. Da wir also keine Glieder von der Form Dy und Ex in unserer Gleichung haben, so folgt, dass alle diese Zonenlinien im Coordinaten-Mittelpunkte ihren Mittelpunkt haben, es sich also nun nur mehr darum handelt, das Glied Bxy aus unserer Gleichung zu entfernen. Wir bewerkstelligen dies dadurch, dass wir unsere ganze Gleichung auf ein neues Coordinaten-System beziehen, welches mit dem alten den Coordinaten-Mittelpunkt gemeinschaftlich hat, von welchem aber die neue Ox mit der alten Coordinatenaxe des x einen gewissen zu bestimmenden Winkel α bildet. Es geht dadurch unsere allgemeine Gleichung in folgende über:

$$My^2 + Nx^2 + F = 0,$$

wobei

$$M = A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha - B\cos\alpha\sin\alpha,$$

$$N = A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha.$$

Der Winkel aber, den die beiden Coordinaten-Axen des x nun mit einander einschliessen, ist gegeben durch die bekannte Relation:

$$tang\, 2\,\alpha = -\frac{B}{A-C}$$

oder auch durch eine der folgenden Gleichungen:

$$sin\, 2\,\alpha = -\frac{B}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}};\quad cos\, 2\,\alpha = \frac{A-C}{\sqrt{(A-C)^2+B^2}}$$

oder wenn man statt A, B und C die ihnen entsprechenden Werthe setzt:

$$tang\, 2\,\alpha = +\frac{2\,p\,q}{q^2-p^2}$$

$$sin\, 2\,\alpha = \frac{-2\,p\,q}{\sqrt{(q^2-p^2)^2+4\,p^2\,q^2}} = \pm\frac{2\,p\,q}{p^2+q^2},$$

$$cos\, 2\,\alpha = \frac{q^2-p^2}{\sqrt{(q^2-p^2)+4\,p^2\,q^2}} = \pm\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2},$$

aus welchen Relationen man nun den einfachen Winkel finden kann; es ist:

$$sin\,\alpha = \pm\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

$$cos\,\alpha = \pm\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

oder auch durch Division dieser beiden Gleichungen folgt jene:

$$tang\,\alpha = \pm\frac{p}{q},$$

das Zeichen + oder — für $tang\,\alpha$ hängt wesentlich von den Werthen p und q ab. Ist nämlich p grösser als q, so ist $tang\,2\,\alpha$ negativ, dann muss auch $tang\,\alpha$ es sein, ist aber q grösser als p, dann wird $tang\,2\,\alpha$ positiv, es wird also auch $tang\,\alpha$ positiv sein, vorausgesetzt, dass p und q einerlei Zeichen vor sich haben. Haben sie verschiedene Zeichen, so ist, wenn p grösser als q, $tang\,2\,\alpha$, also auch $tang\,\alpha$ positiv; ist aber q grösser als p, dann ist sowohl $tang\,2\,\alpha$ als auch $tang\,\alpha$ negativ. Man muss diesen Verhältnissen ihre vollkommene Berücksichtigung zu Theil werden lassen, weil sie im entgegengesetzten

Falle zu den grössten Fehlern Anlass geben können. Wenn man nun die gefundenen Werthe für $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ in unseren oben angegebenen Relationen für M und N setzt, so erhält man leicht die folgenden Relationen:

$$N = 1,$$
$$M = 1 + p^2 + q^2,$$

welche beiden Relationen man auch erhalten haben würde, indem man für A, B und C die ihnen entsprechenden Werthe in den beiden folgenden Gleichungen:

$$M = \frac{A + C + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{2}$$

$$N = \frac{A + C - \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{2}$$

gesetzt hätte, welche sich unmittelbar aus den oben angegebenen ableiten lassen. Setzt man nun die gefundenen Relationen für M und N in die Gleichung $My^2 + Nx^2 + F = 0$, so erhält man jene

$$(1 + p^2 + q^2)\, y^2 + x^2 - (1 + p^2 + q^2) = 0,$$

oder auch, indem man sie auf die gewöhnliche Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bringt:

