Über die Methode, die grössten und kleinsten Werthe unbestimmter Integralformeln zu finden.

Von Alexander Löffler.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 9. December 1858.)

§. 1. Nachdem Euler die Bedingung angegeben hat, unter der ein bestimmtes Integrale

$$U = \int_a^b f(x\, y\, y' \ldots .)\, dx$$

ein grösstes oder kleinstes wird, hat Lagrange dieses Resultat im zweiten Bande der „Miscellanea Taurinensia" auf ganz analytischem Wege erhalten. In dieser Abhandlung hat Lagrange sein Verfahren durch nichts begründet, er sagt nur, dass $U = \int V$ wobei $V = f(x\, dx\, d^2x \ldots y\, dy\, d^2y \ldots z\, dz\, d^2z \ldots)$ ist, zu einem Maximum oder Minimum wird für $\delta U = \int \delta V = 0$. Die Entwickelung von δV gibt ihm eine Gleichung von der Form

$$\begin{aligned} \delta V = {} & A\delta x + A_1 \delta dx + A_2 \delta d^2x + \ldots\ldots \\ & + B\delta y + B_1 \delta dy + B_2 \delta d^2y + \ldots\ldots \\ & + C\delta z + C_1 \delta dz + C_2 \delta d^2z + \ldots\ldots \end{aligned}$$

und die Anwendung der partiellen Integrationen, bemerkend dass $\delta dx = d\delta x\ \delta d^2x = d^2\delta x$ u. s. w. ist, lieferte ihm die drei Bedingungsgleichungen des Grössten und Kleinsten

$$\begin{aligned} A - dA_1 + d^2A_2 - \ldots . &= 0 \\ B - dB_1 + d^2B_2 - \ldots . &= 0 \\ C - dC_1 + d^2C_2 - \ldots . &= 0. \end{aligned}$$

Letztere sind aber Differentialgleichungen und man weiss nicht, welche Grössen bei der Integration als abhängig, und welche als unabhängig veränderlich zu betrachten sind; dann nach welcher Grösse in der Gleichung $U = \int V$ integrirt werden soll. In unveränderter

Form sind aber diese Rechnungsentwickelungen in das grosse Werk von Lacroix über Differential- und Integralrechnung übergegangen, und wurden von da aus in manche später erschienene Werke verpflanzt.

Lagrange hat noch mehrere Abhandlungen über Variationsrechnung geliefert, ausser derjenigen, welche im vierten Bande der Turiner Memoiren für 1766 enthalten ist, und wo er das Maximum oder Minimum von U sucht, sobald letztere Grösse durch eine Differentialgleichung von der Form

$$F\left[U \frac{dU}{dx} \dots \frac{d^m U}{dx^m}, x\, y \frac{dy}{dx} \dots \dots \frac{d^n y}{dx^n}\right] = 0$$

gegeben ist, findet man diese Materie in der Theorie der Functionen, in den Vorlesungen über Functionenrechnung und in der analytischen Mechanik behandelt. — In der Theorie der Functionen erwähnt Lagrange nichts von der Variation der unabhängig Variablen, aber in den Vorlesungen über Functionenrechnung, wo er die Principien der Variationsrechnung nach Euler's Vorgang erläutert, behandelt er auch den Fall, wenn die unabhängig veränderliche x einen Zuwachs erhält nach zwei Methoden; die Resultate, zu denen er gelangt, lassen sich aber, wie hier gezeigt werden wird, auf eine einfachere Art ableiten. Den Ideengang von Euler und Lagrange verfolgend, gelangt man zu dem Schlusse, dass der Variationsquotient von x und der gemischte Variationsquotient von y constante Grössen sind, wodurch eben die Rechnungen abgekürzt werden können. In der analytischen Mechanik gelangt Lagrange, sich der Methode des unendlich Kleinen bedienend, zu den nämlichen Endresultaten wie in den Vorlesungen über Functionenrechnung, und diese Ableitungsweise wurde in alle später erschienene Werke der Analysis, welche die Variationsrechnung berücksichtigten, aufgenommen.

Man geht dabei von der Voraussetzung aus, dass $U = \int V dx$ wobei $U = f(x\, y\, y' \dots y^{(n)})$ ist, für $\delta U = 0$ ein Maximum oder Minimum liefert, dann differentirt man die Grösse V nach der Charakteristik δ, und betrachtet diese Art der Differentiation als sich auch auf die Grösse x erstreckend. Hierauf werden aber immer eine beträchtliche Anzahl von Rechnungen nur darum gemacht, weil nicht berücksichtiget wird, dass δx constant ist. In dieser seiner letzten Abhandlung hat Lagrange keinen Grund angegeben, warum er die zuerst von ihm in den Turiner Memoiren gegebene Entwickelungsweise aufgegeben. Es blieb daher noch übrig genau nachzuweisen, wie sich die auf diese Art gewonnenen Resultate in die auf jene jetzt allgemein gang und gebe gewordenen Ausdrücke transformiren lassen. Ob es überhaupt erlaubt ist nach dem Maximum oder Minimum von U zu fragen, wenn die Grenzwerthe des Integrales nicht gegeben sind, mag dahingestellt bleiben; Thatsache ist es aber, dass die analytischen Resultate öfters den aus der blossen Anschauung entspringenden Auflösungen widersprechen, und im Allgemeinen die zur Bestimmung der Integrationsconstanten und Grenzwerthe des Integrales nöthigen Daten nicht liefern.

§. 2. Aus Nachfolgendem wird man ersehen, dass Lagrange's erste Abhandlung an Klarheit gewinnt, wenn statt den Differentialien, Differentialquotienten, welche in der Analysis allein einen Sinn haben, eingeführt werden. Der Einfachheit wegen behalte ich nur die Variablen x und y bei, und schreibe statt $U = \int V$ die Gleichung

$$U = \int_{t_1}^{t_2} V dt, \tag{I}$$

wobei $V = f(x\, x'\, x'' \ldots\ldots y\, y'\, y'' \ldots.)$ ist und $x'\, x'' \ldots y'\, y'' \ldots$ u. s. w. der Kürze wegen statt

$$\frac{dx}{dt}\ \frac{d^2x}{dt^2} \ldots \frac{dy}{dt}\ \frac{d^2y}{dt^2} \ldots.$$

geschrieben wurde.

Die Aufgabe besteht darin, x und y als Functionen von t derart zu bestimmen, auf dass U zwischen den gegebenen Grenzwerthen des t genommen zu einem Maximum oder Minimum werde. Vorausgesetzt, $x = f(t)$ $y = \varphi(t)$ leisten der Aufgabe Genüge, so lasse man diese Beziehungen zwischen x und t, y und t übergehen in andere $x = F(t\, i)$, $y = \Phi(t\, i)$, unter i einen variablen Parameter verstanden, der mit t derart verbunden ist, dass sich $F(t\, i)$ und $\Phi(t\, i)$ für $i = 0$ auf $f(t)$ und $\varphi(t)$ reduciren. U wird hiedurch zu einer Function von t und i, deren Entwickelung nach steigenden Potenzen von i lehrt, dass U zu einem Maximum oder Minimum wird für $\frac{dU}{di} = 0$, wobei i der Nulle gleich su setzen ist. Den so transformirten Differentialquotienten nennt man: ersten Variationsquotienten von U und bezeichnet ihn durch $\dot{U}$ oder $\frac{\delta U}{di}$. Die Gleichung I gibt uns aber

$$\frac{dU}{di} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dV}{di}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (A \frac{dx}{di} + A_1 \frac{dx'}{di} + \ldots\ldots)\, dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (B \frac{dy}{di} + B_1 \frac{dy'}{di} + \ldots\ldots)\, dt$$

letztere erscheint für $i = 0$ unter der Form

$$\text{(II)} \qquad \dot{U} = \int_{t_1}^{t_2} (A\dot{x} + A_1 \dot{x}' + A_2 \dot{x}'' + \ldots)\, dt +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (B\dot{y} + B_1 \dot{y}' + B_2 \dot{y}'' + \ldots)\, dt.$$

Partielle Integrationen transformiren diese Gleichung in nachfolgende

$$\text{(III)} \qquad \dot{U} = \int_{t_1}^{t_2} (A - \frac{dA_1}{dt} + \frac{d^2A_2}{dt^2} - \ldots\ldots)\, \dot{x}dt$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} (B - \frac{dB_1}{dt} + \frac{d^2B_2}{dt^2} - \ldots\ldots)\, \dot{y}dt$$

$$+ \Big\{ (A_1 - \frac{dA_2}{dt} + \ldots)\, \dot{x} \Big\}_{t_1}^{t_2} + \Big\{ (A_2 - \frac{dA_3}{dt} + \ldots)\, \dot{x}' \Big\}_{t_1}^{t_2} + \ldots$$

$$+ \Big\{ (B_1 - \frac{dB_2}{dt} + \ldots)\, \dot{y} \Big\}_{t_1}^{t_2} + \Big\{ (B_2 - \frac{dB_3}{dt} + \ldots)\, \dot{y}' \Big\}_{t_1}^{t_2} + \ldots$$

Eine einfache Betrachtung dieses Ausdruckes lehrt, dass $\dot{U}$ nur dann unabhängig von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ verschwinden kann, wenn x und y als Functionen von t mittelst der zwei Differentialgleichungen

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} A - A_1' + A_2'' - A_3''' + \ldots &= \vartheta \\ B - B_1' + B_2'' - B_3''' + \ldots &= \vartheta \end{aligned}$$

bestimmt werden.

