Beitrag zum Probleme der Brachystochrone.

Von **Alexander Löffler.**

Die Methoden der Variationsrechnung, die Maxima und Minima der Integralformeln zu finden, haben hauptsächlich darum so viel Verbreitung gefunden, weil sie nicht nur die gesuchten Beziehungen zwischen den absolut und relativ Veränderlichen angeben, sondern auch verschiedene Mittel liefern, die Integrationsconstanten zu bestimmen. Diese Bestimmung geschieht mit Hilfe der Grenzgleichungen. Auf den Umstand, dass ihre Aufstellung öfters der Natur der Aufgabe widerspricht oder aus anderen Gründen unzulässig ist, schien man bisher nicht zu achten.

Das Problem der Brachystochrone, zwischen zwei ihrer Lage nach bekannten Linien, liefert einen Beweis für die Richtigkeit der so eben ausgesprochenen Behauptung. Es ist allen Analysten wohlbekannt, dass Lagrange das Problem der Brachystochrone zwischen zwei Curven aufstellte und löste. Die ersten Resultate, zu denen er im zweiten Bande der *Miscellanea Taurinensia* gelangte, schienen nicht den Beifall aller Analysten gefunden zu haben. Unter denjenigen, welche seine Resultate einer Kritik unterzogen, ist Borda hervorzuheben, da selbst Lagrange sich die Mühe nahm seine Resultate mit denen Borda's in gewisser Beziehung in Übereinstimmung zu bringen. *Miscellanea Taurinensia* Bd. 4.

Von diesem Zeitpunkte an unterlagen die Grenzgleichungen keinen Angriffen mehr. In einer Abhandlung, welche sich in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften für 1859 abgedruckt befindet, habe ich versucht zu zeigen, dass die Grenzgleichungen im allgemeinsten Falle die nothwendige Anzahl von Bedingungsgleichungen nicht geben.

Der Grundsatz, auf den ich mich stütze, ist: „dass die Differentialien und Variationen an den Grenzen ein und dasselbe sind".

Die consequente Durchführung dieser Anschauungsweise gibt mir vier Grenzgleichungen, wenn auch die Differentialgleichung des Minimums von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung ist. In dieser Abhandlung habe ich auch gezeigt, dass die Resultate des Lagrange in Beziehung auf die Brachystochrone zwischen zwei Linien nicht in allen Punkten als befriedigend zu betrachten sind. Lagrange ging bei seinen Untersuchungen im vierten Bande der *Miscellanea Taurinensia* von der Idee aus, dass das Bewegliche im Anfangspunkte der Bewegung schon eine Anfangsgeschwindigkeit besitze und leitete hieraus als speciellen Fall denjenigen ab, in welchem diese Anfangsgeschwindigkeit der Nulle gleich ist. Diese letztere Auffassung wurde von den meisten Analysten welche sich mit diesem Gegenstande beschäftigten, adoptirt.

Es wäre überflüssig alle die Werke zu citiren, welche eine Lösung der Brachystochrone zwischen zwei Linien, falls das Mobile keine Anfangsgeschwindigkeit besitzt, geben, da die meisten von ihnen allen Analysten wohlbekannt sind. Ich beschränke mich daher in diesem Aufsatze darauf, nachzuweisen, dass der Ausgangspunkt der Bewegung der Brachystochrone nicht unbestimmt gelassen werden darf. Die Ursache davon ist in der Zusammensetzung der Grenzgleichungen zu suchen. Aus nachfolgendem wird man ersehen, dass die Aufsuchung der Brachystochrone zwischen zwei ihrer Lage nach bekannten Linien nicht zulässig ist. Ich beginne mit der Untersuchung des einfachsten Falles, welcher eintritt, falls die Grenzlinien durch zwei parallele und auf der Abscissenaxe senkrechte Linien repräsentirt werden. Wir betrachten zu dem Ende das bestimmte Integrale

$$U = \int_a^b dx f(xyy'),$$

welches die variirte Gleichung

$$\delta U = \left(\frac{dV}{dy'}\delta y\right)_a^b + \int_a^b \delta y\, dx \left[\frac{dV}{dy} - \left(\frac{dV}{dy'}\right)'\right]$$

liefert. Nach Lagrange müssen zur Bestimmung der Integrationsconstanten die zwei Gleichungen