$$\frac{x^2}{1 + p^2 + q^2} + y^2 = 1.$$

Man ersicht aus dieser Gleichung, dass die grössere Axe der Ellipse mit der Richtung der neuen x zusammenfällt, mit dieser also einen Winkel α, der durch die Gleichung $\tan \alpha = \pm \frac{p}{q}$ gegeben ist, einschliesst, ferner, dass die kleinere Diagonale unter allen Verhältnissen der Einheit gleich ist, dass also alle Zonenlinien der graphischen Linien-Ellipsen-Methode an den schon mehrmals genannten Kreis vom Radius $= 1$ tangiren. Die längere Diagonale hat den Werth $\pm \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, welche nur für den Fall, dass p und $q = 0$ sind, der Einheit gleich wird, wodurch die Ellipse in einen Kreis vom Radius $= 1$ übergeht. Die Lage einer Zonenlinie wird also im Allgemeinen eine solche sein, wie sie Fig. 4 bezeichnet, in welcher AOx der Winkel α ist.

§. 7.

Wir wollen nun hier auch die Zonenlinie der graphischen Punkt-Ellipsen-Methode ein wenig näher ins Auge fassen, da dies unseres Wissens noch nirgend geschehen ist, um die interessanten Verhältnisse näher betrachten zu können, die zwischen der Zonenlinie der graphischen Punkt-Ellipsen-Methode und jener der graphischen Linien-Ellipsen-Methode stattfinden.

Wir haben als die Gleichung der Zonenlinie der graphischen Punkt-Ellipsen-Methode folgende Relation gefunden:

$$x^2(1+p^2)+y^2(1+q^2)-2pqxy-1=0,$$

haben also wieder für unsere allgemeinste Gleichung des zweiten Grades:

$$A=(1+q^2),\ B=-2pq,\ C=(1+p^2),\ D=0,\ E=0,\ F=-1$$

zu setzen, wodurch wir erhalten:

$$tang\,2\,\alpha=-\frac{B}{A-C}=\frac{2pq}{q^2-p^2},$$

$$sin\,2\,\alpha=\pm\frac{2pq}{p^2+q^2},$$

$$cos\,2\,\alpha=\pm\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2},$$

und hieraus erhalten wir wieder:

$$sin\,\alpha=\pm\frac{q}{pq+q^2},$$

$$cos\,\alpha=\pm\frac{p}{p^2+q^2},$$

woraus auch ebenfalls wieder die Gleichung:

$$tang\,\alpha=\pm\frac{q}{p}$$

folgt. Das Vorzeichen von $tang\,\alpha$ hängt wieder, wie oben, von den Werthen p und q ab, welche das Vorzeichen von $tang\,2\alpha$ bestimmen, welches natürlich identisch ist mit jenem von $tang\,\alpha$. Setzen wir nun wieder in die Gleichungen für A, B und C die Werthe für M und N, so folgt:

$$M = 1 + p^2 + q^2,$$
$$N = 1,$$

und diese Relation in die Gleichung:

$$My^2 + Nx^2 + F = 0,$$

in welcher also $F = -1$ ist, so erhalten wir endlich die Gleichung:

$$(1 + p^2 + q^2)\, y^2 + x^2 = 1.$$

Wir sehen also, dass bei der Zonenlinie der graphischen Punkt-Ellipsen-Methode die grosse Axe $= 1$ ist und in der Richtung der kleineren Axe der graphischen Linien-Ellipsen-Methode liegt, mit ihr also vollkommen übereinstimmt. Die grössere Axe der letzteren Methode fällt mit der kleineren der ersteren zusammen und ist gerade der reciproke Werth derselben. Die gleichnamigen Axen stehen also gegenseitig auf einander senkrecht und Fig. 5 stellt diese Verhältnisse für beide Zonenlinien einer Zone in einem Bilde dar. $A B A' B'$ ist die Zonenlinie der graphischen Linien-Ellipsen-Methode und $A'' B A''' B'$ jene der graphischen Punkt-Ellipsen-Methode. Wird auch hier p und $q = 0$, so geht auch diese Zonenlinie in einen Kreis vom Radius $= 1$ über, es ist also dieser Kreis beiden Schemata gemeinschaftlich und repräsentirt in beiden Fällen die Zone der verticalen Prismen. Das Axenverhältniss $a : b$, wobei a die grössere und b die kleinere Axe bezeichnet, ist beiden Zonenlinien, die eine Zone in beiden Schemata vertritt, gemeinschaftlich, hat also denselben Werth.