Ausserdem müssen noch die Grenzgleichungen verschwinden, letzteres findet immer Statt, sobald die Werthe von $x, x', x'' \dots$ $y, y' \dots y^{(n-1)}$ sowohl für $t = t_1$, als auch für $t = t_2$ gegeben sind.

Wären aber durch die Natur der Aufgabe nur vier Gleichungen von der Form $x = \psi_1(t)$, $x = \psi_2(t)$, $y = \psi_3(t)$, $y = \psi_4(t)$ bekannt, von denen je zwei zusammengenommen, wie $x = \psi_1(t)$ $y = \psi_3(t)$, eine auf zwei Coordinatenaxen bezogene Curve repräsentiren, dann müsste aus diesen letzteren $\dot{y}$ als Function von $\dot{x}$, $\dot{y}'$ als Function von $\dot{x}'$, u. s. w. bestimmt werden. Die Substitution dieser Werthe von $\dot{y}, \dot{y}' \dots$ in die Grenzgleichung bewirkt, dass in letzterer blos Glieder vorkommen, welche $\dot{x}, \dot{x}' \dots$ als Factoren enthalten. Bezeichnet man diese Glieder kurzweg mit $C, C_1, C_2 \dots$ so ist ersichtlich, dass $\dot{U}$ in diesem Falle verschwindet, sobald ausser den zwei Gleichungen sub Nr. IV noch die Gleichung

$$(C\dot{x})_{t_1}^{t_2} + (C_1\dot{x}')_{t_1}^{t_2} + (C_2\dot{x}'')_{t_1}^{t_2} + \dots\dots = 0 \qquad \text{(V)}$$

besteht.

Bezeichnet man die Werthe von $C, C_1, C_2 \dots$ für $t = t_2$ durch $D, D_1, D_2 \dots$ und die Werthe dieser Grössen $C, C_1 \dots$ für $t = t_1$ mit $E, E_1, E_2 \dots$ so hat man nachfolgende $2n$ Bedingungsgleichungen für die Grenzen

$$\begin{array}{lll} D = 0 & D_1 = 0 & D_2 = 0 \;\dots\dots \\ E = 0 & E_1 = 0 & E_2 = 0 \;\dots\dots \end{array}$$

Die Bestimmung von $\dot{y}$ als Function von $\dot{x}$, eben so von $\dot{y}'$ als Function von $\dot{x}'$ u. s. w. ist immer möglich, denn zwei Gleichungen wie $x = \psi_1(t)$, $y = \psi_3(t)$ geben durch Elimination von t eine Gleichung von der Form $\Pi_1(x\,y) = 0$. Betrachtet man hier x und y als Functionen von t und i, die sich für $i = 0$ auf reine Functionen von t reduciren, und differentiirt obige Gleichung i als variabel betrachtend, so wird

$$\frac{d\,\Pi_1}{dx}\,\frac{dx}{di} + \frac{d\,\Pi_1}{dy}\,\frac{dy}{di} = 0$$

erhalten.

Letztere verwandelt sich für $i = 0$ in $\frac{d\,\Pi_1}{dx}\,\dot{x} + \frac{d\,\Pi_1}{dy}\,\dot{y} = 0$ und dient zur Bestimmung von $\dot{y}$.

Differentiirt man aber die Gleichung $\Pi_1 (x\, y) = 0$ nach der variablen t, so erhält man die Differentialgleichung

$$\Pi_1{}' (x)\, x' + \Pi_1{}' (y)\, y' = 0,$$

welche nach der variablen i differentiirt

$$x' \cdot \frac{d\Pi_1{}'(x)}{di} + \Pi_1{}' (x) \frac{dx'}{di} + y' \cdot \frac{d\Pi_1{}'(y)}{di} + \Pi_1{}' (y) \frac{dy'}{di} = 0$$

gibt, und für $i = 0$ eine Gleichung von der Form

$$ax' + b\dot{x}' + cy' + d\dot{y}' = 0$$

liefert, die zur Bestimmung von $\dot{y}'$ als Function von $\dot{x}'$ dient.

Betrachten wir einen der einfachsten Fälle, wenn

$$U = \int_{t_2}^{t_1} V dt$$

und $V = f\,(x\; x'\; y\; y')$ ist, und die Werthe von x und y sowohl für $t = t_1$ als auch für $t = t_2$ bekannt sind. Die Differentialgleichungen des Grössten und Kleinsten sind hier

$$\frac{dV}{dx} - \left(\frac{dV}{dx'}\right)' = 0 \qquad \frac{dV}{dy} - \left(\frac{dV}{dy'}\right)' = 0,$$

deren echtes Integrale auf nachfolgende Art sich ermitteln lässt. Es ist

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot x' + \frac{dV}{dx'} x'' + \frac{dV}{dy} y' + \frac{dV}{dy'} y''$$

oder

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{dV}{dx'}\right)' x' + \frac{dV}{dx'} x'' + \left(\frac{dV}{dy'}\right)' y' + \frac{dV}{dy'} y'',$$

woraus sich

$$V = \frac{dV}{dx'} x' + \frac{dV}{dy'} y' + a_1$$

ergibt.

Das eben Gesagte ist von Nutzen bei dem Aufsuchen der Linie des raschesten Falles, denn bei diesem Problem erscheint die Formel, welche zu einem Minimum werden soll unter der Form

$$U = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt \sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{A - y}}$$

wobei

$$V = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{\sqrt{A - y}}$$

ist.

Das erste Integrale der Bedingungsgleichungen des Minimums wird $\sqrt{2\,a_1} = \sqrt{A - y}\,\sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Aber

$$\frac{dV}{dx} - \left(\frac{dV}{dx'}\right)' = 0$$

gibt in diesem Falle

$$\frac{x'}{\sqrt{A - y}\,\sqrt{x'^2 + y'^2}} = a_2.$$

Weiters ist $\sqrt{2\,a_1} = \dfrac{x'}{a_2}$ und $x = a_3 + t \,.\, a_2 \sqrt{2\,a_1}$.

Wegen dieser Beziehung zwischen x und t wird die Gleichung

$$\frac{a_2 \sqrt{2\,a_1}}{\sqrt{A - y}\,\sqrt{2\,a_1\ a_2{}^2 + y'^2}} = a_2$$

erhalten, die zu

$$t + a_4 = \int \frac{dy\,(A - y)}{\sqrt{2\,a_1\,(A - y) - 2a_2{}^2\,a_1\,(A - y)^2}}$$

führt.

Die Elimination von t zeigt, dass die gefundene Linie zwischen den Grössen x und y eine Cycloide repräsentirt. Auch bei dem Beweise des Principes der kleinsten Wirkung wird, so denke ich, die Einführung der Variablen t für die Auffassung der Beweisführung einige Erleichterung gewähren.

Bekanntlich will man mittelst dieses Satzes zeigen, dass das Integrale $U = \int v\,ds$ zu einem Minimum wird für diejenige Curve, die ein freier materieller Punkt unter dem Einflusse von Kräften beschreibt, denen zufolge die Gleichung $v^2 = 2\,f(x\,y\,z) + c$ besteht.

Man gebe obiger Gleichung die Form

$$U = \int_{t_1}^{t_2} v^2\,dt\,,$$

so sind der Natur des Problemes zufolge die Werthe von x, y, z für $t = t_1$ und $t = t_2$ als bekannt anzunehmen.

