Über die Transversalschwingungen eines elastischen Stabes.

Von **Dr. J. Stefan.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 24. Juni 1858.)

Die Differentialgleichung, welche die Gesetze für die transversalen Schwingungen eines elastischen Stabes oder eigentlich seines mittleren longitudinalen Fadens liefert, hat die Form [1]:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2 \frac{d^4y}{dx^4} = 0. \tag{1}$$

Darin bedeutet x die zur Zeit t stattfindende transversale Abweichung eines um x von dem Anfangspunkte der Coordinaten entfernten Punktes des im Gleichgewichtszustande mit der Axe der x zusammenfallenden mittleren Fadens, a^2 hingegen ist ein von der Natur und den Dimensionen des Stabes abhängiger Coëfficient, der bezüglich x sowohl als auch nach t constant angenommen wird.

Die Integration der Differentialgleichung (1) liefert die Schwingungsgesetze für den gegenwärtigen Fall. Da y als periodische Function verlangt wird, kann man die Integration bewerkstelligen durch die Substitution

$$y = X e^{\alpha t \sqrt{-1}}, \tag{2}$$

worin X eine reine Function von x, α eine unbestimmte Constante bedeutet; sowohl X als auch α müssen näher bestimmt werden. Führt man den Werth von y aus (2) in die Gleichung (1) ein, so folgt

$$-\alpha^2 + a^2 \frac{d^2X}{dx^2} = 0 \tag{3}$$

[1] Poisson: Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques. Mém. de l'Académie des sciences. Tom. VIII. und Vibrations transversales d'une verge élastique. Traité de Méc. 2. éd. Tome II. p. 368.

eine lineare Differentialgleichung, die zur Bestimmung von X dienen wird. Fährt man in diese letzte Gleichung

(4) $$X = e^{\theta x}$$

ein, so erhält man als Bedingungsgleichung, welche erfüllt sein muss, wenn der in (4) angenommene Werth von X der Gleichung (3) genügen soll, folgende

$$a^2 \theta^2 - \alpha^2 = o,$$

woraus

$$\theta^2 = \frac{\alpha^2}{a^2}$$

folgt und setzt man abkürzend

(5) $$\frac{\alpha}{a} = b^2,$$

so erhält man für θ folgende vier Werthe

$$b, \; - b, \; b\sqrt{-1}, \; - b\sqrt{-1},$$

X kann also jede der Formen

$$e^{bx}, \; e^{-bx}, \; e^{bx\sqrt{-1}}, \; e^{-bx\sqrt{-1}}$$

besitzen, wegen der Linearität der Gleichung (3) genügt ihr daher auch

$$X = Ge^{bx} + He^{-bx} + Je^{bx\sqrt{-1}} + Ke^{-bx\sqrt{-1}},$$

wenn G, H, J, K arbiträre Constanten bezeichnen. Es geht also die Gleichung (2) über in die folgende

$$y = \left(Ge^{bx} + He^{-bx} + Je^{bx\sqrt{-1}} + ke^{-bx\sqrt{-1}}\right) e^{\pm \alpha t \sqrt{-1}}.$$

Löst man die imaginären Exponentiellen in Sinus und Cosinus auf, bezeichnet die zu $\cos b\,x$ und $\sin b\,x$ hinzukommenden Constanten wieder mit J und K, ferner die zu $\cos \alpha t$ und $\sin \alpha t$ hinzutretenden mit A und B, so hat man

$$y = [Ge^{bx} + He^{-bx} + J\cos bx + K\sin bx]\,[A\cos \alpha t + B\sin \alpha t].$$

Zieht man aus der Gleichung (5) den Werth von α nämlich

$$\alpha = ab^2$$

und setzt man abkürzend wieder

$$X = Ge^{bx} + He^{-bx} + J\cos bx + K\sin bx, \tag{6}$$

so hat man

$$y = X(A\cos ab^2t + B\sin ab^2t). \tag{7}$$

Das in der Gleichung (7) niedergelegte Integral der Differentialgleichung, die zum Ausgangspunkte genommen wurde, drückt im Allgemeinen die Gesetze, denen die transversalen Schwingungen eines elastischen Stabes gehorchen, aus, ohne dass der Stab noch näher specialisirt wäre, ausser dadurch, dass seine Querdimensionen und sein Elasticitätsmodulus in der Constante a also auch in der noch unbestimmten Grösse b enthalten sind. Diese Allgemeinheit des Integrales ist bedingt durch das Vorkommen von willkürlichen Constanten in demselben und das Integral wird jedem speciellen Falle dadurch angepasst, dass man durch die Bedingungen, welche diesen speciellen Fall charakterisiren, die in ihm noch unbestimmt gelassenen Stücke, wie da sind G, H, J, K, A, B und b näher determinirt. Angenommen der Stab sei vollständig frei, von der Länge l und an seinen beiden Enden von gar keinen äusseren Kräften afficirt, so ist dieser Fall charakterisirt durch die Bedingungen, dass die Ausdrücke

$$\frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3}$$

für die beiden Enden des Stabes der Nulle gleich sein müssen zu jeder beliebigen Zeit. Legt man den Anfangspunkt der Coordinaten in den einen Endpunkt, so hat man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dx^3} = o \text{ für } x = o$$

$$\frac{d^2y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^2} = o \text{ für } x = l$$

und da diese Bedingungen unabhängig von der Zeit erfüllt sein müssen, so kann nur der Factor X in dem Integrale (7) denselben genügen und es gestalten sich die Bedingungsgleichungen für einen freien von keinen äusseren Kräften sollicitirten elastischen Stab in folgende Formen:

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{d^3X}{dx^3} = o \text{ für } x = o,$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{d^3X}{dx^3} = o \text{ für } x = l.$$

Führt man in diese zwei Paare von Gleichungen den Werth von X aus (6) ein und setzt in dem ersten Paare der Substitutionsresultate $x=o$, im zweiten $x=l$, so folgen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} G + H - J &= o \\ G - H - K &= o \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

aus dem ersten Paare und

$$\left.\begin{aligned} Ge^{bl} + He^{-bl} - J\cos bl - k\sin bl &= o \\ Ge^{bl} - He^{-bl} + J\sin bl - k\cos bl &= o \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

aus dem zweiten Paare.

Diese vier Gleichungen können zur Bestimmung der Constanten G, H, J, K nicht dienen, weil jedes ihrer Glieder mit einer dieser zu bestimmenden Grössen behaftet ist, sie werden daher nur die Verhältnisse dreier dieser Grössen zur vierten geben. Dann wird aber noch eine der Gleichungen übrig bleiben, die man zur Determination der ebenfalls noch unbestimmten Grösse b wird benützen können. Setzt man aus den Gleichungen (8) die Werthe

$$\begin{aligned} J &= G + H \\ K &= G - H \end{aligned}$$

in die Gleichungen (9), so folgt

$$G(e^{bl} - \cos bl - \sin bl) + H(e^{-bl} - \cos bl + \sin bl) = o$$
$$G(e^{bl} + \sin bl - \cos bl) + H(e^{-bl} + \sin bl + \cos bl) = o$$

Aus den ersten dieser zwei Gleichungen erhält man

$$\frac{G}{H} = -\frac{e^{-bl} - \cos bl + \sin bl}{e^{bl} - \cos bl + \sin bl}, \tag{10}$$

aus der zweiten

$$\frac{G}{H} = \frac{e^{-bl} - \cos bl - \sin bl}{e^{bl} - \cos bl + \sin bl}. \tag{11}$$

Sollen diese zwei Werthe von $\frac{G}{H}$ identisch sein, so muss nothwendig

$$-\frac{e^{-bl} - \cos bl + \sin bl}{e^{bl} - \cos bl - \sin bl} = \frac{e^{-bl} - \cos bl - \sin bl}{e^{bl} - \cos bl + \sin bl}$$

sein und aus dieser letzten Gleichung kann b bestimmt werden. Sie verwandelt sich nach einigen Reductionen in

$$(e^{bl} + e^{-bl}) \cos bl - 2 = o.$$

Diese nach b transcendente Gleichung liefert unendlich viele Wurzeln, deren jede als Werth von b in das Integral der behandelten Differentialgleichung gesetzt werden kann. Bezeichnet man eine dieser Wurzeln mit b_r, so entsprechen ihr auch bestimmte G und H, weil diese nach den Gleichungen (10) und (11) durch b bestimmt werden. Da diese Gleichungen G und H nicht unmittelbar liefern, sondern nur ihr Verhältniss, so kann man etwa in der Gleichung (10) Zähler und Nenner mit einer Constante multipliciren, die den Effect haben muss, dass dadurch G dem Zähler, H dem Nenner dieses Bruches gleich wird, und da nach den Gleichungen (8) J und K linear durch G und H bestimmt sind, so werden alle in X vorkommende Constanten denselben Factor tragen, den wir uns für den einen Theil des Integrales, der die Cosinusfunction enthält, in A für den andern die Sinusfunction enthaltenden in B denken, so dass also auch A und B von b im Allgemeinen abhängen. Bezeichnet man die einem bestimmten Werthe von b etwa b_r entsprechenden Grössen

$$A,\ B,\ G,\ H,\ J,\ K,\ X$$

mit

$$A_r,\ B_r,\ G_r,\ H_r,\ J_r,\ K_r,\ X_r,$$

so ist das diesem b_r entsprechende Integral

$$y = X_r\,(A_r \cos a b_r{}^2 t + B_r \sin a b_r{}^2 t)$$

und

$$X_r = G_r e^{b_r x} + H_r e^{-b_r x} + J_r \cos b_r x + K_r \sin b_r x$$

Ob der Linearität der Differentialgleichung (1) ist daher ihr allgemeines Integral gegeben durch

$$y = \Sigma \left[X_r \left(A_r \cos a b_r{}^2 t + B_r \sin a b_r{}^2 t\right)\right], \tag{13}$$

worin das Zeichen Σ bedeutet, dass die Summe aller Glieder gesetzt werden soll, die hervorgehen aus dem eingeklammerten, wenn man in demselben für b_r der Reihe nach alle Wurzeln der Gleichung (12) setzt und ihnen gemäss auch die A, B und X jedesmal bestimmt.