§. 8.

Wir haben in den vorhergehenden Paragraphen gesehen, wie sich die Zonenlinie der graphischen Linien-Ellipsen-Methode im Allgemeinen verhält, es wird also nun ein Gegenstand des gegenwärtigen Paragraphes sein müssen, einige specielle Fälle derselben näher ins Auge zu fassen.

Wird in der allgemeinen Gleichung der Zonenlinie

$$(1 + q^2)\, x^2 + (1 + p^2)\, y^2 - 2pqxy - (1 + p^2 + q^2) = 0$$

zu gleicher Zeit, sowohl p als $q = 0$, so geht dieselbe in folgende über:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

welches aber die Gleichung eines Kreises vom Radius $= 1$ ist. Da aber $p = q = 0$, aber der Zone der verticalen Prismen entspricht, so folgt, dass die Zonenlinie, welche der Zone der verticalen Prismen entspricht, ein Kreis vom Radius $= 1$ sei.

Wird in derselben allgemeinen Gleichung $p = 0$, so verwandelt sie sich in:

$$(1 + q^2)\, x^2 + y^2 = + (1 + q^2),$$

d. i. aber die Gleichung einer Ellipse, deren kleine Axe mit der Axe Oy übereinstimmend ist, während, wenn $q = 0$ wird, diese übergeht in folgende:

$$x^2 + (1 + p^2)\, y^2 = (1 + p^2),$$

die Gleichung einer Ellipse, deren kleinere Axe mit der Coordinaten-Axe Oy übereinstimmt.

Da wir für die Neigung der Axe des x gegen die grössere Axe der Zonenlinie oben die Relation gefunden haben: $tang\, \alpha = \frac{p}{q}$, so folgt, dass die Richtung der grösseren Axe für alle jene Zonenlinien, deren Zonengeraden in einer verticalen Ebene liegen, dieselbe ist, während die kleinere Axe allen gemeinschaftlich ist. Da aber in den Endpunkten dieser kleineren Axe, parallel zur Richtung der grösseren Axe der in einer Zone liegende Prismenflächenort sich ergibt, so folgt, dass alle die Zonen von der angegebenen Beschaffenheit ein und dasselbe verticale Prisma haben. Jene Zonen also, deren Zonengeraden in die Ebene Oxz fallen, haben $\bar{P}r + \infty$, jene deren Zonengeraden in die Coordinaten-Ebene Oyz fallen, $\breve{P}r + \infty$ als gemeinschaftliches Prisma, ein Verhältniss, das aus dem Schema jeder graphischen Methode der Krystallographie leicht zu ersehen ist.

Ganz ähnlich sind diese Verhältnisse auch bei der graphischen Punkt-Ellipsen-Methode. Setzt man nämlich in der allgemeinen Gleichung:

$$(1 + p^2)\, x^2 + (1 + q^2)\, y^2 - 2pqxy - 1 = 0$$

der Zonenlinie dieser Methode, $p=0$ und $q=0$, so folgt die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 1,$$

die Gleichung jenes Kreises, der beiden graphischen Methoden gemeinschaftlich ist und auch die Zone der verticalen Prismen vertritt.

Wird in eben der allgemeinen Gleichung $p = 0$, so folgt:

$$x^2 + (1 + q^2)\, y^2 = 1,$$

und wird in derselben $q = 0$, so erhält man die Relation:

$$(1 + p^2)\, x^2 + y^2 = 1,$$

welche beide Ellipsen, deren Axenrichtungen mit Richtungen der Coordinaten-Axen Ox und Oy zusammenfallen, in welchen im Gegensatz zur Linien-Ellipsen-Methode die Richtung der grösseren Axe im ersteren Falle in die Linie Oy, im letzteren Falle aber in die Richtung Ox fällt.

Für jene Zonenlinien, deren Zonengeraden in eine verticale Ebene fallen, ist die Richtung der kleineren Axe gemeinschaftlich, jene der grösseren Axe aber vollkommen identisch.