Die Differentiation obiger Gleichungen nach der Charakteristik δ gibt

$$\delta U = \int_{t_1}^{t_2} v \delta v dt + \int_{t_1}^{t_2} v \delta v dt.$$

Bei dieser Operation muss man sich die Gleichungen $x = F_1(t)$, $y = F_2(t)$, $z = F_3(t)$, welche U zu einem Minimum machen, übergangenen denken in die ihnen unendlich nahe gelegenen $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, die nur der Bedingung unterworfen bleiben, zwei Projections-Curven zu geben, die durch die zwei Grenzpunkte durchgehen, zwischen welchen das Integrale genommen wurde. Man braucht jetzt nur die zwei Gleichungen $v^2 = 2\varphi(x\,y\,z) + c$ und

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

nach der Charakteristik δ zu differentiiren, wodurch $v\delta v = x''\,dx + y''\,\delta y + z''\,\delta z$ und $v\delta v = x'\,\delta x' + y'\,\delta y' + z'\,\delta z'$ erhalten wird. Alles Weitere ist ohnehin bekannt.

§. 3. Wird in der Gleichung

$$U = \int_{t_1}^{t_2} f(x\,x'\,x'' \dots y\,y' \dots)\,dt,\ x' = 1$$

gesetzt, so ist $x'' = 0$, $x''' = 0$, u. s. w.

$$dx = dt, \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \dots t_1 = x_1, t_2 = x_2$$

und obige Gleichung transformirt sich in

$$\text{(I)} \qquad U = \int_{x_1}^{x_2} f(x\,y\,y' \dots)\,dx,$$

wo jetzt $y', y'' \dots$ statt $\frac{dy}{dx}\ \frac{d^2y}{d^2x} \dots$ steht.

Die Gleichungen $x = F(t\ i)$, $y = \Phi(t\ i)$ verwandeln sich in $x = F_1(i)$, $y = \Phi(x\ i)$ und die Gleichung II des vorigen Paragraphes wird wegen $\frac{dV}{dx'} = 0$ zu

$$\text{(II)} \quad (\dot{U}) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dx}\,\dot{x}dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{dV}{dy}(\dot{y}) + \frac{dV}{dy'}(\dot{y}') + \dots \dots\right] dx.$$

Um zu zeigen, dass $\dot{x}$ constant ist, bemerke man, dass wenn $y = \varphi(x)$ die gesuchte Beziehung zwischen y und x ist, die U zu einem Maximum oder Minimum macht, und man sie übergehen lässt in $y = \Phi\ (x\ i)$, die sich für $i = 0$ auf $\varphi\ (x)$ reducirt, so gibt die Differentiation von $\Phi\ (x\ i)$ nach der Grösse i

$$\frac{dy}{di} = \frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{di} + \frac{dy}{di}$$

und das Nullsetzen von i verwandelt diese Gleichung in $(\dot{y}) = y'\dot{x} + \dot{y}$, wobei $\dot{x}$ constant wurde. Differentiirt man aber $y = \Phi\ (x\ i)$ nach der Grösse x, so kömmt $\frac{dy}{dx} = y'$, in welcher x und i vorkommen, differentiirt man diese letztere nach i, so wird

$$\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{di} = \frac{dy'}{di} + \frac{dy'}{dx}\,\frac{dx}{di}$$

erhalten und das Nullsetzen von i verwandelt diese Gleichung in $(\dot{y}) = y''\,\dot{x} + \dot{y}'$. Allgemein findet man auf diese Art

$$\left\{\dot{y}^{(n)}\right\} = y^{(n+1)}\,\dot{x} + \dot{y}^{(n)}\,.$$

Werden jetzt in II die gemischten Variationen von y durch die einfachen ausgedrückt, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$(\dot{U}) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dx}\,\dot{x}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \left\{\frac{dV}{dy}\,(\dot{x}y' + \dot{y}) + \frac{dV}{dy'}\,(\dot{x}y'' + \dot{y}') + \ldots\ldots\right\} dx.$$

Man kann ihr auch die Form geben

$$(\dot{U}) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}\,y' + \frac{dV}{dy'}\,y'' + \ldots\ldots\right) \dot{x}\,dx$$

$$+ \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dV}{dy}\,\dot{y} + \frac{dV}{dy'}\,\dot{y}' + \frac{dV}{dy''}\,\dot{y}'' + \ldots\ldots\right) dx.$$

Die totale Differentiation von $V = f\ (x\ y\ y' \ldots .)$ nach der Grösse x gibt

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dx} + \frac{dV}{dy}\,y' + \frac{dV}{dy'}\,y'' + \ldots\ldots\ \frac{dV}{dy^{(n)}}\,y^{(n+1)}$$

demnach verwandelt sich obige Gleichung in

$$(\dot{U}) = \dot{x}\ (V)_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dV}{dy}\,\dot{y} + \frac{dV}{dy'}\,\dot{y}' + \ldots\ldots\right) dx.$$

Es ist aber üblich geworden, sie unter der Form

$$\text{(III)}\quad (\dot{U})=(V\dot{x})_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{dV}{dy}[(\dot{y})-y'\dot{x}]+\frac{dV}{dy'}[(\dot{y})-y'\dot{x}]'+\ldots\right\}dx$$

zu geben.

Wären die Grenzwerthe des x durch die Natur der Aufgabe gegeben, dann ist $\dot{x}=0$, $(\dot{y})=\dot{y}$, und wir erhalten

$$\text{(IV)}\qquad \dot{U}=\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{dV}{dy}\dot{y}+\frac{dV}{dy'}\dot{y}'+\ldots.\right)dx.$$

Man wendet bekanntlich auf die Gleichung III die Integration durch Theile an, und transformirt sie in

$$(\dot{U})=(V\dot{x})_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{dV}{dy}-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'+\left(\frac{dV}{dy''}\right)''-\ldots.\right\}dx\left\{(\dot{y})-y'\dot{x}\right\}$$

$$+\left[\left\{\frac{dV}{dy'}-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'+\ldots.\right\}\left\{(\dot{y})-y'\dot{x}\right\}\right]_{x_1}^{x_2}+\ldots.$$

Die Bedingungsgleichung des Grössten und Kleinsten gibt, im Allgemeinen integrirt, eine Gleichung von der Form

$$y=F(x\; a_1\; a_2\ldots..a_{2n}).$$

Es soll jetzt gezeigt werden, dass, sobald zwei Grenzcurven gegeben sind, die Grenzgleichungen sich stets auf zwei reduciren, und demzufolge zur Bestimmung der $2n$ Integrationsconstanten und der zwei Grenzwerthe des Integrales, welche $2n+2$ Gleichungen erfordern, nicht hinreichen. Stellen nämlich $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$ diese Grenzcurven vor, so müssen aus diesen letzteren die Grössen $(\dot{y})$, $(\dot{y}')\ldots..(\dot{y})^{(n)}$ als Functionen von $\dot{x}$ bestimmt werden. Die Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung

$$(\dot{U})=(V\dot{x})_{x_1}^{x_2}+\left[\left\{\frac{dV}{dy'}-\left(\frac{dV}{dy''}\right)'+\ldots.\right\}\left\{(\dot{y})-y'\dot{x}\right\}\right]_{x_1}^{x_2}+\ldots.$$

transformirt diese letztere in eine von der Form $(\dot{U})=M_2\,\dot{x}_2-M_1\,\dot{x}_1$, die unabhängig von $\dot{x}_2$ und $\dot{x}_1$ verschwindet für $M_2=0$, $M_1=0$, wobei zu bemerken, dass M_2 eine Function von $x_2\,a_1\,a_2\ldots.a_{2n}$

und M_1 eine reine Function von $x_1\, a_1\, a_2 \ldots . a_{2n}$ bedeutet. Strenge genommen hat man an den Grenzen noch folgende zwei Gleichungen $\varphi(x_1) = F(x_1\, a_1\, a_2 \ldots a_{2n})$, $\psi(x_2) = F(x_2\, a_1\, a_2 \ldots . a_{2n})$, aber auch diese letzteren in Verbindung mit den zwei früher erwähnten reichen im Allgemeinen, die ganze Entwicklungsweise als richtig angenommen, zur Bestimmung der $2n + 2$ Unbekannten $a_1\, a_2 \ldots a_{2n}\, x_1\, x_2$ nicht hin. Nur wenn $n = 2$ ist, sollte dem ersten Anblicke nach diese Bestimmung stets möglich und nie dem Sinne der Aufgabe entgegen sein. In wie fern dies der Fall ist, wollen wir aus Nachfolgendem ersehen.