Das so erhaltene Integral enthält noch zwei willkürliche Bestandtheile in sich, nämlich die Constanten A und B. Um diese bestimmen zu können, muss man für irgend einen Zeitpunkt den Bewegungszustand des elastischen Stabes kennen, also die transversale Elongation jedes Punktes und seine Geschwindigkeit in diesem Elongationsstande für irgend einen Moment. Zählt man die Zeit von eben diesem Momente an, so ist zur Vollendung der Integration noch die Einführung der initialen Bedingungen nöthig. Diese mögen folgendermassen formulirt werden. Für $t=o$ werde

$$y = f(x), \quad \frac{dy}{dt} = F(x), \tag{14}$$

so dass den verschiedenen Theilchen des Stabes bei Beginn der Zeit eine Elongation zukomme, welche für jedes einzelne durch den Werth gegeben ist, den $f(x)$ annimmt, wenn man darin für x die entsprechende Abscisse dieses Theilchens setzt. Ebenso besitzt bei Beginn der Zeit jedes Theilchen eine gewisse Geschwindigkeit, die durch $F(x)$ auf dieselbe Weise bestimmt ist, auf welche seine Elongation durch $f(x)$ gegeben ist. Führt man diese Bedingungen in die Gleichung (13) und die aus ihr abgeleitete

$$\frac{dy}{dt} = \Sigma \left[X_r \left(- A_r a b_r{}^2 \sin a b_r{}^2 t + B_r a b_r{}^2 \cos a b_r{}^2 t\right)\right]$$

ein, so erhält man

$$f(x) = \Sigma \left[A_r X_r\right] \tag{15}$$

$$F(x) = \Sigma \left[a b_r{}^2 B_r X_r\right]. \tag{16}$$

Diese zwei Gleichungen, welche entwickelt aufgeschrieben folgende Gestalt haben:

$$f(x) = A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + \ldots + A_r X_r + \ldots$$
$$F(x) = ab_1{}^2 B_1 X_1 + ab_2{}^2 B_2 X_2 + ab_3{}^2 B_3 X_3 + \ldots + ab_r{}^2 B_r X_r + \ldots$$

müssen nun die Bestimmung der Constanten A und B liefern. Da dieser Constanten unendlich viele sind, so müssen aus diesen zwei Gleichungen, damit überhaupt an eine Bestimmung der verschiedenen A und B gedacht werden kann, unendlich viele abgeleitet werden. Dies geschieht hier nach derselben Methode, welche bei der Auflösung des Problemes von den Schwingungen der Saiten angewendet wird. Man multiplicirt nämlich jede der Gleichungen der Reihe nach mit $X_1, X_2, X_3, \ldots X_r \ldots$ und hat an jede der so erhaltenen Gleichungen eine solche Operation anzulegen, dass alle Glieder auf der rechten Seite verschwinden bis auf eines, welches übrig bleibende Glied von Gleichung zu Gleichung ein anderes werden muss, damit jede der Gleichungen eine andere Constante bestimmbar macht. Das System der Gleichungen, mit denen man zu operiren hat, ist also folgendes:

$$f(x)\,X_1 = A_1 X_1{}^2 + A_2 X_1 X_2 \quad A_3 X_1 X_3 + \ldots + A_r X_1 \quad + \ldots$$
$$f(x)\,X_2 = A_1 X_1 X_2 + A_2 X_2 X_2{}^2 \; A_3 X_2 X_2 + \ldots + A_r X_2 \, X_r + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(x)\,X_r = A_1 X_1 X_r + A_2 X_2 X_r \quad A_3 X_3 X_r + \ldots + A_r X_r{}^2 X_r + \ldots$$

u. s. w.,

ferner

$$F(x)\,X_1 = ab_1{}^2 B_1 X_1{}^2 + ab_2{}^2 B_2 X_1 X_2 + \ldots + ab_r{}^2 B_r X_1 X_r + \ldots$$
$$F(x)\,X_2 = ab_1{}^2 B_1 X_1 X_2 + ab_2{}^2 B_2 X_2{}^2 + \ldots + ab_r{}^2 B_r X_2 X_r + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(x)\,X_r = ab_1{}^2 B_1 X_1 X_r + ab_2{}^2 B_2 X_2 X_r + \ldots + ab_r{}^2 B_r X_r{}^2 + \ldots$$

u. s. w.

Diese Gleichungen werden nun, damit das Geforderte geleistet werde, folgender Behandlung unterzogen: man multiplicirt jede mit dx und integrirt dann auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens zwischen den Grenzen $x = o$ und $x = l$. Es gehen sonach die beiden das vorige System charakterisirenden Gleichungen über in

$$\int_0^l f(x)\, X_r\, dx = A_1 \int_0^l X_1\, X_r\, dx +$$

$$A_2 \int_0^l X_2 X_r\, dx + \ldots + A_r \int_0^l X_r^2\, dx + \ldots$$

$$\int_0^l F(x)\, X_r\, dx = a b_1^2\, B_1 \int_0^l X_1\, X_r\, dx +$$

$$a b_2^2\, B_2 \int_0^l X_2\, X_r\, dx + \ldots + a b_r^2\, B_r \int_0^l X_r^2\, dx + \ldots$$

Aus diesen zwei Gleichungen können leicht alle übrigen abgeleitet werden dadurch, dass man den Index r bei X_r mit 1, 2, 3 u. s. w. vertauscht.

Die auf der rechten Seite auftretenden Integrale haben die Eigenschaft, dass jedes der Nulle gleich ist, das unter dem Integralzeichen ein Product zweier mit ungleichen Indices versehenen X stehen hat, hingegen ist jedes von der Nulle verschieden, sobald die Indices der beiden Factoren X gleich sind, also unter dem Integralzeichen ein quadratischer Differentialfactor sich befindet. Bezeichnen r und s zwei verschiedene Indices, so ist demnach

$$\int_0^l X_r\, X_s\, dx = 0,$$

was auch r und s bedeuten mögen, nur dann, wenn r und s gleiche Werthe haben, ist dies Integral, oder

$$\int_0^l X_r^2\, dx$$

von der Nulle verschieden. Diese Eigenschaft der vorstehenden Integrale macht die Bestimmung sämmtlicher Constanten möglich und dass sie ihnen zukommt, beweise ich auf folgende Art.

Die Gleichungen (8) und (9) gelten offenbar für jedes System zusammengehöriger Werthe von G, H, I, K und b. Sind zwei solche Systeme

$$G_r,\ H_r,\ J_r,\ K_r,\ b_r$$

und

$$G_s,\ H_s,\ J_s,\ K_s,\ b_s,$$

so bestehen vermöge der Gleichungen (8) und (9) auch die folgenden

$$\begin{aligned} G_r + H_r - J_r &= 0 \\ G_r - H_r - K_r &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} G_s + H_s - J_s &= 0 \\ G_s - H_s - K_s &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} G_r e^{b_r l} + H_r e^{-b_r l} - J_r \cos b_r l - K_r \sin b_r l = 0 \\ G_r e^{b_r l} - H_r e^{-b_r l} + J_r \sin b_r l - K_r \cos b_r l = 0 \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} G_s e^{b_s l} + H_s e^{-b_s l} - J_s \cos b_s l - K_s \sin b_s l = 0 \\ G_s e^{b_s l} - H_s e^{-b_s l} + J_s \sin b_s l - K_s \cos b_s l = 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Der Bequemlichkeit wegen mögen die Ausdrücke $b_r\ l$ und $b_s\ l$ einfach durch die Buchstaben r und s vertreten werden, so dass

$$\begin{aligned} e^{b_r l} = e^r,\ e^{-b_r l} = e^{-r},\ \cos b_r l = \cos r,\ \sin b_r l = \sin r \\ e^{b_s l} = e^s,\ e^{-b_s l} = e^{-s},\ \cos b_s l = \cos s,\ \sin b_s l = \sin s \end{aligned}$$

geschrieben werde. Nach dieser Abkürzung nimmt z. B. die erste der Gleichungen (19) die Form

$$G_r e^r + H_r e^{-r} - J_r \cos r + K_r \sin r = 0$$

an und die zweite der Gleichungen (20) wird

$$G_s e^s - H_s e^{-s} + J_s \sin s - K_s \cos s = 0.$$

Multiplicirt man diese zwei letzten Gleichungen unter einander, so erhält man folgende sechzehngliedrige Gleichung:

$$\begin{aligned} & G_r G_s e^{r+s} - G_r H_s e^{r-s} + G_r J_s e^r \sin s - \\ & + H_r G_s e^{-r+s} - H_r H_s e^{-r-s} + H_r J_s e^{-r} \sin s - \\ & - J_r G_s e^s \cos r + J_r H_s e^{-s} \cos r - J_r J_s \cos r \sin s + \\ & - K_r G_s e^s \sin r + K_r H_s e^{-s} \sin r - K_r J_s \sin r \sin s + \\ & \left.\begin{aligned} - G_r K_s e^r \cos s \\ - H_r K_s e^{-r} \cos s \\ + J_r K_s \cos r \cos s \\ + K_r K_s \sin r \cos s \end{aligned}\right\} = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Diese Gleichung hat zu Folge ihrer Bildungsweise nachstehende Eigenschaften:

1. Jede der vier Horizontalreihen ihrer Glieder ist für sich der Nulle gleich.

2. Jede der vier Verticalreihen ihrer Glieder ist für sich der Nulle gleich.

3. Nennt man die Summe des ersten, zweiten, fünften, sechsten Gliedes das erste Gliederviertel, die Summe der übrigen Glieder der ersten und zweiten Horizontalreihe das zweite, die Summe der Glieder in den ersten Hälften der zwei letzten Horizontalreihen das dritte, die Summe der übrigen Glieder in diesen zwei Horizontalreihen das vierte Gliederviertel, so hat die vorstehende Gleichung die Eigenschaft, dass jedes Gliederviertel gleich ist einem andern, und zwar ist dieses andere eines der zwei ihm zunächstliegenden, so ist es mit entgegengesetzten, ist es das entfernteste, so ist es mit seinen Zeichen zu nehmen, um dem ursprünglich genommenen gleich zu sein.