So stehen denn beide graphische Ellipsen-Methoden, die graphische Linien-Ellipsen-Methode und die graphische Punkt-Ellipsen-Methode, in einem schönen Gegensatze. Bei der einen sind die Flächenorte gerade Linien, die an die Zonenlinie tangiren, bei der andern sind dieselben Punkte, welche mit einander verbunden die Zonenlinie geben. Bei der einen liegt der Flächenort der geraden Endfläche $P - \infty$ vom Coordinaten-Mittelpunkte in einer auf jeder von derselben gezogenen Linie senkrecht, unendlich weit von demselben entfernt, bei der andern liegt er im Coordinaten-Mittelpunkte selbst oder, wenn man so sagen darf, unendlich nahe demselben. Bei beiden Methoden tangiren sämmtliche Zonenlinien an einem Kreise vom Radius $= 1$, der in beiden Schemata die Zone der verticalen Prismen repräsentirt. In jenem Punkte dieses Kreises, in welchem die Zonenlinie der graphischen Linien-Ellipsen-Methode an demselben tangirt, ist der Flächenort derselben Prismenfläche nach der graphischen Punkt-Ellipsen-Methode. Bei der letzteren Methode fällt kein Punkt ausser die angegebene Kreislinie, bei der ersteren nie inner diesen Kreis; beide Schemata können also, ohne sich gegenseitig zu stören, auf einer und derselben Papierfläche entworfen werden, indem sie den Coordinaten-Mittelpunkt gemeinschaftlich besitzen.

Setzen wir in der allgemeinen für die Zonenlinie der Linien-Ellipsen-Methode sowohl p als $q = \infty$, ist aber das Verhältniss $\frac{p}{q} = n$ ein bestimmtes, so folgt, wenn man die Gleichung durch q^2 dividirt, $\frac{p}{q} = n$ und $q = \infty$ setzt,

$$x^2 + n^2 y^2 - 2 n x y - n^2 = 0,$$

oder gehörig reducirt, als die Gleichung der entsprechenden Zonenlinie:

$$y = \frac{1}{n} x \pm 1,$$

d. i. aber ein System von zwei parallelen Geraden, von welchen jede um 1, jedoch auf verschiedenen Seiten des Coordinaten-Mittelpunktes, von demselben entfernt ist, und welche Linien parallel sind zur grösseren Axe jener Zonenlinien, bei denen die Relation $tang\,\alpha = n$ stattfindet. $p = \infty$ und $q = \infty$ entspricht aber jenen Zonen, die horizontale Combinationskanten besitzen. Es folgt daraus auch, dass alle jene Flächen, die horizontale Combinationskanten hervorbringen, im Schema parallele Flächenorte haben.

Für die entsprechende Zonenlinie der graphischen Punkt-Ellipsen-Methode haben wir, wenn wir ebenfalls in der allgemeinen Gleichung derselben $p = \infty$, $q = \infty$ und $\frac{p}{q} = n$ setzen, durch q^2 zu dividiren, wodurch wir erhalten:

$$n^2 x^2 - 2 n x y + y^2 = 0,$$

oder auch, indem wir diese Gleichung reduciren,

$$y = n x.$$

offenbar eine durch den Coordinaten-Mittelpunkt gehende, auf dem derselben Zone entsprechenden Geraden-Systeme senkrecht stehende Linie, in welcher alle Flächenorte, deren Flächen horizontale Combinationskanten hervorbringen, liegen, und deren Neigung gegen die Axe der x gegeben ist durch die Relation: $tang\,\alpha = \frac{q}{p} = \frac{1}{n}$.

§. 9.

Die Aufgabe des gegenwärtigen Paragraphes wird es sein, nachdem wir gesehen haben, wie die analytischen Verhältnisse der Zonenlinien beschaffen sind, auch auf die graphische Construction derselben näher einzugehen.