§. 4. Sei die kürzeste Distanz zwischen zwei Curven zu bestimmen, welche mittelst der Gleichungen $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ gegeben sind. Hier ist

$$U = \int_a^b dx\, \sqrt{1 + y'^2}$$

das Integrale von

$$\frac{dV}{dy} - \left(\frac{dV}{dy'}\right)' = 0$$

wird durch $y = a_1 x + a_2$ vorgestellt und

$$(\dot{U}) = (V\dot{x})_a^b + \left\{ \frac{dV}{dy'} \left[(\dot{y}) - y'\dot{x}\right] \right\}_b^a$$

liefert wegen $(\dot{y}) = \frac{d\varphi}{dx}\,\dot{x}$ und $(\dot{y}) = \frac{d\psi}{dx}\,\dot{x}$ die zwei Grenzgleichungen

$$1 + a_1 \frac{d\varphi}{dx} = 0 \qquad 1 + a_1 \frac{d\psi}{dx} = 0.$$

Zur Bestimmung der vier Unbekannten a_1, a_2, a, b erhalten wir folgende Gleichungen

1. $\varphi(a) = a_1 a + a_2$ 3. $1 + a_1 M = 0$
2. $\psi(b) = a_1 b + a_2$ 4. $1 + a_1 N = 0$

M bezeichnet den Werth von $\frac{d\varphi}{dx}$ für $x = a$ und N den von $\frac{d\psi}{dx}$ für $x = b$. Die Betrachtung der Gleichungen 3. und 4. lehrt, dass in diesem Sinne die Aufgabe nur lösbar ist, wenn die zwei Grenzcurven vor allem anderen zwei zu einander parallele Tangenten zulassen, das heisst es muss $M = N$ sein. Diese Bedingung besteht zum

Beispiel, wenn die Grenzcurven durch zwei zu einander parallele gerade Linien repräsentirt werden; denn dann ist

$$
\begin{aligned}
y &= \varphi(x) = \alpha x + \beta \\
y &= \psi(x) = \alpha x + \gamma \\
M &= \quad N \quad = \alpha
\end{aligned}
$$

und man erhält zur Bestimmung der vier Unbekannten die drei Gleichungen $\alpha a + \beta = a_1 a + a_2$, $\alpha b + \gamma = a_1 b + a_2$, $1 + \alpha a_1 = 0$, welche eine der Constanten a_2 unbestimmt lassen, was der Natur der Sache gemäss ist.

Schneiden sich aber die zwei Grenzlinien, dann ist ihre kürzeste Distanz der Nulle gleich; stellt man diese Linien durch $\varphi(x) = \alpha x + \beta$, $\psi(x) = \gamma x + \delta$ dar, so nehmen die zur Bestimmung der Constanten dienenden Gleichungen die Form an

$$
\begin{aligned}
a_1 a + a_2 &= \alpha a + \beta \qquad & 1 + a_1 \alpha &= 0 \\
a_1 b + a_2 &= \gamma b + \delta \qquad & 1 + a_1 \gamma &= 0.
\end{aligned}
$$

Die zwei letzteren können aber nicht zusammenbestehen, daher ist es unmöglich eine Gerade anzugeben, welche auf beiden Grenzlinien zu gleicher Zeit senkrecht steht. Ist die eine Grenzlinie eine Gerade, die zweite aber eine Curve, welche als Umhüllungslinie einer nach einem bestimmten Gesetze sich bewegenden Geraden angesehen werden kann, so wird die Auflösung in diesem Sinne immer möglich sein. — Schneiden sich aber die Grenzcurven und lassen sie ausserdem zwei zu einander parallele Tangenten zu, so wäre das Resultat der Analysis als unrichtig anzusehen, welches aussagt, dass das Stück der Geraden, welches zwischen den Tangentenlinien eingeschlossen ist und auf letzteren senkrecht steht, die kürzeste Distanz der zwei Grenzcurven ausdrückt, denn diese letztere ist der Nulle gleich. Sucht man z. B. Fig. 1 die kürzeste Distanz zwischen dem Kreise $x^2 + y^2 = r^2$ und der Geraden $L\,l$, die durch $y = \alpha x + \beta$ vorgestellt werden mag, so wird die Gerade $L_2\,l_2$ gefunden und dann noch näher bestimmt, dass mn diese kürzeste Distanz messe. Abgesehen davon, dass der Kreis in zwei Punkten von der Geraden $L\,l$ geschnitten wird, sieht man ein, dass es viele Stücke wie $\mu\nu$ gibt, die Theile von Linien sind, welche auf den Grenzcurven nicht senkrecht stehen, und kürzer sind als mn.

§. 5. Bekanntlich geschieht die Bestimmung der Integrations-Constanten sobald die Grenzwerthe des Integrales durch die Natur der Aufgabe gegeben sind, auf eine ganz andere Art. Ist nämlich das bestimmte Integrale

$$U = \int_a^b V dx$$

gegeben, wobei $V = f\ (x\ y\ y')$ und für $x = a$ und $x = b$, $y = A$ und $y = B$ bekannt ist, so gibt die Integration der Bedingungsgleichung des Grössten und Kleinsten $y = \varphi\ (x\ a_1\ a_2)$. Die Constanten $a_1\ a_2$ sind dann mittelst den zwei Gleichungen $A = \varphi\ (a\ a_1\ a_2)\ B = \varphi\ (b\ a_1\ a_2)$ zu bestimmen; aber eben dies unterliegt öfters den grössten Schwierigkeiten; man muss dann das Problem bedeutend modificiren, um wenigstens irgend eine Bestimmung dieser Grössen zu erhalten.

Die Aufsuchung der Linie, welche zwei Punkte verbindet, und um die Abscissenaxe rotirend gedacht wird, die Fläche mit der kleinsten Oberfläche erzeugt, führt zur Bestimmung des Minimums von

$$U = \int_a^b y dx \sqrt{1 + y'^2}.$$

In diesem Falle ist $V = y \sqrt{1 + y'^2}$ und da diese Grösse kein x enthält, so ergibt sich das erste Integrale der Gleichung

$$\frac{dV}{dy} - \left(\frac{dV}{dy'}\right)' = 0$$

aus der Entwickelung von $V = y' \dfrac{dV}{dy'} + \dfrac{1}{a_1}$.

Wir erhalten auf diese Art $1 + y'^2 = a_1{}^2 y^2$ und hieraus

$$x + a_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{a_1{}^2 y^2 - 1}}.$$

Da aber

$$\int \frac{dy}{\sqrt{a_1{}^2 y^2 - 1}} = \frac{1}{a_1 \sqrt{-1}} \int \frac{a_1\, dy}{\sqrt{1 - a_1{}^2 y^2}} = \frac{1}{a_1 \sqrt{-1}}\, Arcsin\, (a_1 y)$$

ist, so ist das vollständige Integrale der Differentialgleichung des Minimums repräsentirt durch

$$a_1\, y = sin\, [(x + a_2)\, a_1 \sqrt{-1}].$$

Sie gibt

$$y = \frac{1}{2\, a_1 \sqrt{-1}} \left\{ e^{-a_1 (x + a_2)} - e^{a_1 (x + a_2)} \right\}$$

und verwandelt sich sobald

$$\frac{e^{-a_1 a_2}}{2a_1 \sqrt{-1}} = b \text{ und } - \frac{e^{-a_1 a_2}}{2a_1 \sqrt{-1}} = c$$

gesetzt wird, in $y = b\, e^{-a_1 x} + c e^{a_1 x}$. Um a_1 zu eliminiren bemerke man, dass $bc = \frac{1}{4\, a_1^2}$ demnach

$$y = b\, e^{-\frac{y}{2\sqrt{bc}}} + c\, e^{+\frac{y}{2\sqrt{bc}}}.$$

Als vollständiges Integrale der Differentialgleichung

$$\frac{dV}{dy} - \left(\frac{dV}{dy'}\right)' = 0$$

kann demnach eine Gleichung von der Form

$$y = a_1\, e^{\frac{x}{2\sqrt{a_1 a_2}}} + a_2\, e^{-\frac{x}{2\sqrt{a_1 a_2}}},$$

unter $a_1\ a_2$ willkürliche Constante verstanden, angesehen werden. Ein particuläres Integrale könnte, der Natur der Aufgabe gemäss, nicht als brauchbar angesehen werden, da es blos eine willkürliche Constante enthält; es erscheint übrigens hier unter einer merkwürdigen Form, denn wird die Bedingungsgleichung des Minimums entwickelt, so gelangt man zu $1 + y'^2 = y\, y''$. Letztere wird erfüllt für $y = k + x\sqrt{-1}$, unter k eine willkürliche Constante verstanden.

Die Bestimmung der Constanten hat zu geschehen mittelst der Gleichungen

$$A = a_1\, e^{\frac{a}{2\sqrt{a_1 a_2}}} + a_2\, e^{-\frac{a}{2\sqrt{a_1 a_2}}}$$

$$B = a_1\, e^{\frac{b}{2\sqrt{a_1 a_2}}} + a_2\, e^{-\frac{b}{2\sqrt{a_1 a_2}}}$$

deren Auflösung bis jetzt nicht gelungen ist.