$$\left(\frac{dV}{dy'}\right)_a = 0 \qquad \left(\frac{dV}{dy'}\right)_b = 0$$

aufgestellt werden, falls die Grenzordinaten nicht gegeben sind. Es kann nun $\frac{dV}{dy'}$ in Beziehung auf $x\,y\,y'$ so zusammengesetzt sein, dass $\frac{dV}{dy'}$ für $x = a$ sich nicht in eine bestimmte Function von $a\ a_1\ a_2$ verwandelt, sondern den Werth unendlich annimmt; somit untauglich wird zur Bestimmung einer Constanten und zur Verification der Gleichung $\delta U = 0$. Ein Beispiel liefert der Ausdruck

$$U = \int_a^b dx \left[y'^2 + \frac{y}{a-x}\right]$$

Wird in diesem Falle der Grenzwerth des y für $x = a$ unbestimmt gelassen, so verwandelt sich, dem ersten Integrale der Bedingungsgleichung zufolge der ausserhalb des Integrales befindliche Ausdruck in

$$\frac{dV}{dy'} = a_1 + \frac{1}{a-x}$$

und wird für $x = a$ unendlich gross.

Auch kann $\frac{dV}{dy'}$ in Beziehung auf $x\,a_1\,a_2$ so zusammengesetzt sein, dass der Natur einer vorgelegten Aufgabe zufolge, dieser Ausdruck für $x = a$ nicht der Nulle gleich gesetzt werden darf, sondern unendlich gross angenommen werden muss.

Dieser Fall tritt uns bei der Brachystochrone entgegen. Für diese Linie ist das Integrale

$$U = \int_a^b \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{A-y}}$$

zu einem Minimum zu machen. Die Bedingungsgleichung des Minimums liefert

$$\sqrt{2a_1} = \sqrt{A-y}\sqrt{1+y'^2}$$

der zufolge sich $\frac{dV}{dy'}$ in $\frac{dV}{dy'} = \frac{1}{\sqrt{2a_1}}\,y'$ verwandelt.

Vorausgesetzt, dass die Gleichung der Cycloide allgemein $y' = \pi\,(x\,a_1\,a_2)$ liefert, so müssen die Constanten nach Lagrange's Methode mittelst der zwei Gleichungen

$$\pi\,(a\,a_1\,a_2) = 0 \qquad\qquad \pi\,(b\,a_1\,a_2) = 0$$

bestimmt werden.

Die zweite von ihnen ist zulässig, die erste aber nicht. Man muss vielmehr, weil das erste Element der Cycloide mit der Verticalen zusammenfallen muss und nicht horizontal sein kann, die Bestimmung der Constante a_2 mittelst der Gleichung $\pi\,(a\,a_1\,a_2) = \infty$ vornehmen. Unter diesen Umständen verschwindet aber δU nicht. — Es ist vielmehr $\delta U = \infty$ für $x = a$ und die Grundbedingung des Problemes wird nicht in ihrem vollen Umfange erfüllt. — Es bleibt uns jetzt noch übrig in Kürze den Grund anzugeben, warum die bis jetzt erhaltenen Resultate in Beziehung auf die Brachystochrone zwischen zwei gegebenen Curven $y = \varphi\,(x)$ $y = \psi\,(x)$ ungenau ausfallen mussten. Bei diesem Problem ist bekanntlich in dem Integrale

$$U = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{A - y}}$$

die Anfangsordinate A einer Variation zu unterwerfen. Auf diese Art gelangt man der Auflösungsmethode aller Analysten folgend zu den zwei Gleichungen

$$\delta x_1 + y'\delta y_1 = 0 \qquad\qquad \delta x_2 + y'\delta y_2 = 0$$

in welchen y' als Function von x mittelst der Gleichung der Brachystochrone auszudrücken, und der Grösse x dann der Werth x_2 beizulegen ist. Man kann annehmen, dass die Gleichung der Cycloide zur Relation $y' = \pi\,(x\,a_1\,a_2)$ führt. Die Grenzcurven geben, da man die Differentialien mit den Variationen identificirt,

$$\delta y_1 = \varphi'\,(x_1)\,\delta x_1 \qquad\qquad \delta y_2 = \psi'\,(x_2)\,\delta x_2$$

und man erhält auf diese Art zur Bestimmung der Constanten und der Grenzwerthe des Integrales folgende vier Gleichungen:

$$1 + \varphi'\,(x_1)\,\pi\,(x_2\,a_1\,a_2) = 0 \qquad 1 + \psi'\,(x_2)\,\pi\,(x_2\,a_1\,a_2) = 0$$
$$\varphi\,(x_1) = F\,(x_1\,a_1\,a_2) \qquad\qquad \psi\,(x_2) = F\,(x_2\,a_1\,a_2)$$

unter $y = F\,(x_1\,a_1\,a_2)$ die Gleichung der Cycloide verstanden.