Es sei also irgend eine Zonenlinie im Schema zu construiren, so wird es sich vornehmlich darum handeln, die Richtung und die grössere Axe derselben zu bestimmen, indem die kleinere immer der Einheit gleich ist. Man bestimmt zu diesem Behufe im Schema der Quenstedt'schen graphischen Punkt-Methode den Zonenort N, indem man $OP = p$ und $OQ = q$ macht, zieht durch den Punkt O einen Kreis vom Radius $= 1$, nämlich $A B A' B'$, der also zum Radius die Einheit der ganzen Krystallreihe hat, und macht die Linie $O N' = O N$, verbindet den Punkt B mit N' und zieht parallel zu dieser Verbindungslinie eine Tangente $V V'$. Die Linie $O V'$ ist nun die halbe grössere Axe der Zonenlinie, die im Schema der graphischen Linien-Ellipsen-Methode mit der Richtung $O N$ zusammenfällt. Man macht also den Winkel $A O x$ (Fig. 4) $= N O x$ (Fig. 6) und trägt auf der Linie $O A$ die Länge $O A = O V_{\prime}$ auf. Senkrecht durch O eine Linie auf $O A$ gezogen und die Einheit als kleinere Axe aufgetragen, erhält man die Scheitelpunkte der Ellipse, die sodann leicht construirt werden kann. Es bedarf nur noch des Beweises, dass die Länge von $O V' = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ ist. Wir beweisen dies ganz einfach auf analytischem Wege. Wir haben nämlich $O B = 1$ und $O N' = O N = \sqrt{p^2 + q^2}$ als die Bestimmungsstücke der Linie $B N'$, ihre Gleichung ist nach diesen gegebenen Daten also folgende:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} x + 1.$$

Die Linie $V V'$ ist aber um die Einheit vom Coordinaten-Mittelpunkte entfernt, es muss also für die Bedingungsgleichung stattfinden:

$$b^2 = 1 + a^2,$$

oder, da $a^2 = \frac{1}{p^2 + q^2}$ ist, so haben wir also $b = \sqrt{\frac{1 + p^2 + q^2}{p^2 + q^2}}$, die Gleichung der geraden Linie $V V'$ ergibt sich hiernach als folgende:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} x + \sqrt{\frac{1 + p^2 + q^2}{p^2 + q^2}},$$

und setzen wir in dieser Gleichung $y = 0$, so wird $x = OV'$, welches also folgt als

$$OV_1 = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

ein Beweis, dass die oben angegebene Constructionsweise richtig ist.

Wollte man die für eben diese Zone geltende Zonenlinie der graphischen Punkt-Ellipsen-Methode construiren, so hätte man ON als die Richtung der kleineren Axe der Ellipse und man müsste, um deren Länge zu finden, von T aus, dem Tangirungspunkte der Linie VV' an den Kreis $A\,B\,A'\,B'$, auf die Linie Ox ein Perpendikel TR ziehen und die Linie $OA = OR$ würde dann die Länge der kleineren Axe der Ellipse sein, senkrecht durch 0 gehend auf diese würde der Einheit gleich die grössere Axe sein, und somit die Zonenlinie selbst leicht construirt werden können.

Eine andere Aufgabe, welche bei der Bildung des Schema's vorkommen kann, besteht darin, dass man jenen Punkt bestimmen soll, in welchem ein gegebener Flächenort an die Zonenlinie tangirt. Man verfährt, um diese Aufgabe zu lösen, auf folgende einfache Art: Man bestimmt von der gegebenen Zonenlinie $A\,A'\,B\,B'$ die beiden Brennpunkte F und F' (Fig. 7) einfach dadurch, dass man $BF = BF' = OA$ macht, und zieht von dem einen Brennpunkt F, dem die gegebene Linie MN näher liegt, eine senkrechte Linie FP, welche die Gerade MN in dem Punkte R trifft, macht sodann $FR = RP$ und verbindet den Punkt P mit dem anderen Brennpunkte F'. Die Linie F, P schneidet nun die gerade Linie MN in dem Punkte Q, welcher der gesuchte Tangirungspunkt ist. Der Beweis für die Richtigkeit dieser Constructions-Methode liegt ganz nahe. Es wird nämlich der Winkel $F_{,}\,Q\,\rho = F\,Q\,P$ durch die Linie MN halbirt, welche Relation nur für jenen Punkt der geraden Linie stattfinden kann, der sowohl der Geraden als auch der Zonenlinie gemeinschaftlich ist.