Man bemerkt aber, dass sich die Aufgabe einfacher gestaltet, sobald man die Ordinatenaxe durch den einen Punkt gehen lässt, das heisst man integrirt von $x = 0$ bis $x = b$, obige zwei Gleichungen erscheinen dann unter der Form

$$A = a_1 + a_2 \qquad B = a_1\, e^{\frac{b}{2\sqrt{a_1 a_2}}} + a_2\, e^{-\frac{b}{2\sqrt{a_1 a_2}}}.$$

Da aber auch so die Auflösung nicht gelingt, so suche man die Coordinaten des tiefsten Punktes der Linie

$$y = a_1\, e^{\frac{x}{2\sqrt{a_1 a_2}}} + a_2\, e^{-\frac{x}{2\sqrt{a_1 a_2}}}.$$

Man findet $x = \sqrt{a_1\, a_2}\; l \left(\frac{a_2}{a_1}\right)$, $y = 2\sqrt{a_1\, a_2}$.

Nun wähle man unter allen die zwei Punkte verbindenden Kettenlinien, jene deren tiefster Punkt mit dem zweiten gegebenen Punkte zusammenfällt.

Unter diesen Umständen hat man zur Bestimmung der Constanten die zwei Gleichungen $A = a_1 + a_2$ $B = 2\sqrt{a_1\, a_2}$ die

$$a_1 = \frac{1}{2}\left[A \mp \sqrt{A^2 - B^2}\right] \qquad a_2 = \frac{1}{2}\left[A \pm \sqrt{A^2 - B^2}\right]$$

geben. Die obere Grenze b des Integrales ist nicht mehr willkürlich, denn man hat

$$b = \frac{B}{2}\, l \left\{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{A - \sqrt{A^2 - B^2}}\right\}.$$

Die Gleichung der Kettenlinie erscheint endlich unter der Gestalt

$$y = \frac{1}{2}\left[A - \sqrt{A^2 - B^2}\right] e^{\frac{x}{B}} + \frac{1}{2}\left[A + \sqrt{A^2 - B^2}\right] e^{-\frac{x}{B}}.$$

Wird hier die durch die Gleichung

$$x = x' + \frac{B}{2}\, l \left\{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{A - \sqrt{A^2 - B^2}}\right\}$$

ausgedrückte Coordinaten-Verschiebung vorgenommen, so gelangt man zu der einfachsten und allgemein bekannten Gleichung der Kettenlinie

$$y = \frac{B}{2}\left\{e^{\frac{x'}{B}} + e^{-\frac{x'}{B}}\right\}.$$

§. 6. Es wurde schon im §. 2 gezeigt, wie das Problem der Brachystochrone, dem von Lagrange in den Turiner Memoiren vorgetragenen Ideengang gemäss aufgelöst werden kann, wenn die Werthe von x und y für t_1 und t_2 bekannt sind.

Jetzt wollen wir einen Blick auf die Auflösungen dieses Problemes werfen, welche nach der Entdeckung der Variationsrechnung veröffentlicht wurden. Bekanntlich wurde dies Problem von Johann Bernouilli den bedeutendsten Geometern seiner Zeit in folgender Gestalt vorgelegt.

Zwei in derselben Ebene, aber nicht in der nämlichen verticalen oder horizontalen Linie gelegene Punkte sind gegeben, man soll unter allen sie verbindenden Linien jene angeben, auf welcher ein von der Schwere getriebener materieller Punkt in der kürzesten Zeit vom höher gelegenen ausgehend den tiefer gelegenen erreicht.

Lagrange hat im zweiten Bande der alten Turiner Memoiren dieses Problem verallgemeinert, indem er annahm, die zwei Punkte seien beliebig im Raume gelegen. Er legt in der erwähnten Abhandlung diese Aufgabe mit folgenden Worten vor: *Soit cherchée la courbe brachystochrone dans le vuide. Nommant x l'abscisse vérticale et y et z les deux ordonnées horizontales et perpendiculaires l'une à l'autre, la formule qui éxprime le tems sera*

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}.$$

Aus der von ihm gebrauchten Fomel, welche zu einem Minimum werden soll, ist ersichtlich, dass er sich den Ursprung der Coordinaten in dem höher gelegenen Punkt verlegt dachte; die Coordinate X wurde als Höhenordinate betrachtet, um leichter die Differentialgleichungen des Minimums integriren zu können. Dann wird noch vorausgesetzt, dass die Ordinaten x der gesuchten Curve, vom Ursprunge der Coordinaten nach abwärts gezählt, als positiv zu betrachten sind.

Unter diesen Voraussetzungen findet man immer für die Geschwindigkeit des materiellen Punktes $v = \sqrt{2gx}$ und

$$U = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Die Brauchbarkeit dieser Formel lässt sich noch in einem anderen Falle nachweisen, und Lagrange hat im vierten Bande der alten Turiner Memoiren die Sache so dargestellt, als wenn er sie blos unter dieser Supposition aufgestellt hätte.

(Fig. 2.) Hat nämlich ein materieller Punkt μ in M von der Abscissenaxe OZ frei fallend, die Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2gh}$ erlangt, so kömmt ihm im Punkte μ die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gx}$ zu, und da

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{v}$$

ist, so gelangen wir wieder zur Formel

$$U = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{2g}\,.\,\sqrt{x}}.$$

Ohne in dieses Detail einzugehen, hat Lagrange in den oben erwähnten Memoiren das Minimum von

$$U = \int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{\sqrt{x}}$$

gesucht unter der Voraussetzung, dass die zwei Punkte, zwischen welchen die Brachystochrone verzeichnet werden soll, auf zwei Curven sich befinden, welche durch ihre Gleichungen gegeben sind. Er fand, dass die Brachystochrone auf den beiden Grenzcurven senkrecht zu stehen habe; dies zeigt uns gleich, dass die erste Grenzcurve im Widerspruche mit der Voraussetzung nicht vollkommen willkürlich sein kann, sondern vielmehr derart beschaffen sein muss, dass sie einen tiefsten oder höchsten Punkt besitze, von dem aus die Bewegung zu beginnen hätte.

§. 7. Herr von Ettingshausen hat in seinen Vorlesungen über analytische Mechanik dieses Problem ebenfalls behandelt, und da er zu einem ganz anderen Endresultate gelangt, so wollen wir in Kürze den von ihm befolgten Ideengang auseinandersetzen.

Es wird vor allem anderen angenommen, dass der materielle Punkt keine Anfangsgeschwindigkeit besitze, und gesucht, unter welchen Bedingungen dieser Punkt von der ersten Grenzcurve ausgehend die zweite erreicht.

Die Coordinaten werden in der in Fig. 3 verzeichneten Stellung angenommen. Bedeutet h die Ordinate des ersten Punktes der Brachystochrone, so erlangt der materielle Punkt in M die Geschwindigkeit

$v = \sqrt{2g\,(h-x)}$ und wegen $dt = \frac{ds}{v}$ erscheint die Formel, welche zu einem Minimum werden soll, unter der Form

$$U = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_h^{x_2} \frac{dx\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{h-x}}.$$

Die Grösse h wird, dem von Lagrange im vierten Bande der Turiner Memoiren gegebenen Verfahren gemäss, einer Variation unterworfen, und auf diese Art gelangt der Herr Verfasser zu den zwei Grenzgleichungen

$$\frac{dx_2}{ds_2}\,\frac{\delta x_2}{\delta s_2} + \frac{dy_2}{ds_2}\,\frac{\delta y_2}{\delta s_2} + \frac{dz_2}{ds_2}\,\frac{\delta z_2}{\delta s_2} = 0$$

$$\frac{dx_2}{ds_2}\cdot\frac{\delta x_1}{\delta s_1} + \frac{dy_2}{ds_2}\,\frac{\delta y_1}{\delta s_1} + \frac{dz_2}{ds_2}\,\frac{\delta z_1}{\delta s_1} = 0.$$

Selbe geben

$$1 + \frac{dy_2}{dx_2}\,\frac{\delta y_2}{\delta x_2} + \frac{dz_2}{dx_2}\,\frac{\delta z_2}{\delta x_2} = 0$$

$$1 + \frac{dy_2}{dx_2}\,\frac{\delta y_1}{\delta x_1} + \frac{dz_2}{dx_2}\,\frac{\delta z_1}{\delta x_1} = 0.$$

Werden die Grenzcurven durch $y = f(x)$, $z = F(x)$, $y = \varphi(x)$, $z = \Phi(x)$ repräsentirt, so liefern sie

$$\delta y_1 = \alpha\delta x_1 \qquad \delta z_1 = \beta\delta x_1$$
$$\delta y_2 = \gamma\delta x_2 \qquad \delta z_2 = \varepsilon\delta x_2$$

Bezeichnet man die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$, welche aus der Gleichung der Brachystochrone abgeleitet werden sollten, respective mit M und N, so transformiren sich unsere zwei Gleichungen in

$$1 + M\gamma + N\varepsilon = 0$$
$$1 + M\alpha + N\beta = 0.$$

Sie können nur zusammenbestehen, wenn $\gamma = \alpha$ und $\varepsilon = \beta$ ist, und da es keinen halben Cycloidenbogen gibt, der obigen Gleichungen Genüge leisten könnte, so ist die erhaltene Auflösung ganz illusorisch. Wir werden später noch einmal ein ähnliches Resultat einer deutlicheren Discussion unterziehen.