4. Die Gleichung bleibt eine richtige und behält die angegebenen Eigenschaften, wenn man aller Orten die Buchstaben r und s mit einander vertauscht.

5. Die Gleichung bleibt eine richtige und behält die angegebenen Eigenschaften, wenn man aller Orten den Buchstaben r durch s ersetzt, so dass die Gleichung nur einerlei Indices s enthält, oder wenn man überall s durch r ersetzt, so dass die Gleichung nur einerlei Indices r enthält.

Nimmt man die in 4. angegebene Vertauschung vor, so erhält man die folgende Gleichung:

$$
(22)\quad
\left.
\begin{array}{rlll}
 & G_r G_s e^{r+s} & - H_r G_s e^{-r+s} & + J_r G_s e^{s} \sin r - \\
+ & G_r H_s e^{r-s} & - H_r H_s e^{-r-s} & + J_r H_s e^{-s} \sin r - \\
- & G_r J_s e \cos s & + H_r J_s e^{-r} \cos s & - J_r J_s \sin r \cos s + \\
- & G_r K_s e^{r} \sin s & + H_r K_s e^{-r} \sin s & - J_r K_s \sin r \sin s +
\end{array}
\right.
\left.
\begin{array}{l}
- K_r G_s e^{s} \cos r \\
- K_r H_s e^{-s} \cos r \\
+ K_r J_s \cos r \cos s \\
+ K_r K_s \cos r \sin s
\end{array}
\right\} = 0
$$

und diese Gleichung besitzt, wie schon bemerkt wurde, dieselben Eigenschaften, welche die Gleichung (21) hat.

Der Kürze halber möge die Gleichung (21) in folgender symbolischer Form geschrieben werden:

$$\left.\begin{array}{r}(1,1)+(1,2)+(1,3)+(1,4)\\+(2,1)+(2,2)+(2,3)+(2,4)\\+(3,1)+(3,2)+(3,3)+(3,4)\\+(4,1)+(4,2)+(4,3)+(4,4)\end{array}\right\}=0. \tag{23}$$

Darin bedeuten (1,1), (1,2) u. s. w. die an derselben Stelle in (21) stehenden Glieder.

Ferner soll auf eine analoge Weise die Gleichung (22) bezeichnet werden durch

$$\left.\begin{array}{r}[1,1]+[1,2]+[1,3]+[1,4]\\+[2,1]+[2,2]+[2,3]+[2,4]\\+[3,1]+[3,2]+[3,3]+[3,4]\\+[4,1]+[4,2]+[4,3]+[4,4]\end{array}\right\}=0. \tag{24}$$

Offenbar bestehen zwischen den Gliedern (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) der Gleichung (23) und den analogen der Gleichung (24) folgende Relationen:

$$\begin{array}{ll}(1,1)=[1,1], & (1,2)=-[2,1]\\(2,1)=-[1,2], & (2,2)=[2,2]\end{array} \tag{25}$$

Führt man für das erste, zweite, dritte, vierte Gliederviertel der Gleichungen (21) oder (23) die Bezeichnungen

(I), (II), (III), (IV)

und ebenso für das erste, zweite, dritte, vierte Gliederviertel der Gleichung (22) oder (24) die Bezeichnungen

[I], [II], [III], [IV]

ein, so kann man die in 3. angegebene Eigenschaft der beiden Gleichungen (21) und (22) durch die zwei folgenden ausdrücken:

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{I})=-(\mathrm{II})=-(\mathrm{III})=(\mathrm{IV})\\ [\mathrm{I}]=-[\mathrm{II}]=-[\mathrm{III}]=[\mathrm{IV}]\end{array}\right\} \tag{26}$$

Nach diesen Vorbereitungen kann man sogleich zur Bestimmung der Integrale

$$\int_o^l X_r X_s \, dx \text{ und } \int_o^l X_r^2 \, dx$$

schreiten. Es ist

$$\begin{aligned} X_r X_s = & [G_r e^{b_r x} + H_r e^{-b_r x} + J_r \cos b_r x + K_r \sin b_r x] \\ & [G_s e^{b_s x} + H_s e^{-b_s x} + J_s \cos b_s x + K_s \sin b_s x] \end{aligned}$$

oder in entwickelter Gestalt

$$\begin{aligned} X_r X_s = & \; G_r G_s e^{(b_r + b_s) x} + G_r H_s e^{(b_r - b_s) x} + \\ & + H_r G_s e^{-(b_r - b_s) x} + H_r H_s e^{-(b_r + b_s) x} + \\ & + J_r G_s e^{b_s x} \cos b_r x + J_r H_s e^{-b_s x} \cos b_r x + \\ & + K_r G_s e^{b_s x} \sin b_r x + K_r H_s e^{-b_s x} \sin b_r x + \\ & + G_r J_s e^{b_r x} \cos b_s x + G_r K_r e^{b_r x} \sin b_s x \\ & + H_r J_s e^{-b_r x} \cos b_s x + H_r K_s e^{-b_r x} \sin b_s x \\ & + J_r J_s \cos b_r x \cos b_s x + J_r K_s \cos b_r x \sin b_s x \\ & + K_r J_s \sin b_r x \cos b_s x + K_r K_s \sin b_r x \sin b_s x. \end{aligned}$$

Die Auswerthung des allgemeinen Integrales von $X_r X_s . dx$ vertheilt sich daher in eine Auswerthung von sechzehn Integralen, zu deren Lösung folgende bekannte allgemeine Formeln dienen:

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha x} \, dx &= \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \\ \int e^{\alpha x} \cos \beta x . dx &= \frac{\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} . e^{\alpha x} \\ \int e^{\alpha x} \sin \beta x . dx &= \frac{\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} . e^{\alpha x} \\ \int \sin \alpha x \cos \beta x . dx &= -\tfrac{1}{2} \frac{\cos (\alpha - \beta) x}{\alpha - \beta} - \tfrac{1}{2} \frac{\cos (\alpha + \beta) x}{\alpha + \beta} \\ \int \sin \alpha x \sin \beta x . dx &= \tfrac{1}{2} \frac{\sin (\alpha - \beta) x}{\alpha - \beta} - \tfrac{1}{2} \frac{\sin (\alpha + \beta) x}{\alpha + \beta} \\ \int \cos \alpha x \cos \beta x . dx &= \tfrac{1}{2} \frac{\sin (\alpha - \beta) x}{\alpha - \beta} + \tfrac{1}{2} \frac{\sin (\alpha + \beta) x}{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

Mit Benützung dieser Formeln erhält man nach Einführung der Grenzen o und l für x und der angegebenen Abkürzungen

$$
\begin{aligned}
\int_0^l X_r X_s \, dx = \; & G_r G_s \left[\frac{e^{r+s}}{b_r + b_s} - \frac{1}{b_r + b_s}\right] \\
& + G_r H_s \left[\frac{e^{r-s}}{b_r - b_s} - \frac{1}{b_r - b_s}\right] \\
& + G_r J_s \left[\frac{b_r \cos s + b_s \sin s}{b_r^2 + b_s^2} e^r - \frac{br}{b_r^2 + b_s^2}\right] \\
& + G_r K_s \left[\frac{b_r \sin s - b_s \cos s}{b_r^2 + b_s^2} e^r + \frac{b_s}{b_r^2 + b_s^2}\right] \\
& + H_r G_s \left[- \frac{e^{-(r-s)}}{b_r - b_s} + \frac{1}{b_r - b_s}\right] \\
& + H_r H_s \left[- \frac{e^{-r-s}}{b_r + b_s} + \frac{1}{b_r + b_s}\right] \\
& + H_r J_s \left[\frac{- b_r \cos s + b_s \sin s}{b_r^2 + b_s^2} e^{-r} + \frac{b_r}{b_r^2 + b_s^2}\right] \\
& + H_r K_s \left[\frac{- b_r \sin s - b_s \cos s}{b_r^2 + b_s^2} e^{-r} + \frac{b_s}{b_r^2 + b_s^2}\right] \\
& + J_r G_s \left[\frac{b_s \cos r + b_r \sin r}{b_r^2 + b_s^2} e^{s} - \frac{b_s}{b_r^2 + b_s^2}\right] \\
& + J_r H_s \left[\frac{- b_s \cos r + b_r \sin r}{b_r^2 + b_s^2} e^{-s} + \frac{b_s}{b_r^2 + b_s^2}\right] \\
& + J_r J_s \left[\tfrac{1}{2} \frac{\sin (r - s)}{b_r - b_s} + \tfrac{1}{2} \frac{\sin (r + s)}{b_r + b_s}\right] \\
& + J_r K_s \left[\tfrac{1}{2} \frac{\cos (r - s)}{b_r - b_s} - \tfrac{1}{2} \frac{\cos (r + s)}{b_r + b_s} - \tfrac{1}{2} \frac{1}{b_r - b_s} \right. \\
& \qquad \left. + \tfrac{1}{2} \frac{1}{b_r + b_s}\right] \\
& + K_r G_s \left[\frac{b_s \sin r - b_r \cos r}{b_r^2 + b_s^2} e^{s} + \frac{b_r}{b_r^2 + b_s^2}\right] \\
& + K_r H_s \left[\frac{- b_s \sin r - b_r \cos r}{b_r^2 + b_s^2} e^{-s} + \frac{b_r}{b_r^2 + b_s^2}\right] \\
& + K_r J_s \left[- \tfrac{1}{2} \frac{\cos (r - s)}{b_r - b_s} - \tfrac{1}{2} \frac{\cos (r + s)}{b_r + b_s} + \tfrac{1}{2} \frac{1}{b_r - b_s} \right. \\
& \qquad \left. + \tfrac{1}{2} \frac{1}{b_r + b_s}\right] \\
& + K_r K_s \left[\tfrac{1}{2} \frac{\sin (r - s)}{b_r - b_s} - \tfrac{1}{2} \frac{\sin (r + s)}{b_r + b_s}\right].
\end{aligned}
$$

Ordnet man alle Glieder des Integrales nach den Factoren

$$
\frac{1}{b_r + b_s}, \quad \frac{1}{b_r - b_s}, \quad \frac{b_r}{b_r^2 + b_s^2}, \quad \frac{b_s}{b_r^2 + b_s^2}
$$

so wird es in der Form

$$\frac{1}{b_r + b_s} \cdot M_{r,s} + \frac{1}{b_r - b_s} \cdot N_{r,s} + \frac{b_r}{b_r^2 + b_s^2} P_{r,s} + \frac{b_s}{b_r^2 + b_s^2} Q_{r,s}$$

ausgewerthet erscheinen, worin $M_{r,s}$, $N_{r,s}$, $P_{r,s}$, $Q_{r,s}$ Bedeutungen haben, zu deren Kenntniss die wirkliche Ausführung der angedeuteten Sonderung der Glieder führt.