Ebenso ist es ein Leichtes, im Schema jenen Flächenort anzugeben, der an eine gewisse Zonenlinie in einem bestimmten Punkte Q tangirt. Man verbindet nämlich in diesem Falle diesen Punkt mit jedem der beiden Brennpunkte der Zonenlinie, erhält so den Winkel PQF, den man durch eine durch den Punkt Q gehende gerade Linie MN halbirt. Diese gerade Linie ist der gesuchte Flächenort.

Sind im Schema zwei Zonenlinien gegeben, so hat man nur, um den Flächenort jener Fläche zu bestimmen, welche zu gleicher Zeit in den beiden Zonen liegt, welche durch die beiden Zonenlinien im Schema vertreten sind, an dieselben eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen und die Aufgabe ist gelöst. So wird der Flächenort irgend einer Gestalt $(\breve{\bar{P}} + n)^m$ leicht gefunden, wenn man an die, den beiden Zonen $\breve{P}r + n \,.\, \bar{P}r + \infty$ und $\bar{P}r + n \,.\, \breve{P}r + \infty$ entsprechenden Zonenlinien eine gemeinschaftliche Tangente zieht.

Im orthotypen Krystallsysteme gibt es im Allgemeinen zwei verschiedene Lagen der Zonenlinie, fällt jedoch die Zonengerade in eine coordinirte Ebene, so ist nur eine Lage derselben möglich. Bei den übrigen graphischen Methoden der Krystallographie, die graphische Punkt-Ellipsen-Methode ausgenommen, hatten wir vier und respective auch zwei verschiedene Lagen der Zonenlinie und das Nichtübereinstimmen erklärt sich hier daraus, dass zwei Zonenlinien der übrigen Methoden hier in eine einzige sich vereinigt finden, ohne die Zonenverhältnisse jedoch irgendwie zu stören oder dem Schema die Klarheit zu nehmen.

Im rhomboëdrischen Systeme sind so sechs respective drei verschiedene Lagen möglich und im pyramidalen acht und vier Lagen derselben denkbar.

§. 10.

Zum Schlusse der ganzen Abhandlung wollen wir auch hier wieder alle Resultate der Analysis zusammenfassen und auf eine Krystallreihe anwenden. Wir wählen hierzu wieder die Krystallreihe des prismatischen Topases, Mohs, trivial Topas genannt. Die Grundgestalt dieser Mineral-Species hat bekanntlich folgende Abmessungen:

$$P = 141^\circ\, 7';\;\; 101^\circ\, 52';\;\; 90^\circ\, 55';$$

$$a : b : c = 1 : \sqrt{4{\cdot}440} : \sqrt{1{\cdot}328}.$$

Die wichtigsten Gestalten dieser Species sind mit ihren Axenverhältnissen in der folgenden Zusammenstellung enthalten und im Schema mit ihren Mohs'schen Zeichen angegeben:

$$\begin{array}{rlrl}
P - \infty &= a : \infty b : \infty c & \breve{P}r + 1 &= a : \tfrac{1}{2}b : \infty c \\
P - 1 &= a : 2b : 2c & \breve{P}r + 2 &= a : \tfrac{1}{4}b : \infty c \\
\tfrac{4}{3}P - 1 &= a : \tfrac{3}{2}b : \tfrac{3}{2}c & \breve{P}r &= a : b : \infty c \\
P &= a : b : c & (\tfrac{4}{3}\breve{P} - 1)^2 &= a : \tfrac{3}{4}b : \tfrac{3}{2}c \\
P + 1 &= a : \tfrac{1}{2}b : \tfrac{1}{2}c & (\bar{P} + 1)^{\frac{3}{2}} &= a : \tfrac{1}{2}b : \tfrac{1}{3}c \\
P + \infty &= \infty a : b : c & (\bar{P} + 2)^{\frac{3}{2}} &= a : \tfrac{1}{4}b : \tfrac{1}{3}c
\end{array}$$

$$(\breve{P}+\infty)^2 = \infty a : b : 2c \qquad \bar{P}r + 1 = a : \infty b : \tfrac{1}{2}c$$
$$(\breve{P}+\infty)^{\frac{3}{4}} = \infty a : b : \tfrac{3}{2}c \qquad \breve{P}r + \infty = \infty a : b : \infty c$$
$$(\breve{P}+\infty)^3 = \infty a : b : 3c \qquad \bar{P}r + \infty = \infty a : \infty b : c$$

Diese Flächen, welche in der Natur wirklich vorkommen, sind in Fig. 8 nebst noch einigen anderen denkbaren Gestalten dargestellt.