Wird aber die Variation von h in diesem Falle nicht berücksichtiget, so findet man, dass die Brachystochrone auf den beiden

Grenzcurven senkrecht zu stehen hat, ohne dass diese letzteren zwei zu einander parallele Tangenten zuzulassen brauchen, was mit den im dritten Bande des Lehrbuches der höheren Mathematik des Herrn von Burg gewonnenen Resultaten übereinstimmt.

Um dies zu zeigen, nehme ich die Axe der Z als vertical und von O gegen Z als positiv an (Fig. 4). Wird die Grenzordinate Mm durch h vorgestellt, so erhalten wir, sobald der materielle Punkt keine Anfangsgeschwindigkeit erlangt hat, $v = \sqrt{2g\,(h - z)}$ und

$$U = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{h - z}}.$$

Wird der Kürze wegen

$$V = \sqrt{\frac{1 + y'^2 + z'^2}{h - z}}$$

gesetzt, so gestaltet sich die Grenzgleichung wie folgt

$$V\delta x + \frac{dV}{dy'}\,(\delta y - y'\delta x) + \frac{dV}{dz'}\,(\delta z - z'\delta x) = 0$$

oder

$$\left(V - \frac{dV}{dy'}\,y' - \frac{dV}{dz'}\,z'\right)\delta x + \frac{dV}{dy'}\,\delta y + \frac{dV}{dz'}\,\delta z = 0.$$

Da V kein x enthält, so lässt sich zeigen, dass der mit δx multiplicirte Ausdruck constant ist, setzt man ihn gleich c, so gelangt man bei dieser Form von V zu den zwei Gleichungen

$$\frac{dV}{dy'} = cy' \qquad \frac{dV}{dz'} = cz'$$

denen zufolge obige Grenzgleichung in nachfolgende sich verwandelt

$$\delta x + y'\delta y + z'dz = 0.$$

Sie liefert nachfolgende zwei

$$1 + y'\,\frac{\delta y_1}{\delta x_1} + z'\,\frac{\delta z_1}{\delta x_1} = 0 \qquad 1 + y'\,\frac{\delta y_2}{\delta x_2} + z'\,\frac{\delta z_2}{\delta x_2} = 0,$$

denen man auch die Form geben kann

$$1 + m\alpha + n\beta = 0 \qquad 1 + M\gamma + N\varepsilon = 0.$$

Selbe drücken das von Lagrange gefundene Resultat aus, aber diese Deduction kann nicht als richtig angesehen werden, weil die Grösse h keiner Veränderung unterworfen wurde, letztere findet aber

Statt, sobald die Curve *MN* in die ihr sehr nahe liegende *mn* übergeht.

§. 8. Im vierten Bande der alten Turiner Memoiren hat Lagrange dieses Problem von Neuem einer Bearbeitung unterzogen, und gelangte zu Resultaten, die von den Mathematikern als vollkommen richtig angenommen werden.

Die äusserst dunkle Methode, deren er sich bei der Auflösung dieser Aufgabe bedient hatte, werden wir hier verlassen, und nur zeigen, wie man den in den Vorlesungen über Functionenrechnung aufgestellten Begriffen gemäss, zu den von Lagrange in diesem Memoire gewonnenen Grenzgleichungen gelangen kann. Um dies Problem zu lösen, welches wörtlich folgendermassen vorgelegt wurde: „*Etant données d'espèce et de position deux courbes quelconques placées dans un même plan, on demande de trouver un troisième courbe, sur laquelle un corps pésant puisse descendre de l'une à l'autre des deux courbes données dans le plus petit tems possibles*"; wollen wir eine kleine allgemeine Entwickelung voranschicken.

Sei gegeben $U = \int f(x\, y\, y'\, k)\, dx$ unter k eine Grösse verstanden, die von der Ordinate und Abscisse der vorläufig unbekannten unteren Grenze des Integrales abhängt. Man denke sich U werde für $y = \varphi\,(x)$ zu einem Minimum, und diese letztere Function von x gehe über in $y = F\,(x\, i)$, die für $i = 0$ sich auf die ursprüngliche zu reduciren hat; dann sehe man noch x und k als Functionen von i an, und differentiire nach dem variablen Parameter i, so erhält man

$$\frac{dU}{di} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dV}{dx}\frac{dx}{di} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{di} + \frac{dV}{dy'}\frac{dy'}{di} + \frac{dV}{dk}\frac{dk}{di} \right) dx$$

für $i = 0$

$$(\dot{U}) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dV}{dx}\,\dot{x} + \frac{dV}{dy}\,(\dot{y}) + \frac{dV}{dy'}\,(\dot{y})' + \frac{dV}{dk}\,\dot{k} \right) dx$$

oder auch

$$(\dot{U}) = \int_{x_1}^{x_2} \dot{x}\,\frac{dV}{dx}\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dV}{dy}\,\dot{y} + \frac{dV}{dy'}\,\dot{y}' \right) dx + \dot{k} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dk}\,dx.$$

Man bemerke, dass sobald k als Function von i angesehen wird, selbe nach dieser Grösse differentiirt, hernach $i = \theta$ gesetzt wird, $\dot{k}$ einer Constanten gleich wird; das nämliche gilt in Bezug auf $\dot{x}$, die vorige Gleichung sollte demnach folgendermassen geschrieben werden

$$(\dot{U}) = \dot{x}\,(V)_{x_1}^{x_2} + \dot{k}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dk}\,dx + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{dV}{dy}\,\dot{y} + \frac{dV}{dy'}\,\dot{y}'\right)dx.$$

Man gibt ihr aber immer die Gestalt

$$(\dot{U}) = (V\dot{x})_{x_1}^{x_2} + \dot{k}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dk}\,dx + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{dV}{dy}\,\dot{y} + \frac{dV}{dy'}\,\dot{y}'\right)dx.$$

Die partielle Integration transformirt sie in

$$(\dot{U}) = (V\dot{x})_{x_1}^{x_2} + \dot{k}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dk}\,dx + \left(\frac{dV}{dy'}\,\dot{y}\right)_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{dV}{dy} - \left(\frac{dV}{dy'}\right)'\right\}\dot{y}\,dx.$$

Die Bedingungsgleichung des Maximums oder Minimums gibt integrirt $y = f\,(x\;a_1\;a_2)$ und die Constanten a_1 a_2 sollten derart bestimmt werden, auf dass die Gleichung

$$(V\dot{x})_{x_1}^{x_2} + \dot{k}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dV}{dk}\,dx + \left(\frac{dV}{dy'}\,\dot{y}\right)_{x_1}^{x_2} = \theta$$

identisch stattfinde.