Es ist zunächst

$$\begin{aligned} M_{r,s} = {} & G_r G_s e^{r+s} - G_r G_s \\ & - H_r H_s e^{-r-s} + H_r H_s \\ & + \tfrac{1}{2} J_r J_s \sin(r+s) - \tfrac{1}{2} J_r K_s \cos(r+s) + \tfrac{1}{2} J_r K_s \\ & - \tfrac{1}{2} K_r J_s \cos(r+s) - \tfrac{1}{2} K_r K_s \sin(r+s) + \tfrac{1}{2} K_r J_s. \end{aligned}$$

Nun ist vermöge der Gleichungen (17) und (18)

$$\tfrac{1}{2} J_r K_s + \tfrac{1}{2} K_r J_s = G_r G_s - H_r H_s,$$

also kann man in $M_{r,s}$ alle Glieder, welche keine Exponentiellen und keine cyklischen Functionen enthalten, weglassen und schreiben

$$\begin{aligned} M_{r,s} = {} & G_r G_s e^{r+s} - H_r H_s e^{-r-s} \\ & + \tfrac{1}{2} J_r J_s \sin r \cos s + \tfrac{1}{2} J_r J_s \cos r \sin s - \tfrac{1}{2} J_r K_s \cos r \cos s \\ & \qquad + \tfrac{1}{2} J_r K_s \sin r \sin s \\ & - \tfrac{1}{2} K_r J_s \cos r \cos s + \tfrac{1}{2} K_r J_s \sin r \sin s - \tfrac{1}{2} K_r K_s \sin r \cos s \\ & \qquad - \tfrac{1}{2} K_r K_s \cos r \sin s. \end{aligned}$$

Eine Vergleichung dieser Ausdrücke mit den Gleichungen (21), (22), (23), (24) liefert

$$\begin{aligned} M_{r,s} = {} & (1, 1) + (2, 2) \\ & - \tfrac{1}{2} [3, 3] - \tfrac{1}{2} (3, 3) - \tfrac{1}{2} (3, 4) - \tfrac{1}{2} [4, 3] \\ & - \tfrac{1}{2} [3. 4] - \tfrac{1}{2} (4, 3) - \tfrac{1}{2} (4, 4) - \tfrac{1}{2} [4, 4]. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit 2, addirt dazu die identischen Gleichungen

$$(1, 2) + [2, 1] = 0$$

$$(2, 1) + [1, 2] = 0$$

und bemerkt zugleich, dass

$$(1, 1) = [1, 1]$$
$$(2, 2) = [2, 2],$$

so erhält man für $M_{r,s}$ folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} 2M_{r,s} = & (1, 1) + (1, 2) + [1, 1] + [1, 2] \\ & + (2, 2) + (2, 2) + [2, 1] + [2, 2] \\ & - (3, 3) - (3, 4) - [3, 3] - [3, 4] \\ & - (4, 3) - (4, 4) - [4, 3] - [4, 4] \end{aligned}$$

oder nach der für die Gliederviertel eingeführten Bezeichnung

$$\begin{aligned} 2M_{r,s} = & (\mathrm{I}) + [\mathrm{I}] \\ & - (\mathrm{IV}) - [\mathrm{IV}]. \end{aligned}$$

Zu Folge der Gleichungen (26) und (27) ist also

$$M_{r,s} = 0.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} N_{r,s} = & G_r H_s e^{r-s} - G_r H_s \\ & - H_r G_s e^{-r+s} + H_r G_s \\ & + \tfrac{1}{2} J_r J_s \sin(r-s) + \tfrac{1}{2} J_r K_s \cos(r-s) - \tfrac{1}{2} J_r K_s \\ & - \tfrac{1}{2} K_r J_s \cos(r-s) + \tfrac{1}{2} K_r K_s \sin(r-s) + \tfrac{1}{2} K_r J_s. \end{aligned}$$

Da vermöge der Gleichungen (17) und (18)

$$-G_r H_s + H_r G_s - \tfrac{1}{2} J_r K_s + \tfrac{1}{2} K_r J_s = 0$$

ist, so bleibt

$$\begin{aligned} N_{r,s} = & G_r H_s e^{r-s} - H_r G_s e^{-r+s} \\ & + \tfrac{1}{2} J_r J_s \sin r \cos s - \tfrac{1}{2} J_s J_r \cos r \sin s + \tfrac{1}{2} J_r K_s \cos r \cos s \\ & + \tfrac{1}{2} J_r K_s \sin r \sin s \\ & - \tfrac{1}{2} K_r J_s \cos r \cos s - \tfrac{1}{2} K_r J_s \sin r \sin s + \tfrac{1}{2} K_r K_s \sin r \cos s \\ & - \tfrac{1}{2} K_r K_s \cos r \sin s \end{aligned}$$

Der Vergleich der $N_{r,s}$ constituirenden Glieder mit denen in Gleichungen (21), (22), (23), (24) liefert für $N_{r,s}$ folgende Fälle:

$$
\begin{aligned}
N_{r,s} = {} & [2,1] + [1,2] \\
& - \tfrac{1}{2}[3,3] + \tfrac{1}{2}(3,3) + \tfrac{1}{2}(3,4) - \tfrac{1}{2}[3,4] \\
& - \tfrac{1}{2}[4,3] + \tfrac{1}{2}(4,3) + \tfrac{1}{2}(4,4) - \tfrac{1}{2}[4,4].
\end{aligned}
$$

Mit Zuhilfenahme der Gleichungen (25) erhält man

$$
\begin{aligned}
2\, N_{r,s} = {} & -(1,1) - (1,2) + [1,1] + [1,2] \\
& -(2,1) - (2,2) + [2,1] + [2,2] \\
& +(3,3) + (3,4) - [3,3] - [3,4] \\
& +(4,3) + (4,4) - [4,3] - [4,4]
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
2\, N_{r,s} = {} & -(\mathrm{I}) + [\mathrm{I}] \\
& +(\mathrm{IV}) - [\mathrm{IV}],
\end{aligned}
$$

folglich ist

$$
N_{r,s} = 0.
$$

Weiter ist

$$
\begin{aligned}
P_{r,s} = {} & G_r J_s e^r \cos s + G_r K_s e^r \sin s - G_r J_s \\
& - H_r J_s e^{-r} \cos s - H_r K_s e^{-r} \sin s + H_r J \\
& + J_r G_s e^s \sin r + J_r H_s e^{-s} \sin r \\
& - K_r G_s e^s \cos r - K_r H_s e^{-s} \cos r + K_r G_s + K_r H_s.
\end{aligned}
$$

Darin ist wieder

$$
-G_r J_s + H_r J_s + K_r G_s + K_r H_s = 0
$$

und die Vergleichung mit den Gleichungen (22) und (24) liefert

$$
\begin{aligned}
P_{r,s} = {} & -[3,1] - [4,1] + [1,3] + [2,3] \\
& -[3,2] - [4,2] + [1,4] + [2,4]
\end{aligned}
$$

oder

$$
P_{r,s} = -[\mathrm{III}] + [\mathrm{II}],
$$

also ist

$$
P_{r,s} = 0
$$

$$
\begin{aligned}
Q_{r,s} = {} & G_r J_s e^r \sin s - G_r K_s e^r \cos s + G_r K_s \\
& + H_r J_s e^{-r} \sin s - H_r K_s e^{-r} \cos s + H_r K_s \\
& + J_r G_s e^s \cos r - J_r H_s e^{-s} \cos r - J_r G_s + J_r H_s \\
& + K_r G_s e^s \sin r - K_r H_s e^{-s} \sin r.
\end{aligned}
$$

Darin ist

$$G_r K_s + H_r K_s - J_r G_s + J_r H_s = 0$$

und die Vergleichung der Glieder von $Q_{r,s}$ mit denen der Gleichungen (21) und (23) gibt

$$
\begin{aligned}
Q_{r,s} = {} & (1,3) + (1,4) - (3,1) - (3,2) \\
& + (2,3) + (2,4) - (4,1) - (4,2)
\end{aligned}
$$

oder

$$Q_{r,s} = (\mathrm{II}) - (\mathrm{III}),$$

also ist auch

$$Q_{r,s} = 0.$$

Da nun

$$M_{r,s} = N_{r,s} = P_{r,s} = Q_{r,s} = 0$$

ist, so ist auch das Integral

$$\int_0^l X_r X_s \, dx = 0,$$

da jedes von den Gliedern, aus denen dieses Integral besteht, eine der Grössen $M_{r,s}$, $N_{r,s}$, $P_{r,s}$, $Q_{r,s}$ als Factor bei sich trägt.

Der erste Theil der Aufgabe wäre somit gelöst. Ich bemerke hier, dass man zu diesem Resultate auch noch auf einem andern ebenfalls directen Wege gelangen könne, nämlich auf dem Wege der *Integratio per partes*, indem man die allgemeine Formel

$$\int u dv = uv - \int v du$$

auf das untersuchte Integrale $\int X_r X_s \, dx$ anwendet.