Diese vier Gleichungen können nur bestehen für $\varphi'(x_1) = \psi'(x_2)$. Aus der Natur der Cycloide ergibt sich dann, dass die Grenzcurven so gelegen sein müssten gegen die Coordinatenaxen, dass auch $\varphi(x_1) = \psi(x_2)$ sei. Versucht man aber in diesem Falle die Bahn des Projectiles zu verzeichnen, welche obigen Bedingungen genügt, so sieht man alsogleich ein, dass diese Resultate der kürzesten Bewegungsbahn nicht entsprechen.

In der That repräsentiren unsere Grenzgleichungen folgende Theoreme:

1. Theorem. Das letzte Element hat eine senkrechte Richtung zu der Tangente, welche im Anfangspunkte der Bewegung an die erste Grenzlinie construirt wird.

2. Theorem. Das letzte Element der Cycloide steht senkrecht auf der im Anfangepunkte der Bewegung an die zweite Grenzlinie construirten Tangente.

Um die Bahn des Beweglichen verzeichnen zu können, ist es vor allem anderen nothwendig zwei Punkte der Cycloide mit horizontaler Basis

$$x + a_2 = a_1 \operatorname{Arc\,Cos} \frac{a_1 - (A-y)}{a_1} - \sqrt{2a_1(A-y) - (A-y)^2}$$

anzugeben, deren Tangentenlinien zu einander parallel laufen, dann zwei Punkte, deren jeder auf einer anderen Grenzlinie situirt ist, die von der Abscissenaxe gleich weit entfernt sind, und deren Tangentenlinien zu einander parallel laufen, gleichzeitig aber auf den zwei Tangentenlinien der Cycloide senkrecht stehen.

Aus der Natur der Cycloide ergibt sich, dass die auf ihr gelegenen zwei Punkte gleich hoch sein müssen und jeder in einem anderen Aste situirt ist.

Fig. 1 repräsentirt die von der Analysis gegebene Cycloide $M \lambda N$.

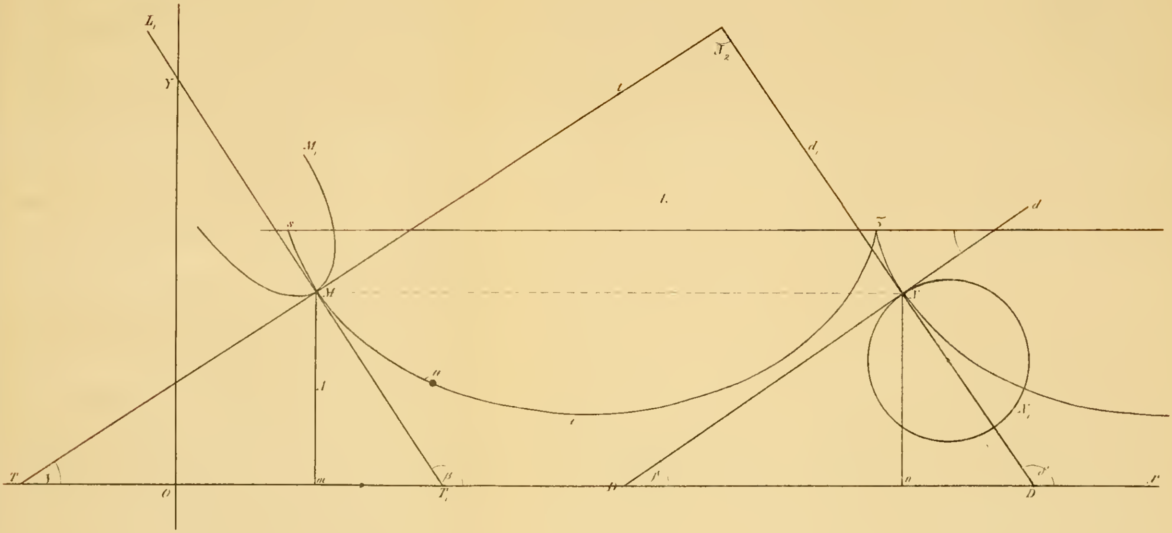
M, N sind die zwei Punkte der Cycloide, deren Tangenten $T_1\,t_1$ $D_1\,d_1$ parallel sind. $T\,t$ $D\,d$ hingegen sind die Tangentenlinien der Grenzcurven in den Durchschnittspunkten dieser Linien mit der Brachystochrone, welche auch parallel sein müssen. Bei dieser Darstellung wurde angenommen, dass das erste Element der Bewegung nicht mit dem Scheitel S der Cycloide, deren Tangentenlinie vertical ist, zusammenfällt. Dies eben entspricht der Anschauungsweise Borda's, Lagrange's und Poisson's.