Wie mit dieser Gleichung im Allgemeinen zu verfahren wäre, damit $(\dot{U})$ verschwinde, hat Lagrange nicht angegeben, die specielle Anwendung, die er von ihr bei dem Probleme der Brachystochrone machte, lässt schliessen, dass seine Ideen darüber folgende waren:

Man soll $\frac{dV}{dk}$ als reine Function von $x\;k\;a_1\;a_2$ ausdrücken, sei diese gleich m, hierauf bilde man $\int m dx = n$, so wird $\dot{U}$ sich verwandeln in

$$(\dot{U}) = (V\dot{x})_{x_1}^{x_2} + \dot{k}\,(n)_{x_1}^{x_2} + \left[\frac{dV}{dy'}\,((\dot{y}) - y'\dot{x})\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Da k als Function der unteren Grenze des Integrales vorausgesetzt wurde, also $k = \varphi\,(x_1\,y_1)$ ist, so erhält man $\dot{k} = A\dot{x}_1 + B\,(\dot{y}_1)$

$$(\dot{U}) = (V\dot{x})_{x_1}^{x_2} + \Big\{A\dot{x}_1 + B\,(\dot{y}_1)\Big\}\,(n)_{x_1}^{x_2} + \Big[\frac{dV}{dy'}\Big\{(\dot{y}) - y'\dot{x}\Big\}\Big]_{x_1}^{x_2}.$$

Wird die erste Grenzcurve durch $y = F\,(x)$, die zweite durch $y = \Phi\,(x)$ repräsentirt, so würde er obige Gleichung zerlegen in

$$(\dot{U}) = \Big[V\dot{x} + \dot{x}\,\frac{dV}{dy'}\Big\{\Phi'\,(x) - y'\Big\}\Big]^{x = x_2} -$$

$$- \Big\{V\dot{x} + \Big\{A\dot{x} + BF'(x)\,\dot{x}\Big\}\,(n)_{x_1}^{x_2} + \dot{x}\,\frac{dV}{dy'}\,(F'(x) - y')\Big\}_{x = x_1}$$

die verschwindet für

$$V + \frac{dV}{dy'}\Big\{\Phi'\,(x) - y'\Big\} = 0$$

$$V + \Big\{A + BF'\,(x)\Big\}\,(n)_{x_1}^{x_2} + \frac{dV}{dy'}\Big\{F'\,(x) - y'\Big\} = 0,$$

wobei zu bemerken, dass die Werthe von V, $\dfrac{dV}{dy'}$ und y' in obigen Gleichungen einander nicht gleich sind.

§. 9. Wir wollen jetzt das im vorigen Paragraphe erwähnte Problem, den eben auseinandergesetzten Ideen gemäss, auflösen.

(Fig. 5.) Sei die Gleichung von PSR $b = \varphi\,(a)$ die von QTU $m = \psi\,(l)$; man betrachte ein Mobile μ, welches von H nach S frei fällt und in diesem Punkte die Geschwindigkeit $v_1 = \sqrt{2gh}$ erlangt, bei fortgesetzter Bewegung von S nach T wird es im Punkte μ die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2g\,(y - b) + 2gh}$, das heisst $v = \sqrt{2g}\,\sqrt{y + h - b}$ erlangen. Ist h kleiner als b, dann ist $h - b$ negativ, gleich $-k$ und $v = \sqrt{2g\,(y - k)}$.

Sind die Coordinaten von S $x = a$, $y = b$, die von F $x = l$, $y = m$, so ist die Formel, welche zu einem Minimum werden soll, ausgedrückt durch

$$U = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_a^l \frac{dx\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y - k}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$V = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y-k}},$$

so ist das erste Integrale von

$$\frac{dV}{dy} - \left(\frac{dV}{dy'}\right)' = 0$$

durch

$$V = \frac{dV}{dy'}\, y' + \frac{1}{\sqrt{2a_1}}$$

repräsentirt. Die Entwickelung dieser Gleichung führt zu $\sqrt{2a_1} = \sqrt{1+y'^2}\,\sqrt{y-k}$, woraus sich unmittelbar

$$dx = \frac{dy\,(y-k)}{\sqrt{2a_1\,(y-k) - (y-k)^2}}$$

ergibt.

Die Grösse V ist in Beziehung auf y und k so zusammengesetzt, dass die Gleichung

$$\frac{dV}{dy} = -\,\frac{dV}{dk}$$

stattfindet; vermöge der Bedingungsgleichung des Minimums ist dann auch

$$\frac{dV}{dk} = -\left(\frac{dV}{dy'}\right)'.$$

Die im vorigen Paragraphe gefundene Grenzgleichung verwandelt sich in

$$(\dot{U}) = \left(V - \frac{dV}{dy'}\, y'\right)\dot{x} - \dot{k}\int\left(\frac{dV}{dy'}\right)' dx + \frac{dV}{dy'}\,(\dot{y}).$$

Sie gibt gehörig reducirt

$$(\delta U) = \frac{\delta x}{\sqrt{2a_1}} - \delta k \cdot \frac{y'}{\sqrt{2a_1}} + \frac{y'}{\sqrt{2a_1}}\,(\delta y)$$

und zeigt, dass $(\delta U)_a^l$ verschwindet sobald die Gleichung

$$\Big\{\delta x - y'\,\delta k + y'\,(\delta y)\Big\}_a^l = 0$$

besteht.

Wird der aus der Gleichung der Cycloide abgeleitete Werth von y' für $x = a$ gleich B_1 und für $x = l$ gleich M_1 gesetzt, so muss man, um zu Lagrange's Endresultaten zu gelangen, obige Gleichung in nachfolgende verwandeln

$$[\delta x + y' (\delta y)]^l - [\delta x - (y')^l_a \, \delta k + y' (\delta y)]_a = 0$$

oder anders geschrieben

$$[\delta l + M_1 \, \delta m] - [\delta a - \delta k \, (M_1 - B_1) + B_1 \, \delta b] = 0.$$

Ich glaube, dass der Theorie der bestimmten Integrale zufolge der mit δk multiplicirte Theil nur unter der Form $M_1 - B_1$ erscheinen darf, Lagrange aber gab ihm die Gestalt $B_1 - M_1$ und erhielt auf diese Art die Gleichung

$$[\delta l + M_1 \, \delta m] - [\delta a - \delta k \, (B_1 - M_1) + B_1 \, \delta b] = 0,$$

die er in nachfolgende zwei zerfällte

$$\delta l + M_1 \, \delta m = 0$$
$$\delta a - \delta k \, (B_1 - M_1) + B_1 \, \delta b = 0.$$

Es werden nun in diesem Memoire zwei Suppositionen gemacht, die erste von ihnen heisst $h = b$, dann ist $k = 0$, $\delta k = 0$ und obige Grenzgleichungen geben

$$\delta l + M_1 \, \delta m = 0 \qquad \delta a + B_1 \, \delta b = 0$$

das heisst, wenn der materielle Punkt von der Abscissenaxe frei herabfällt, so schneidet er beide Curven unter einem rechten Winkel.

Dies ist im Allgemeinen ganz unmöglich, denn das erste Element der Cycloide ist vertical, ihre Basis ist horizontal; der Anfangspunkt der Bewegung zwischen S und T ist zu gleicher Zeit der erste Punkt der Cycloide, und seine Tangentenlinie muss parallel mit der Ordinatenaxe Oy sein, daher muss die Tangentenlinie an die erste Grenzcurve parallel mit OX sein.

Dann macht Lagrange die Supposition, dass die initiale Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers im Punkte S der Nulle gleich ist; er setzt zu dem Ende $h = 0$, wodurch $k = b$ und $\delta k = \delta b$ wird. Die Grenzgleichungen verwandeln sich in diesem Falle in

$$\delta a + M_1 \, \delta b = 0 \qquad \delta l + M_1 \, \delta m = 0$$

und zeigen, dass die Cycloide mit horizontaler Basis die Grenzcurven unter rechten Winkeln zu schneiden habe, und zwar soll die Brachystochrone in solchen Punkten von den Grenzcurven geschnitten werden, auf dass die an diese Curven in den Durchschnittspunkten errichteten Tangentenlinien zu einander parallel seien. Hieraus folgt aber auch, dass die an die Cycloide gezogenen zwei Tangentenlinien mit einander parallel laufen müssen, da aber ein halber Cycloidenbogen kein paar solcher Tangentenlinien besitzt, so ist die Auflösung des Problemes in diesem Falle ganz illusorisch. Die eben gemachte Bemerkung behält ihre volle Giltigkeit in Bezug auf die Auflösung des Herrn von Ettingshausen.

Endlich verdient noch eine Thatsache eine kleine Besprechung, sie bezieht sich auf die allgemeinsten Resultate der Grenzgleichungen, welche Lagrange in der mehrmals erwähnten Abhandlung gewonnen und aus denen sich folgender Satz ergeben würde.

Fallt der materielle Punkt von der Abscissenaxe frei herab, so schneidet die von ihm beschriebene Brachystochrone die Grenzcurven unter rechten Winkeln; sobald aber der materielle Punkt von einer grösseren oder geringeren Höhe herabfällt, findet dieses für die erste Grenzcurve nicht mehr Statt.

Ich glaube, dass, wenn dies auch gezeigt werden kann, Niemand mehr Zweifel über die Unrichtigkeit der mittelst der Grenzgleichungen gewonnenen Resultate haben wird.

Wir fanden früher ganz allgemein

$$\delta l + M_1\, \delta m = 0 \qquad \delta a - \delta k\, (B_1 - M_1) + B_1\, \delta b = 0.$$

Lagrange setzt h als irgend eine Function von a und b voraus, demnach ist $h = \varphi\,(a\,b)$ und $k = b - \varphi\,(a\,b)$, woraus sich durch Differentiation nach der Charakteristik δ, $\delta k = \delta b - G\delta a - H\delta b$ ergibt.