Es besteht hiernach, wenn man der Bequemlichkeit wegen folgende Bezeichnungen einführt

$$\int X_s\,dx = X_s^{(1)},\ \int X_s^{(1)}\,dx = X_s^{(2)},\ \int X_s^{(2)}\,dx = X_s^{(3)},\ \int X_s^{(3)}\,dx = X_s^{(4)}$$

$$\frac{dX_r}{dx} = X_r',\ \frac{d^2X_r}{dx^2} = X_r'',\ \frac{d^3X_r}{dx^3} = X_r''',\ \frac{d^4X_r}{dx^4} = X_r''''$$

folgende Reihe von Gleichungen

$$\begin{aligned}
\int X_r\,X_s\,dx &= X_r\,X_s^{(1)} - \int X_r'\,X_s^{(1)}\,dx \\
-\int X_r'\,X_s^{(1)}\,dx &= -X_r'\,X_s^{(2)} + \int X_r''\,X_s^{(2)}\,dx \\
+\int X_r''\,X_s^{(2)}\,dx &= X_r''\,X_s^{(3)} - \int X_r'''\,X_s^{(3)}\,dx \\
-\int X_r'''X_s^{(3)}\,dx &= -X_r'''X_s^{(4)} + \int X_r''''X_s^{(4)}\,dx.
\end{aligned}$$

Addirt man diese Gleichungen zusammen, so folgt

$$\int X_r\,X_s\,dx - \int X_r''''\,X_s^{(4)}\,dx = X_r\,X_s^{(1)} - X_r'\,X_s^{(2)} + X_r''\,X_s^{(3)} - X_r'''\,X_s^{(4)}. \tag{27}$$

Bemerkt man nun, dass X_s, X_r nur Glieder enthalten, in denen die Variable nur in Exponentiellen oder in Sinus oder Cosinus enthalten ist und in X_r immer mit dem Factor b_r, ebenso in X_s immer mit dem Factor b_s multiplicirt erscheint, so hat man ganz allgemein

$$\frac{d^{m\pm 4n}X_r}{dx^{m\pm 4n}} = b_s^{\pm 4n}\,\frac{d^mX_r}{dx^m}$$

$$\frac{d^{m\pm 4n}X_s}{dx^{m\pm 4n}} = b_s^{\pm 4n}\,\frac{d^mX_s}{dx^m},$$

worin jede ganze positive oder negative Zahl unter m und n verstanden werden kann. Ist m negativ, z. B. $m = -3$, so muss

$$\frac{d^{-3}X}{dx^{-3}} = \iiint X\,dx^3$$

gedacht werden.

Mittelst der vorstehenden Gleichungen folgen daher

$$X_s^{(1)} = \frac{1}{b_s^4}\,X_s''',\ X_s^{(2)} = \frac{1}{b_s^4}\,X_s'',\ X_s^{(3)} = \frac{1}{b_s^4}\,X_s',\ X_s^{(4)} = \frac{1}{b_s^4}\,X_s$$

und auch noch

$$X_r'''' = b_r^4\,X_r$$

Führt man diese Werthe in die Gleichung (27) ein, so verwandelt sie sich in folgende:

$$\left(1-\frac{b_r^4}{b_s^4}\right)\int X_r X_s = \frac{1}{b_s^4}\left(X_r X_s''' - X_r' X_s''\right) + X_r'' X_s^{(3)} - X_r''' X_s^{(4)}.$$

Nimmt man das Integral zwischen den Grenzen o und l, so hat man sowohl für $x=o$ als für $x=l$ einestheils

$$X_s''' = 0,\ X_s'' = 0$$

und andererseits

$$X_r''' = 0,\ X_r'' = 0$$

vermöge der Gleichungen (17), (18), (19), (20). Also bleibt

$$\left(1-\frac{b_r^4}{b_s^4}\right)\int_o^l X_r X_s\, dx = 0 \qquad (28)$$

und da b_r und b_s zwei verschiedene Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$(e^{bl} + e^{-bl}) \cos bl - 2 = 0$$

darstellen, so muss nothwendig

$$\int_o^l X_r X_s\, dx = 0$$

sein. Man sieht, für den Fall, dass $s=r$ ist, wird der erste Factor in der Gleichung (28) der Nulle gleich, und es kann der zweite Factor $\int_o^l X_r^2 \,.\, dx$ von der Nulle verschieden bleiben und wird es offenbar auch, da er eine Summe von lauter positiven Gliedern darstellt. Man sieht aber zugleich, dass auf diesem Wege die wirkliche Auswerthung des Integrales $\int_o^l X_r^2 \,.\, dx$ nicht erreicht werden kann, wohl aber gelingt sie nach der Methode, nach welcher das Integral $\int_o^l X_r X_s\, dx$ bestimmt wurde, und in dem Folgenden mag sie geliefert werden.

Es ist

$$
\begin{aligned}
X_r^2 = {} & G_r^2 e^{2 b_r x} + G_r H_r + G_r J_r e^{b_r x} \cos b_r x + G_r K_r e^{b_r x} \sin b_r x \\
& + H_r G_r + H_r^2 e^{-2 b_r x} + H_r J_r e^{-b_r x} \cos b_r x \\
& + H_r K_r e^{-b_r x} \sin b_r x \\
& + J_r G_r e^{b_r x} \cos b_r x + J_r H_r e^{-b_r x} \cos b_r x \\
& + J_r^2 \cos^2 b_r x + J_r K_r \cos b_r x \sin b_r x \\
& + K_r G_r e^{b_r x} \sin b_r x + K_r H_r e^{-b_r x} \sin b_r x \\
& + K_r J_r \sin b_r x \cos b_r x + K_r^2 \sin^2 b_r x,
\end{aligned}
$$

darin ist X_r^2 desshalb so explicit geschrieben, damit die Analogie mit dem Producte $X_r\ X_s$ erhalten und die wirkliche Rechnung erleichtert werde. Letztere gibt nach Anwendung der betreffenden Integrationsformeln für jedes der obigen Glieder und nach Einführung der Grenzwerthe l und o für x und der verwendeten Abkürzungen folgenden Werth für das Integral

$$
\begin{aligned}
\int X_r^2 \,.\, dx = {} & G_r^2 \left[\frac{e^{2r}}{2 b_r} - \frac{1}{2 b_r}\right] \\
& + G_r H_r l \\
& + G_r J_r \left[\frac{\cos r + \sin r}{2 b_r} e^r - \frac{1}{2 b_r}\right] \\
& + G_r K_r \left[\frac{\sin r - \cos r}{2 b_r} e^r + \frac{1}{2 b_r}\right] \\
& + H_r G_r l \\
& + H_r^2 \left[-\frac{e^{-2r}}{2 b_r} + \frac{1}{2 b_r}\right] \\
& + H_r J_r \left[\frac{-\cos r + \sin r}{2 b_r} e^{-r} + \frac{1}{2 b_r}\right] \\
& + H_r K_r \left[\frac{-\sin r - \cos r}{2 b_r} e^{-r} + \frac{1}{2 b_r}\right] \\
& + J_r G_r \left[\frac{\cos r + \sin r}{2 b_r} e^r - \frac{1}{2 b_r}\right] \\
& + J_r H_r \left[\frac{-\cos r + \sin r}{2 b_r} e^{-r} + \frac{1}{2 b_r}\right] \\
& + J_r^2 \left[\frac{l}{2} + \frac{\sin r \cos r}{2 b_r}\right] \\
& + J_r K_r \frac{\sin^2 r}{2 b_r} \\
& + K_r G_r \left[\frac{\sin r - \cos r}{2 b_r} e^r + \frac{1}{2 b_r}\right]
\end{aligned}
$$

$$+ K_r H_r \left[\frac{-\sin r - \cos r}{2 b_r} e^{-r} + \frac{1}{2 b_r}\right]$$

$$+ K_r J_r \frac{\sin^2 r}{2 b_r}$$

$$+ K_r^2 \left[\frac{l}{2} - \frac{\sin r \cos r}{2 b_r}\right]$$

Die Glieder des Grenzintegrales $\int^l X_r X_s \, dx$ sind nach den Factoren

$$\frac{1}{b_r + b_s}, \quad \frac{1}{b_r - b_s}, \quad \frac{b_r}{b_r^2 + b_s^2}, \quad \frac{b_s}{b_r^2 + b_s^2}$$

geordnet worden. Der Factor $\frac{1}{b_r - b_s}$ fiel für das Integral $\int_0^l X_r^2 \, dx$ nothwendiger Weise aus der Rechnung, die übrigen zogen sich auf den einzigen $\frac{1}{2 b_r}$ zusammen. Es ist jedoch gerathen, die Glieder. welche mit diesem Factor behaftet erscheinen, in drei Gruppen zu trennen. Die ersten zwei Gruppen bestehen aus jenen Gliedern, welche im allgemeinen Integral die Factoren

$$\frac{b_r}{b_r^2 + b_s^2}, \quad \frac{b_s}{b_r^2 + b_s^2}$$

führten. Die Glieder, die diesen zwei Gruppen angehören, sind die mit den Coëfficienten

$$G_r J_r, \; G_r K_r, \; H_r J_r, \; H_r K_r, \; J_r G_r, \; J_r H_r, \; K_r G_r, \; K_r H_r$$

belegten und unterscheiden sich der Reihe nach von den unter den früher gebrauchten Zeichen $P_{r,s}$ und $Q_{r,s}$ zusammengefassten nur dadurch, dass an allen Stellen, in denen in letztern ein s vorkommt, in den ersteren ein r steht. Sie können daher unter den Zeichen

$$P_{r,r}, \; Q_{r,r}$$

zusammengefasst werden. So wie aber bewiesen werden konnte, dass

$$P_{r,s} = 0, \; Q_{r,s} = 0,$$

kann auch bewiesen werden, dass

$$P_{r,r} = 0, \; Q_{r,r} = 0$$

ist. Denn der erstere Beweis wurde geliefert aus den Eigenschaften der Gleichungen (21) und (22), diese gelten aber auch, wenn man in denselben an allen Orten r für s setzt. Durch diese Transmutation erhält man aber Gleichungen, welche offenbar für $P_{r,r}$ und $Q_{r,r}$ dasselbe leisten, was die Gleichungen (21) und (22) für $P_{r,s}$ und $Q_{r,s}$ geleistet haben, folglich ist

$$P_{r,r} = 0 \text{ und } Q_{r,r} = 0.$$

Die dritte Gruppe von Gliedern, welche in $\frac{1}{2\,b_r}$ multiplicirt erscheinen, mag mit $S_{r,r}$ bezeichnet werden, so ist

$$\begin{aligned} S_{r,r} = {} & G_r^2\, e^{2r} - G_r^2 \\ & - H_r^2\, e^{-2r} + H_r^2 \\ & + J_r^2 \sin r \cos r + J_r K_r \sin^2 r \\ & + K_r J_r \sin^2 r - K_r^2 \sin r \cos r. \end{aligned}$$