Man sieht sogleich beim ersten Blick auf das Schema die meisten angegebenen Verhältnisse, so dass alle jene Krystallflächen, die unter sich horizontale Combinationskanten hervorbringen, im Schema mit parallelen Flächenorten erscheinen, ebenso dass die Flächenorte der Krystallflächen dieser graphischen Methode jenen der Quenstedtschen graphischen Punkt-Methode und jenen der graphischen Parabel-Methode parallel sind; dass die Zonenlinie für die Zone der verticalen Prismen ein Kreis vom Radius = 1 sei, der im Coordinaten-Mittelpunkte seinen Mittelpunkt habe und dass dieser Kreis das Schema gegen den Coordinaten-Mittelpunkt hin begrenzt, während es sich in der anderen Richtung bis ins Unendliche ausdehnt; dass die Zonenlinie, welche horizontalen Combinationskanten entspricht, ein System zweier paralleler Geraden sei, die sich zu verschiedenen Seiten des Coordinaten-Mittelpunktes befinden und von demselben um die Einheit entfernt seien, dass also die eine Axe dieser Zonenlinie unendlich gross ist, während die kleinere, wie bei allen Zonenlinien, der Einheit gleich ist. Aus dem Schema ersieht man auch sogleich dass, da jede Zonenlinie an den Kreis vom Radius = 1 tangirt, in jeder Zone ein verticales Prisma liegen müsse, eine bekannte Thatsache, die sich in jedem Schema der graphischen Methoden der Krystallographie klar darstellt. Endlich ersieht man aus dem Schema, dass alle jene Zonenlinien, deren entsprechende Zonenaxen in einer verticalen Ebene liegen, eine gemeinschaftliche kleinere Axe haben, und dass die Richtung ihrer grösseren Axe dieselbe ist, dass also in solchen Zonen nur die Prismenfläche gleichzeitig liegen kann.

So ist denn diese Methode der erste und vielleicht der einzige Fall, dass ein und derselbe Kegelschnitt Anlass gibt zu zwei graphischen Methoden der Krystallographie, von welchen bei der einen die Flächenorte Punkte, bei der anderen jedoch gerade Linien sind, und welche beiden Methoden einen so schönen Gegensatz zu einander bilden.

Fig. 1.

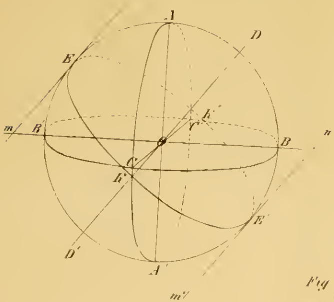


Fig. 2.

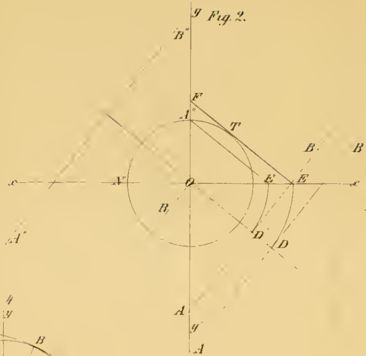


Fig. 3.

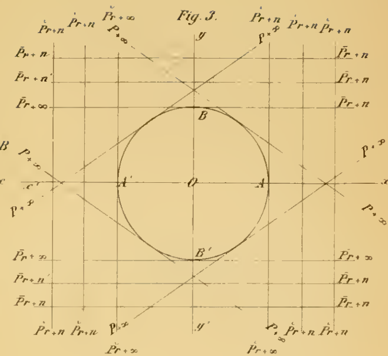


Fig. 4.