Borda's Abhandlung befindet sich in den Pariser Mémoiren für das Jahr 1767 und hatte in Beziehung auf die Brachystochrone den Zweck zu zeigen, dass die von Lagrange im zweiten Bande der *Miscellanea Taurinensia* gegebene Auflösung dieses Problemes in Beziehung auf die Grenzgleichung des Anfangspunktes der Bewegung nicht zulässig sei, weil selbe das Senkrechtstehen auf der ersten Grenzcurve bedingt. Poisson aber bemerkt in den Pariser Memoiren für 1833, dass es Borda gelungen sei, die hier sich entgegenstellende Schwierigkeit zu überwinden. Borda übersah aber, dass seine Auflösung, welche durch die Fig. 1 repräsentirt wird, im Allgemeinen bei beliebiger Lage der Grenzlinien gegen die Coordinatenaxen auch nicht zulässig ist, weil in diesem Falle der materielle Punkt (μ) sich auf eine grössere Höhe (σ) erheben müsste, als die ist (M), von welcher er gefallen, was gegen die Grundsätze der Mechanik verstösst.

Übrigens ist auf den Umstand wohl zu achten, dass zur Bestimmung der fünf Unbekannten a_1 a_2 x_1 x_2 A die gegebenen vier Grenzgleichungen nicht hinreichen, denn wenn es uns auch gelingen würde, die Grössen a_1 a_2 x_1 x_2 mittelst der bestimmten Parameter, welche in den Gleichungen der Grenzlinien vorkommen, auszudrücken, so würde in einer, oder in einigen, Grenzgleichungen noch die unbekannte Grösse A vorkommen.

Die Gleichung an der unteren Grenze $1+\varphi'(x_1)\pi(x_2\, a_1\, a_2)=0$ ist hauptsächlich darum als unbrauchbar anzusehen, weil sie nicht anzeigt, dass das erste Element der Bewegung der Cycloide mit horizontaler Basis vertical ist. Wollte man aber dies als selbstverständlich voraussetzen, und diese Thatsache in Verbindung bringen mit den vier früher erörterten Grenzgleichungen, so käme man zu dem Schlusse, dass das letzte Element der Brachystochrone auch vertical ist.

Bei beliebiger Lage der Grenzlinien ist es nicht möglich diese fünf Bedingungen mit den Principien der Mechanik in Übereinstimmung zu bringen, nur wenn die Grenzlinien zwei tiefste Punkte besitzen, die in einer Horizontalen gelegen sind, kann öfters die Lösung in allen Punkten als befriedigend angesehen werden.


I.

Hieraus lässt sich mit Bestimmtheit der Schluss ziehen, dass der Ausgangspunkt der Bewegung im Allgemeinen nicht unbestimmt gelassen werden darf.

Ist aber x_1 gegeben, dann ist es auch A wegen der ersten Grenzgleichung $y = \varphi(x)$. Die Variation von A so wie die von x_1 ist der Nulle gleich; zur Bestimmung des Halbmessers a_1, des Erzeugungskreises der Cycloide und der Abscisse x_2 dienen die zwei Gleichungen

$$1 + \psi'(x_2)\,\pi(x_2\, a_1\, a_2) = 0$$

$$\psi(x_2) = F(x_2\, a_1\, a_2)$$

während a_2 aus der Gleichung $A = F(x_1\, a_1\, a_2)$ ermittelt wird. Dieses Resultat kann als strenge richtig angesehen werden, da es sich auch mit Hilfe der Synchrone Bernoulli's beweisen lässt.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1860

Band/Volume: 41

Autor(en)/Author(s): Löffler Alexander

Artikel/Article: Beitrag zum Probleme der Brachystochrone. 53-59