Setzt man darin

$$\begin{aligned} K_r J_r \sin^2 r & = K_r J_r - K_r J_r \cos^2 r \\ & = (G_r - H_r)\,(G_r + H_r) - K_r J_r \cos^2 r \\ & = G_r^2 - H_r^2 - K_r J_r \cos^2 r, \end{aligned}$$

so folgt

$$\begin{aligned} S_{r,r} = {} & G_r^2\, e^{2r} - G_r H_r \\ & + G_r H_r - H_r^2\, e^{2r} \\ & + J_r^2 \sin r \cos r - K_r J_r \cos^2 r \\ & + J_r K_r \sin^2 r - K_r^2 \sin r \cos r. \end{aligned}$$

Vergleicht man diese Glieder mit denen, die aus denen in der Gleichung (22) hervorgehen würden, wenn man r an die Stelle von s überall darinnen setzte, so ersieht man leicht, dass sie die ersten Hälften der zwei ersten und die zweiten Hälften der zwei letzten Horizontalreihen, nur mit verkehrten Zeichen genommen, repräsentiren, hiemit ist auch

$$S_{r,r} = 0.$$

Es bleiben daher nur noch jene Glieder übrig, die den Factor $\frac{1}{2\,b_r}$ nicht mit sich führen, so dass man

$$\int_0^l X_r^2 \,.\, dx = 2\, G_r\, H_r \,.\, l + J_r^2 \,.\, \frac{l}{2} + K_r^2 \,.\, \frac{l}{2}$$

hat. Drückt man darin J_r und K_r durch G_r und H_r aus, so folgt

$$\int_0^l X_r^2 \,.\, dx = (G_r + H_r)^2 \,.\, l. \tag{29}$$

Nachdem nun dargethan ist, dass das zwischen den Grenzen o und l genommene Integral von $X_r\, X_s .\, dx$ immer der Nulle gleich ist, den Fall ausgenommen, in welchem die Indices r und s einerlei Werth haben, und dass für diesen Fall das zwischen denselben Grenzen genommene Integral von $X_r^2 dx$ den in Gleichung (29) gegebenen Werth hat, kann man zur Bestimmung der beiden Constanten A und B schreiten, denn man hat, wenn $y = f(x)$ die Elongation und $\frac{dy}{dt} = F\,(x)$ die Geschwindigkeit eines jeden dem Stabe angehörigen Punktes für den Beginn der Zeit ausdrückt, folgende zwei Gleichungen

$$\int_0^l f\,(x) \,.\, X_r \,.\, dx = A_r \int_0^l X_r^2 \,.\, dx$$

$$\int_0^l F\,(x) \,.\, X_r \,.\, dx = a\, b_r^2 \,.\, B_r \int_0^l X_r^2\, dx,$$

woraus man

$$A_r = \frac{\int_0^l f\,(x)\, X_r \,.\, dx}{\int_0^l X_r^2 \,.\, dx}$$

$$B_r = \frac{\int_0^l F\,(x)\, X_r \,.\, dx}{a\, b_r^2 \int_0^l X_r^2 \,.\, dx}$$

oder wenn man den Werth des Integrales von $X_r^2\,dx$ aus der Gleichung (29) einführt.

$$A_r = \frac{\int_0^l f(x)\,X_r\,.\,dx}{(G_r + H_r)^2\,.\,l} \tag{30}$$

$$B_r = \frac{\int_0^l F(x)\,X_r\,.\,dx}{ab_r^2(G_r + H_r)^2.l} \tag{31}$$

findet.

Das vollständige Integral der Differentialgleichung (1) nimmt daher für den Fall eines freien Stabes und für den Fall, dass sein initialer Zustand durch die Gleichungen (14) charakterisirt ist, folgende Form an:

$$y = \frac{1}{l}\,\Sigma \left\{ \frac{G_r e^{b_r x} + H_r e^{-b_r x} + J_r \cos b_r x + K_r \sin b_r x}{(G_r + H_r)^2} \right.$$

$$\left. \left[\int_0^l f(x)\,X_r\,.\,dx \cos ab_r^2 t + \frac{1}{ab_r^2} \int_0^l F(x)\,X_r\,.\,dx\,.\,\sin ab_r^2 t \right] \right\} \tag{32}$$

Damit die durchgeführte Untersuchung an Allgemeinheit gewinne, wird es gut sein, noch andere Bedingungen, denen ein schwingender elastischer Stab unterworfen sein kann, in Betracht zu ziehen. Es ist vorausgesetzt worden, der schwingende Stab sei an seinen beiden Enden frei, es bleiben noch die zwei für schwingende Stäbe gewöhnlichsten Fälle übrig, nämlich zuerst der, dass der elastische Stab an dem einen seiner Enden befestiget, an dem andern aber frei sei, und dann der Fall, in welchem der Stab an seinen beiden Enden befestiget ist.

Gesetzt der erstere Fall hätte Statt, so hat man, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten in das befestigte Ende des Stabes verlegt wird, die Bedingungsgleichungen

$$y = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ für } x = 0;$$

das andere freie Ende ist aber wie früher durch die Gleichungen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0,\ \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \text{ für } x = l$$

charakterisirt. Da diese Bedingungen unabhängig von der Zeit erfüllt sein müssen, so kann wieder nur der Factor X in dem Integrale (7) denselben genügen, der daher die Eigenschaft besitzen muss, dass

$$X = 0,\ \frac{dX}{dx} = 0 \text{ für } x = 0$$
$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0,\ \frac{d^3X}{dx^3} = 0 \text{ für } x = l$$

wird. Führt man in diese zwei Paare von Gleichungen den Werth von X aus der Gleichung (6) ein, so erhält man anstatt der Gleichungen (8) nunmehr folgende:

$$\left.\begin{aligned} G + H + J &= 0 \\ G - H + K &= 0 \end{aligned}\right\}, \tag{33}$$

die Gleichungen (9) hingegen behalten auch für diesen Fall ihre Giltigkeit. Aus den vorstehenden Gleichungen folgen

$$J = -(G + H)$$
$$K = -(G - H)$$

und diese Werthe von J und K in die Gleichungen (9) substituirt geben zur Bestimmung von G und H

$$G\,(e^{bl} + \cos bl + \sin bl) + H\,(e^{-bl} + \cos bl - \sin bl) = 0$$
$$G\,(e^{bl} - \sin bl + \cos bl) + H\,(-e^{-bl} - \sin bl - \cos bl) = 0$$

Aus der ersten dieser zwei Gleichungen folgt

$$\frac{G}{H} = -\frac{e^{-bl} + \cos bl - \sin bl}{e^{bl} + \cos bl + \sin bl}, \tag{34}$$

aus der zweiten

$$\frac{G}{H} = \frac{e^{-bl} + \cos bl + \sin bl}{e^{bl} + \cos bl - \sin bl} \tag{35}$$

Sollen diese zwei gefundenen Werthe von $\frac{G}{H}$ identisch sein, so muss nothwendig die Gleichung

$$-\frac{e^{-bl} + \cos bl - \sin bl}{e^{bl} + \cos bl + \sin bl} = \frac{e^{-bl} + \cos bl + \sin bl}{e^{bl} + \cos bl - \sin bl}$$

bestehen, und aus ihr kann b bestimmt werden. Sie verwandelt sich nach einigen Reductionen in

$$(e^{b} + e^{-bl}) \cos bl + 2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung sind nun die Werthe von b zu nehmen, welche einzelne Werthe in die Gleichung (7) eingeführt, ebenso viele particuläre Integrale aus dieser Gleichung entstehen lassen werden. Die Summe aller particulären wird alsdann wieder das vollständige Integral liefern. Um die in diesem noch übrigen arbiträren Constanten A_r und B_r, welchen übrigens jetzt andere Werthe zukommen werden, insofern auch die allgemeinen Zeichen b_r und b_s andere Bedeutungen haben, durch die initialen Zustände, die auch jetzt durch die Gleichungen (14) ausgedrückt sein sollen, zu bestimmen, wird man zu denselben Integralreihen seine Zuflucht nehmen müssen, wie früher und auch jetzt darzuthun haben, dass jedes der Form

$$\int_0^l X_r X_s \, dx$$

entsprechende Integral, so lange r und s verschieden sind, der Nulle gleich werde, im Falle der Gleichheit von r und s aber einen bestimmten endlichen Werth besitze.

Der Nachweis für die Existenz dieser Eigenschaft des betrachteten Grenzintegrales ist aber auch für diesen Fall schon geliefert. Denn der jetzige Fall unterscheidet sich von dem früheren nur dadurch, dass, sobald die im ersteren gebrauchten Bezeichnungen auf den jetzigen übertragen werden, nur die Constanten J und K die Zeichen beim Übergange von dem einen zu dem andern Falle wechseln. Die Gleichungen (9) und mit ihnen auch die Gleichungen (19) (20), (21), (22) bestehen aber sammt ihren Eigenschaften unabhängig von speciellen Werthen der J und K, also ist auch für den jetzigen Fall schon bewiesen, dass

$$M_{r,s} = N_{r,s} = P_{r,s} = Q_{r,s} = 0,$$

da sich dieser Beweis auf die Eigenschaften der Gleichungen (21) und (22) stützt mit Ausnahme des Theiles, der die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\, J_r K_s + \tfrac{1}{2}\, K_r J_s - G_r G_s + H_r H_s &= 0 \\
-\tfrac{1}{2}\, J_r K_s + \tfrac{1}{2}\, K_r J_s - G_r H_s + H_r G_s &= 0 \\
- G_r J_s + H_r J_s + K_r G_s + K_r H_s &= 0 \\
G_r K_s + H_r K_s - J_r G_s + J_r H_s &= 0
\end{aligned}$$

gibt, die aber ebenfalls für negative J und K gelten, da die Grössen entweder nur zu zweien mit einander multiplicirt oder in jedem Gliede je eine derselben darin vorkommen.