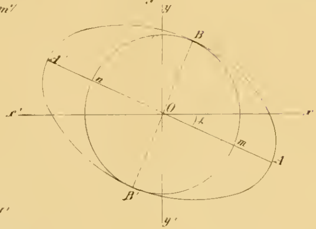


Fig. 5.

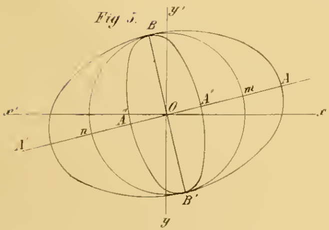


Fig. 6.

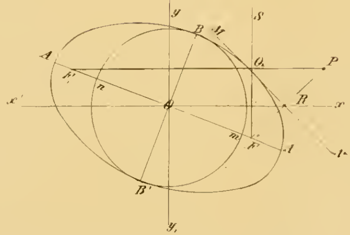
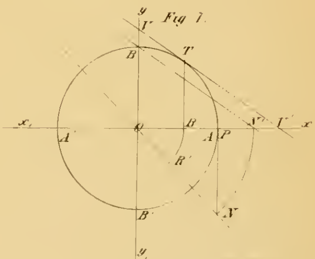


Fig. 7.



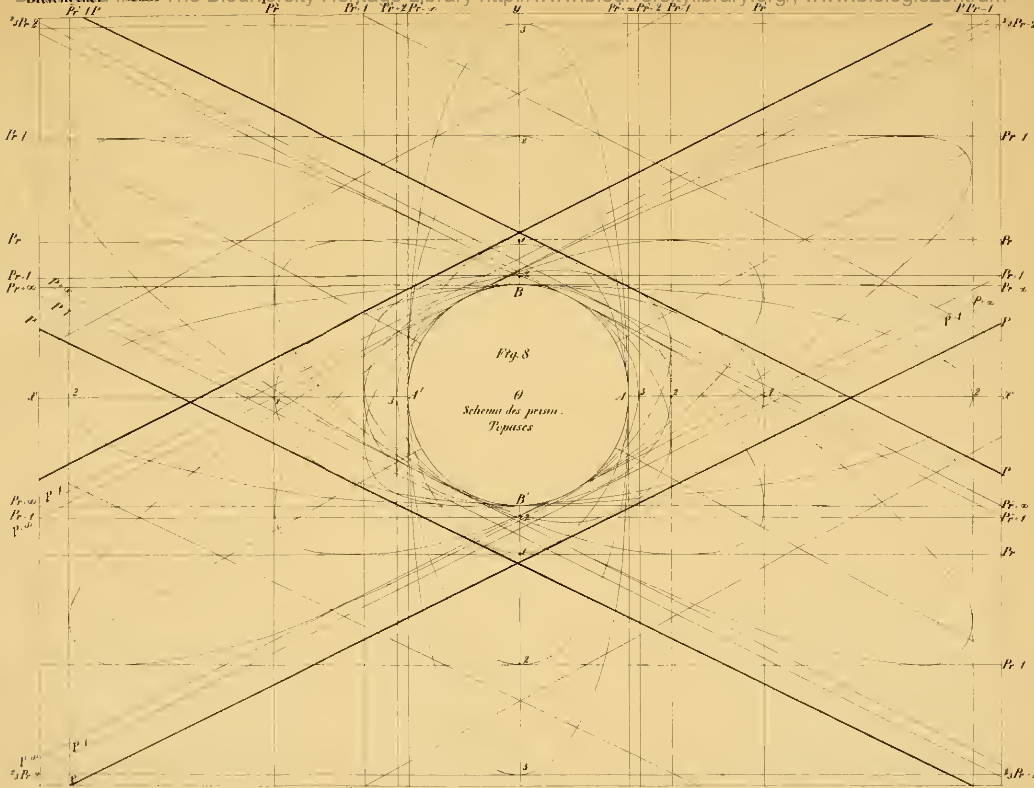


Fig. 8
O
Schema des prism. Topases
B
B′
A
A′
y
y′
x
Pr
Pr+1
Pr+∞
P
P+1
P+∞
Pr̆
Pr̆+1
Pr̆+2
Pr̆+∞