Unsere Grenzgleichungen verwandeln sich in

$$\delta l + M_1\, \delta m = 0$$
$$\delta a\, [1 + G\,(B_1 - M_1)] + \delta b\, [M_1 + H\,(B_1 - M_1)] = 0.$$

Die Curve PSR gibt für den Punkt S, $\delta b = \varepsilon \delta a$ und die Linie LTU für F die Gleichung $\delta m = \eta\, \delta l$, demnach erhalten wir im Allgemeinen folgende zwei Grenzgleichungen

$$1 + G\,(B_1 - M_1) + \varepsilon\, [M_1 + H\,(B_1 - M_1)] = 0$$
$$1 + \eta\, M_1 = 0.$$

Wird hier $G = 0$ und $H = 1$ gesetzt, was eben heisst den materiellen Punkt von der Abscissenaxe frei fallen zu lassen, so geben obige Gleichungen nachfolgende zwei $1+\varepsilon B_1=0$, $1+\eta M_1=0$. Wenn aber h nicht gleich b ist, dann drückt die erste von den früher gewonnenen Gleichungen die Bedingung des Senkrechtstehens nicht mehr aus und dies war eben zu zeigen.

Die Grenzordinate müsste auch noch in einem anderen Falle einer Variation unterworfen werden, und dies ist derjenige, in welchem die Mathematiker die Variation von x mit vollem Rechte nicht berücksichtigen. Sind nämlich zwei zur Ordinatenaxe parallele Linien als Grenzcurven gegeben, so variirt auch die Anfangsordinate bei dem Übergange der Curve MN in die ihr unendlich nahe mn (Fig. 6).

Bezeichnet man die Ordinate des Punktes, von welchem aus die Bewegung ausgehen soll, mit A, so ist die Formel, welche zu einem Minimum werden soll, repräsentirt durch

$$U=\int_a^b \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{A-y}}=\int_a^b V dx$$

Hieraus ergibt sich

$$\delta U=\left(\frac{dV}{dy'}\delta y\right)_a^b+\delta A\int_a^b \frac{dV}{dA}dx+\int_a^b\left\{\frac{dV}{dy}-\left(\frac{dV}{dy'}\right)'\right\}dx$$

die für

$$V=\frac{dV}{dy'}y'+\frac{1}{\sqrt{2a_1}}$$

nachfolgende liefert

$$\delta U=\left(\frac{dV}{dy'}\delta y\right)_a^b-\delta A\int_a^b\left(\frac{dV}{dy'}\right)'dx.$$

Bezeichnet man den Werth von

$$\frac{dV}{dy'}=\frac{y'}{\sqrt{2a_1}}$$

für $x=b$ mit M_1 und für $x=a$ mit B_1, so verwandelt sich obige Grenzgleichung in

$$(\delta U)_a^b=M_1\,\delta y_b-B_1\,\delta y_a-\delta A\{M_1-B_1\}.$$

Es ist aber $\delta A=\delta y_a$ demnach $(\delta U)_a^b=M_1\,\delta y_b-\delta y_a\,M_1$ und diese Gleichung verschwindet unabhängig von den Variationen des y an bei den Grenzen für $M_1=0$.

Wir erhalten auf diese Art nur eine Bedingungsgleichung für die Grenzen der Brachystochrone, die aussagt, dass die Cycloide die zweite senkrechte unter einem rechten Winkel schneidet. Übrigens lehrt die Anschauung, dass in diesem Falle unendlich viele Brachystochronen zwischen $L\,l$ und $L'\,l'$ construirt werden können, die $L'\,l'$ unter rechten Winkeln schneiden; die erste Grenzlinie $L\,l$ repräsentirt in diesem Falle die gemeinschaftliche Tangentenlinie an alle Ausgangspunkte der Bewegung. Lacroix hat in seinem grossen Werke unter Differential- und Integralrechnung bei der Behandlung dieser Aufgabe die Variation von A nicht berücksichtiget und gelangte auf diese Art zu der Grenzgleichung

$$(\delta U)_a^b = M_1\,\delta y_b - B_1\,\delta y_a,$$

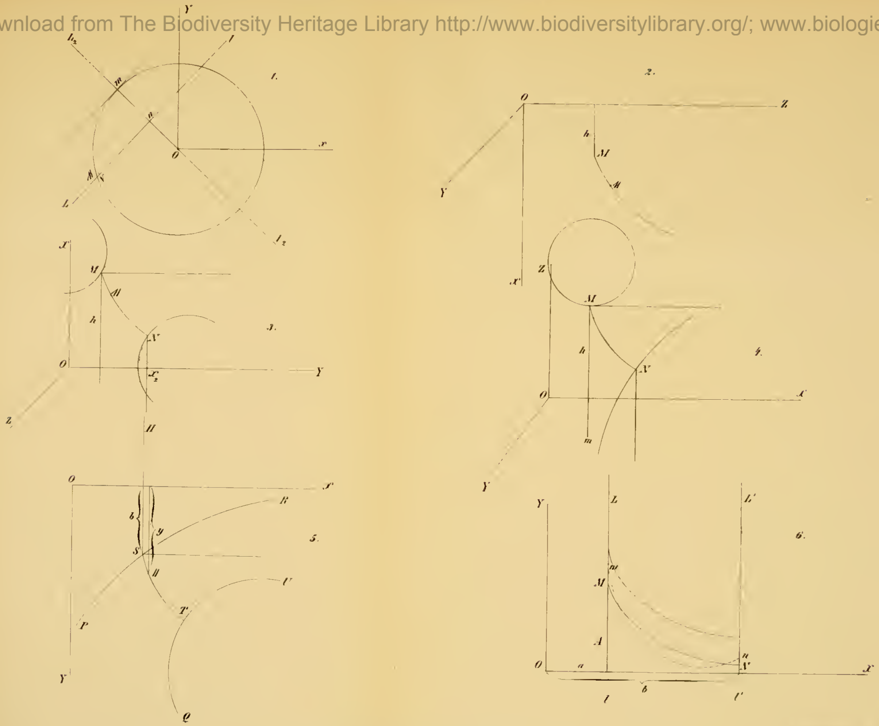
die ihm nachfolgende zwei $M_1 = 0$, $B_1 = 0$ lieferte. Jedermann sieht aber, dass es keinen halben Cycloidenbogen einer und derselben Brachystochrone gebe, welcher obigen zwei Gleichungen Genüge leisten könnte.

Man mag daher die Anfangsordinate variiren oder nicht variiren lassen, in keinem Falle gelangt man zu einem befriedigenden Endresultate.

Zweck dieser Abhandlung ist zu zeigen, welches die wahre Theorie der Lagrange'schen Darstellungsweise der Variationsrechnung im zweiten Bande der Turiner Memoiren ist, dann, dass die hier gegebene für die analytische Mechanik, in welcher die Coordinaten eines Punktes stets als Functionen der Zeit betrachtet werden, von Nutzen ist. Weiters wurde nachgewiesen, dass die Grenzgleichungen, sobald die Grenzwerthe des Integrales unbekannt sind, keineswegs zur Bestimmung der Integrationsconstanten hinreichen, endlich gezeigt, dass sie in dem Falle, wenn unter dem Integralzeichen nur die erste derivirte von y in Bezug auf x vorkömmt, auch nur scheinbar zu dieser Bestimmung genügen; da Aufgaben mittelst ihnen höchst mangelhaft aufgelöset werden.

Dann wurde gezeigt warum die Herren von Ettingshausen und Burg, von den nämlichen Suppositionen ausgehend, bei dem Probleme der Brachystochrone zu divergenten Endresultaten gelangt sind; und zuletzt, wenn ich nicht irre, nachgewiesen, dass die von Lagrange gegebene Auflösung dieses Problemes im vierten Bande der alten Turiner Memoiren unrichtig ist.

Hieraus ziehe ich den Schluss, dass es vortheilhafter sein dürfte, in Zukunft die Variationsrechnung als denjenigen Theil der Integralrechnung zu betrachten, welcher sich mit der Bestimmung der grössten und kleinsten Werthe bestimmter Integrale (diese letzteren nicht in der gewöhnlichen Bedeutung des Wortes genommen) beschäftiget und von einem Maximum oder Minimum solcher unbestimmter Integralformeln, da sie im Grunde genommen eines solchen Zustandes nicht fähig sind, ganz abstrahirt.



Aus d. k. k. H

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1859

Band/Volume: 34

Autor(en)/Author(s): Löffler Alexander

Artikel/Article: Über die Methode, die grössten und kleinsten Werthe unbestimmter Integralformen zu finden. (Mit 1 Tafel). 227-254