Ebenso gilt der für den früheren Fall gelieferte Nachweis, dass

$$P_{r,r} = Q_{r,r} = S_{r,r} = 0$$

auch für den jetzigen und es behält sogar der Werth des Integrales dieselbe Form, in dem J und K darin nur in der zweiten Potenz vorkommen. Die Gleichung (29) bleibt daher bestehen und mit ihr auch die Gleichung (32), nur dass darin für den jetzigen Fall b_r das allgemeine Zeichen für die Wurzeln einer andern Gleichung, nämlich der folgenden

$$(e^{bl} + e^{-bl}) \cos bl + 2 = 0$$

ist und G_r H_r J_r K_r X_r diesen Wurzeln entsprechende durch die Gleichungen (34) (35) und (33) der Form nach bestimmte Werthe besitzen.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten übrig, in welchem der schwingende elastische Stab an seinen beiden Enden befestiget ist. Für diesen hat man die Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned}
y = 0 \text{ und } \frac{dy}{dx} &= 0 \text{ für } x = 0 \\
y = 0 \quad „ \quad \frac{dy}{dx} &= 0 \quad „ \quad x = l
\end{aligned}$$

wenn wieder der Anfangspunkt der Coordinaten in den einen Befestigungspunkt gelegt und der Stab von der Länge l angenommen wird. Diesen Bedingungen muss von dem Factor X in dem Integrale (7) genügt werden, es muss also

$$\begin{aligned}
X = \frac{dX}{dx} &= 0 \text{ für } x = 0 \\
X = \frac{dX}{dx} &= 0 \quad „ \quad x = l
\end{aligned}$$

sein. Die Einführung des Werthes von X aus (6) in diese Gleichungen liefert nach vorgenommener Substitution der Werthe o und l für x folgende für diesen Fall geltende Gleichungen

$$(36) \qquad \left.\begin{aligned} G + H + J &= 0 \\ G - H + K &= 0 \end{aligned}\right|$$

an die Stelle der Gleichungen (8) und

$$(37) \qquad \left.\begin{aligned} Ge^{bl} + He^{-bl} + J\,cos\,bl + K\,sin\,bl &= 0 \\ Ge^{bl} - He^{-bl} - J\,sin\,bl + K\,cos\,bl &= 0 \end{aligned}\right|$$

an die Stelle der Gleichungen (9).

Aus den Gleichungen (36) folgen

$$\begin{aligned} J &= -(G + H) \\ K &= -(G - H) \end{aligned}$$

und diese Werthe von J und K in (37) substituirt geben zur Bestimmung von G und H

$$\begin{aligned} G\,(e^{bl} - cos\,bl - sin\,bl) + H\,(e^{-bl} - cos\,bl + sin\,bl) &= 0 \\ G\,(e^{bl} + sin\,bl - cos\,bl) + H\,(e^{-bl} + sin\,bl + cos\,bl) &= 0 \end{aligned}$$

also dieselben Gleichungen, welche zur Bestimmung von G und H gewonnen wurden für den Fall, dass der elastische Stab an seinen beiden Enden frei ist. Es wird daher aus ihnen auch dieselbe Eliminationsgleichung

$$(e^{bl} + e^{-bl})\,cos\,bl - 2 = 0$$

für die Ausmittlung der Werthe von b resultiren, wornach das allgemeine Integral der Differentialgleichung (1) für den Fall eines an beiden Enden befestigten elastischen Stabes dieselbe Form annimmt, welche in der Gleichung (13) gegeben ist und auch das Summenzeichen Σ hat in diesem Falle die nämliche Bedeutung, welche ihm an dem früheren Orte gegeben wurde. Zur Bestimmung der in demselben enthaltenen arbiträren Constanten A_r und B_r wird man denselben Weg einschlagen wie früher. Zur Nachweisung der nothwendigen Eigenschaften des Integrales

$$\int_o^l X_r X_s\,dx$$

wird man jedoch statt der Gleichungen (21) und (22) andere construiren müssen, da die Giltigkeit dieser auf den Gleichungen (9) beruht, letztere aber in dem jetzigen Falle durch die unter (37) vertreten sind, welche wir unter den zwei Formen

$$G_r\, e^{b_r l} + H_r\, e^{-b_r l} + J_r \cos b_r l + K_r \sin b_r l = 0$$
$$G_s\, e^{b_s l} - H_s\, e^{-b_s l} - J_s \sin b_s l + K_s \cos b_s l = 0$$

oder von der eingeführten abgekürzten Schreibweise Gebrauch machend, unter

$$G_r\, e^r + H_r\, e^{-r} + J_r \cos r + K_r \sin r = 0$$
$$G_s\, e^s - H_s\, e^{-s} - J_s \sin s + K_s \cos s = 0$$

zur Construction einer derjenigen unter (21) analogen Gleichung verwenden wollen. Diese hat sodann folgende Gestalt:

$$\left.\begin{array}{llll} G_r G_s e^{r+s} & - G_r H_s e^{r-s} & - G_r J_s e^r & \sin s \\ & + G_r K_s e^r \cos s & & \\ + H_r G_s e^{-r+s} & - H_r H_s e^{-r-s} & - H_r J_s e^{-r} & \sin s \\ & + H_r K_s e^{-r} \cos s & & \\ + J_r G_s e^s \cos r & - J_r H_s e^{-s} \cos r & - J_r J_s \cos r & \sin s \\ & + J_r K_s \cos r \cos s & & \\ + K_r G_s e^s \sin r & - K_r H_s e^{-s} \sin r & - K_r J_s \sin r & \sin s \\ & + K_r K_s \sin r \cos s & & \end{array}\right\} = 0 \quad (38)$$

Diese Gleichung hat dieselben Eigenschaften, wie die unter (21) und unterscheidet sich hinsichtlich der constituirenden Glieder von letzterer nur dadurch, dass das zweite und dritte Gliederviertel in (38) die entgegengesetzten Zeichen haben gegen das zweite und dritte Gliederviertel in der Gleichung (21). Dasselbe Verhältniss wird auch zwischen der aus (38) durch Verwechslung von r und s hervorgehenden und der Gleichung (22) stattfinden. Bezeichnen wir die auf einander folgenden Gliederviertel der Gleichung (38) mit

$$(A),\ (B),\ (C),\ (D)$$

und die auf einander folgenden Gliederviertel derjenigen Gleichung, welche aus der unter (38) resultirt, wenn man r und s in derselben gegen einander vertauscht, mit

$$[A],\ [B],\ [C],\ [D]$$

so bestehen folgende Gleichungen:

$$\begin{gathered}
(\mathrm{I}) = (A), (\mathrm{II}) = -(B), (\mathrm{III}) = -(C), (\mathrm{IV}) = (D) \\
[\mathrm{I}] = [A], [\mathrm{II}] = -[B], [\mathrm{III}] = -[C], [\mathrm{IV}] = -[D].
\end{gathered}$$

Ausserdem hat man noch

$$\begin{gathered}
(A) = -(B) = -(C) = (D) \\
[A] = -[B] = -[C] = [D].
\end{gathered} \tag{40}$$

Da die von Exponentiellen und trigonometrischen Functionen freien Glieder in den Ausdrücken $M_{r,s}$, $N_{r,s}$, $P_{r,s}$, $O_{r,s}$, auch für den Fall, dass J und K die Werthe

$$-(G+H) \text{ und } -(G-H)$$

besitzen, verschwinden, so werden $M_{r,s}$, $N_{r,s}$, $P_{r,s}$ und $Q_{r,s}$, für den jetzigen Fall unter Benützung der Gleichungen (39) folgende Formen annehmen:

$$\begin{aligned}
2\,M_{r,s} &= (A) + [A] \\
&\quad - (D) - [D] \\
2\,N_{r,s} &= -(A) + [A] \\
&\quad + (D) - [D] \\
P_{r,s} &= [C] - [B] \\
Q_{r,s} &= -(B) + (C)
\end{aligned}$$

und zu Folge der Gleichungen (40) hat man daher auch für diesen Fall

$$M_{r,s} = N_{r,s} = P_{r,s} = Q_{r,s} = 0$$

und zu Folge dessen auch

$$\int_0^l X_r X_s \;.\; dx = 0.$$

Was den Werth dieses Integrales betrifft, wenn darin s durch r ersetzt wird, so ist er derselbe für den in Betrachtung stehenden Fall, wie für den Fall eines freien elastischen Stabes, denn auch jetzt ist

$$P_{r,r} = Q_{r,r} = S_{r,r} = 0$$

und die nur in der zweiten Potenz vorkommenden J und K in dem Integralwerthe ändern nicht seine Form, die in Gleichung (29) gegeben ist.

Welchen Bedingungen daher der schwingende elastische Stab auch unterworfen sein mag, ob er an beiden Enden frei oder fest gemacht oder ob er nur an einem Ende frei und am anderen befestiget ist, immer wird seine Schwingungsbewegung determinirt sein durch das allgemeine in (32) gegebene Integral der Differentialgleichung (1), nur dass für den Fall eines freien, oder eines an beiden Enden befestigten Stabes das in demselben auftretende b Wurzel der Gleichung

$$(e^{bl} + e^{-bl}) \cos b\,l - 2 = 0$$

ist, dieser entsprechend G und H aus den Gleichungen (10) oder (11) und J und H für einen freien Stab aus den Gleichungen (8), für den Fall eines an beiden Enden befestigten Stabes aber aus den Gleichungen (36) zu bestimmen sind. Das Summenzeichen Σ bedeutet, die Summe der verschiedenen speciellen den Wurzeln obiger Gleichung entsprechenden Werthe der hinter ihm stehenden Grössen. Ist der Stab an einem der Enden befestiget, so ist b Wurzel der Gleichung

$$(e^{bl} + e^{-bl}) \cos b\,l + 2 = 0$$

und G, H werden dieser entsprechend aus den Gleichungen (34) oder (35), J und H aus (33) bestimmt. Das Summenzeichen Σ bedeutet die Summe der verschiedenen speciellen den Wurzeln vorstehender Gleichung entsprechenden Werthe der hinter ihm stehenden Grössen. Man hat daher allgemein, wenn man die Abkürzungen

$$X_r = G_r\, e^{b_r x} + H_r\, e^{-b_r x} + J_r \cos b_r x + K_r \sin b_r x$$

$$T_r = \int_0^l f(x)\, X_r \,.\, dx \,.\, \cos a b_r^2 t + \frac{1}{a b_r^2} \int_0^l F(x)\, X_r \,.\, dx \,.\, \sin a b_r^2 t$$

gebraucht,

$$y = \frac{1}{l} \Sigma \frac{X_r\, T_r}{(G_r + H_r)^2}. \tag{41}$$

Ist der elastische Stab an beiden Enden frei oder an beiden befestiget, so hat man aus den Gleichungen (11)

$$G_r = e^{-b_r l} - \cos b_r l - \sin b_r l$$
$$H_r = e^{b_r l} - \cos b_r l + \sin b_r l$$

also ist

$$(G_r + H_r)^2 = (e^{b_r l} + e^{-b_r l} - 2 \cos b_r l)^2$$

oder wenn man im zweiten Theile mit $\cos b_r l$ multiplicirt und zugleich dividirt

$$(G_r + H_r)^2 = \left[\frac{(e^{b_r l} + e^{-b_r l}) \cos b_r l - 2 + 2 \sin^2 b_r l}{\cos b_r l}\right]^2$$

oder da b_r eine Wurzel der Gleichung $(e^{bl} + e^{-bl}) \cos bl - 2 = 0$ ist, so folgt

$$(G_r + H_r)^2 = \frac{4 \sin^4 b_r l}{\cos^2 b_r l} = 4 \sin^2 b_r l \, Tg^2 b_r l.$$

Die Gleichung (41) geht daher für diesen Fall eines freien oder an beiden Enden befestigten Stabes über in

$$y = \frac{1}{4l} \Sigma \frac{X_r T_r}{\sin^2 b_r l \, Tg^2 b_r l}$$

und zwar ist für einen freien Stab darin zu Folge der Gleichungen (8)

$$\begin{aligned} X_r = G_r & (e^{b_r x} + \cos b_r x + \sin b_r x) \\ + H_r & (e^{-b_r x} + \cos b_r x - \sin b_r x) \end{aligned}$$

dem gemäss erhält dann auch T_r seine Bestimmung; für einen an beiden Enden befestigten Stab aber ist zu Folge der Gleichungen (36)

$$\begin{aligned} X_r = G_r & (e^{b_r x} - \cos b_r x - \sin b_r x) \\ + H_r & (e^{-b_r x} - \cos b_r x + \sin b_r x) \end{aligned}$$

und diesem Werthe von X_r gemäss ist auch T_r darzustellen.

Ist der elastische Stab an einem der Enden befestiget, am andern frei, so hat man aus den Gleichungen (35)

$$\begin{aligned} G_r &= e^{-b_r l} + \cos b_r l + \sin b_r l \\ H_r &= e^{b_r l} + \cos b_r l - \sin b_r l \end{aligned}$$

also ist

$$(G_r + H_r)^2 = (e^{b_r l} + e^{-b_r l} + 2 \cos b_r l)^2$$

oder wenn man im zweiten Theile mit $\cos b_r l$ gleichzeitig multiplicirt und dividirt

$$(G_r + H_r)^2 = \left[\frac{(e^{b_r l} + e^{-b_r l}) \cos b_r l + 2 - 2 \sin^2 b_r l}{\cos b_r l}\right]^2.$$

Es ist aber b eine Wurzel der Gleichung $(e^{bl} + e^{-bl}) \cos bl + 2 = 0$, also ist

$$(G_r + H_r)^2 = \frac{4 \sin^4 b_r l}{\cos^2 b_r l} = 4 \sin^2 b_r l \, Tg^2 \, b_r l$$

wie früher. Man hat also abermals

$$y = \frac{1}{4l} \Sigma \frac{X_r T_r}{\sin^2 b_r l \, Tg^2 \, b_r l}$$

und zwar ist darin zu Folge der Gleichungen (33)

$$\begin{aligned} X_r = G_r & (e^{b_r x} - \cos b_r x - \sin b_r x) \\ + H_r & (e^{-b_r x} - \cos b_r x + \sin b_r x) \end{aligned}$$

und demgemäss ist auch der Werth von T_r zu gestalten.

Belegt man für die verschiedenen Fälle die Grössen X, T und b mit den ihnen jedesmal zukommenden Werthen, so kann man allgemein das Integral der Differentialgleichung (1) schreiben unter der Form:

$$y = \frac{1}{4l} \Sigma \frac{X_r T_r}{\sin^2 b_r l \, Tg^2 \, b_r l}.$$

Die vorliegende Untersuchung hatte zum Zwecke, in das allgemeine für die Differentialgleichung (1) gefundene Integral, welches die Gesetze für die transversalen Schwingungen eines elastischen Stabes enthält, nach Berücksichtigung der Bedingungen, welche für die beiden Enden des Stabes gegeben sind, auch jene Bedingungen noch einzuführen, welche den Anfangszustand des elastischen Stabes charakterisiren, um dadurch jede Unbestimmtheit, welche im Integrale auch nach Verwendung der Grenzbedingungen noch bleibt, zu tilgen. Das Verlangte kann auf dieselbe Weise geleistet werden, welche D'Alembert schon bei dem Probleme der schwingenden Saiten zur Anwendung brachte, nämlich durch die Verbindung der Bedingungen für den Anfangszustand mit den für diesen geltenden particulären Integralen zu einer Reihe von bestimmten Integralen, wie es im Eingange zur vorstehenden Untersuchung angedeutet wurde. Soll aber die angewendete Methode zum Ziele führen, so ist von den in Integralreihen auftretenden bestimmten Integralen dieselbe Eigenschaft nachzuweisen, welche die beim Probleme der schwingenden Saiten vorkommenden besitzen, nämlich dass

$$\int_0^l X_r X_s \, . \, dx$$

exact der Nulle gleich sei, sobald die beiden Indices r und s verschieden sind, hingegen von der Nulle verschieden ausfalle, sobald r und s dieselben sind. In dem Falle, dass es sich um schwingende Saiten handelt, ergibt sich der Nachweis für diese Eigenschaft des dem angeführten ähnlichen Grenzintegrales unmittelbar aus der Form des unter dem Integralzeichen stehenden Differentialfactors; in unserem Falle aber, in dem es sich um Schwingungen elastischer Stäbe handelt, liegt der Nachweis nicht so offen auf der Hand und verlangt eine tiefer gehende Untersuchung. Poisson, der dieses Ploblem in seinem *Mémoire sur l' équilibre et mouvement des corps élastiques* und auch in seinem *traité de Mécanique* behandelte, benützte dazu die Form der gegebenen Differentialgleichung, die vorliegende Untersuchung hingegen basirt sich auf die Bedingungen, welche für die Enden des schwingenden Stabes gelten. Die erstere, höchst sinnreiche Methode, welche jetzt um so mehr Wichtigkeit erlangt hat, als sie von Petzval eine derartige Vervollkommnung erfahren hat, dass sie bei allen in der mathematischen Physik oder in der Mechanik gewöhnlich vorkommenden Gleichungen angewendet werden kann, muss aber, weil sie sich auf ein sehr unbestimmtes mathematisches Gebilde, nämlich die gegebene Differentialgleichung stützt, auch ein unbestimmteres Resultat liefern, als die zweite, welche die bestimmt formulirten Bedingungen an den Grenzen zur Verwerthung bringt. Die erstere Methode liefert auch den geforderten Beweis für die Eigenschaften des untersuchten Grenzintegrales nur indirect, die letztere liefert ihn hingegen auf directe Weise. Die erstere Methode liefert ferner nur den Beweis, dass das bestimmte Integral

$$\int_0^l X_r X_s \, . \, dx$$

der Nulle gleich, das bestimmte Integral

$$\int_0^l X_r^2 \,.\, dx$$

aber von der Nulle verschieden sei. Die letztere Methode liefert aber ausserdem noch den Werth des letzteren Integrales. Dadurch wird man in den Stand gesetzt, eine unbestimmt gelassene Grösse, welche in dem nach der ersteren Methode specialisirten Integrale noch zurückbleibt, aus diesem wegzuschaffen, so dass nur eine einzige mehr in demselben übrig bleibt, die jedoch allgemein nicht bestimmt werden kann, da in derselben der für jeden speciellen Fall besonders gegebene Anfangszustand liegt. Ist dieser nicht allgemein, sondern in bestimmter Form gegeben, so ist man dann im Stande auch diesen letzten unbestimmten Bestandtheil aus dem Integrale wegzuschaffen und hat dasselbe explicit und genau determinirt. Der Gewinn, der durch die vorliegende Untersuchung erreicht wurde, besteht also in einer vollständigen Darstellung der Amplituden der einzelnen Theile des schwingenden elastischen Stabes *a priori*. Man kann also nun auch die gemessenen Amplituden irgend eines Punktes des schwingenden Stabes dazu verwenden, um die Elasticitätsconstante des Stabes zu bestimmen. Am leichtesten wird die Messung der Amplitude des freien Endes eines am andern Ende befestigten Stabes bewerkstelliget werden können dadurch, dass dieses Ende spiegelnd gemacht von einem festen leuchtenden Punkte auffallende Strahlen auf eine Wand reflectirt und so seine eigene Bewegung auf dieser Wand in vergrössertem Massstabe wiedergibt. Um einen bestimmten Anfangszustand zu haben, wird man das Ende des Stabes mit einem gegebenen Gewichte belasten, und die Form des Stabes darnach rechnen, so das Gesetz für die initialen Elongationen erhalten, und wenn der Stab nach Wegnahme des Gewichtes zu schwingen beginnt, so hat man die initialen Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte sämmtlich der Nulle gleich, wodurch sich die Rechnung um die Hälfte abkürzt. Man könnte auch auf diese Weise die das Ende des Stabes afficirende Kraft bestimmen, was z. B. von Wichtigkeit wäre für den Fall, dass der elastische Stab etwa von Eisen wäre und ihm die anfängliche Lage durch die Anziehung eines auf sein Ende wirkenden Poles eines Elektromagneten ertheilt würde.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1858

Band/Volume: 32

Autor(en)/Author(s): Stefan Josef

Artikel/Article: Über die Transversalschwingungen eines elastischen Stabes. 207-241