

*Über die directe Construction der schiefaxigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln.*

Von **Rudolf Niemtschik**,

Assistenten der darstellenden Geometrie am k. k. polytechnischen Institute in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

In der Abhandlung „Über die directe Constructionsmethode der verticalaxigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln“ (Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXVIII, Nr. 24, S. 231) wurde bereits bemerkt, dass die schiefaxigen Krystallgestalten auf ähnliche Weise, wie die verticalaxigen aus den Kantenwinkeln bestimmt werden können, indem man nämlich zuerst mittelst einer Kugel eine Ecke der betreffenden Gestalt und dann mittelst der Ecke die Krystallform selbst construirt. Die dort erwähnten Modificationen, welche bei der Construction der schiefaxigen Krystallformen eintreten, werden durch den Umstand herbeigeführt, dass man den schiefaxigen Gestalten (mit Ausnahme einiger Prismen) keine berührende Kugel einschreiben kann, was bei allen verticalaxigen Gestalten möglich ist.

Diese Modificationen werden nun hier näher erörtert. Da jedoch alle schiefaxigen Krystallgestalten auf die nämliche Weise wie das Hemiorthotyp und das Anorthotyp aus den Kantenwinkeln gezeichnet werden können, so erübrigt hier blos die Construction der beiden genannten Gestalten vollständig durchzuführen.

§. 1. **Construction des Hemiorthotypes (deltoidische Pyramide).**

Zur Bestimmung eines Hemiorthotypes ist die Grösse dreier Kanten erforderlich.

Es seien zu diesem Behufe  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  die drei Winkel der Kanten  $aS$ ,  $bS$ ,  $cS$  des Hemiorthotypes  $Sabcd\sigma$  Taf. I, Fig. 7, gegeben. Ferner sei der Winkel der Kante  $bS$  gleich dem der Kante  $dS$ , mithin  $aSc\sigma$  die Symmetrie-Ebene der Gestalt.

Aus diesen Stücken kann nun, wie die folgende Betrachtung lehrt, die Ecke  $Sabcd$  und mittelst dieser dann das Hemiorthotyp selbst leicht construirt werden.

Legt man durch die eine von den beiden gleichen Axenkanten  $Sb$  oder  $Sd$  eine Ebene, welche den Neigungswinkel  $K_2$  der zwei Ebenen, durch deren Kante sie geht, halbirt und bringt die Halbierungsebene zum Durchschnitte mit der Ebene  $aSc\sigma$ ; so erhält man die Gerade  $oS$ , deren Punkte von den vier Ebenen  $aSb$ ,  $bSc$ ,  $cSd$  und  $dSa$  gleiche Abstände haben.

Jeder Punkt der Halbierungsebene des Neigungswinkels zweier Ebenen steht nämlich von den beiden den Neigungswinkel bildenden Ebenen gleich weit ab. Nun liegt die Gerade  $oS$  in der Halbierungsebene des Winkels  $K_2$  und zugleich in der Ebene  $aSc\sigma$ , welche die Kantenwinkel  $K_1$  und  $K_3$  halbirt, folglich muss ein jeder Punkt der Geraden  $oS$  von allen vier die genannten Winkel einschliessenden Ebenen  $aSb$ ,  $bSc$ ,  $cSd$  und  $dSa$  gleiche Abstände haben.

Die Gerade  $oS$  fällt jedoch mit der schiefen Axe  $S\sigma$  nicht zusammen.

Fällt man von einem beliebigen Punkte  $o$  der Geraden  $oS$  auf eine von den Ebenen  $aSb$ ,  $bSc$ ,  $cSd$  und  $dSa$ , etwa auf die Ebene  $aSb$  das Perpendikel  $om$ , welches die Ebene  $aSb$  im Punkte  $m$  trifft, und beschreibt von  $o$  aus mit dem Halbmesser  $om = R$  eine Kugel, so wird diese die Ebene  $aSb$  im Punkte  $m$ , aber auch zugleich die drei Ebenen  $bSc$ ,  $cSd$  und  $dSa$  berühren.

Die Berührungspunkte der Kugel mit den Ebenen  $bSc$ ,  $cSd$  und  $dSa$  seien der Reihe nach mit  $n$ ,  $p$ ,  $q$  bezeichnet.

Wegen der gleichen Neigung der Ebenen  $aSb$  und  $aSd$ , so wie jener der Ebenen  $bSc$  und  $cSd$  gegen die Ebene  $aSc\sigma$  haben die Punkte  $m$  und  $q$ , so wie die Punkte  $n$  und  $p$ , folglich auch die Geraden  $mn$  und  $pq$  gegen die Ebene  $aSc\sigma$  eine symmetrische Lage; es muss deshalb  $mq \parallel np$  sein.

Nun findet man:

$$mq = 2R \cos \frac{K_1}{2}$$

$$mn = pq = 2R \cos \frac{K_2}{2}$$

$$np = 2R \cos \frac{K_3}{2}.$$

Die Gerade  $oS$  geht durch den Mittelpunkt  $w$  des dem Trapeze  $mnpq$  umschriebenen Kreises und steht  $\perp$  auf dessen Ebene.

Der Halbmesser des Kreises  $mnpq$  heisse  $r$ .

Zieht man durch die Punkte  $m, n, p, q$  an den Kreis  $mnpq$  die Tangenten  $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \delta\alpha$ , so schneiden sich dieselben in der Verlängerung in den Punkten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , welche zugleich den Kanten  $Sa, Sb, Sc, Sd$  der Ecke  $Sabcd$  angehören.

Verbindet man den Punkt  $m$  geradlinig mit den Punkten  $S$  und  $w$ , so entstehen dadurch die zwei ähnlichen Dreiecke  $mSo$  und  $mSw$ , bei welchen sich verhält:

$$oS : om = om : ow,$$

d. i.

$$oS : R = R : \sqrt{R^2 - r^2};$$

daher ist:

$$oS = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Man wird demnach die Ecke  $Sabcd$  aus den Kantenwinkeln  $K_1, K_2$  und  $K_3$  auf folgende Weise leicht darstellen können:

Man beschreibe von  $l$  aus Taf. I, Fig. 3, dem gemeinschaftlichen Scheitelpunkte der Winkel  $flk = K_1, glk = K_2$  und  $hlk = K_3$  mit dem Halbmesser  $lk = R$  den Halbkreis  $ehk$ , verlängere den Schenkel  $lk$  bis der Halbkreis in  $e$  getroffen wird, und ziehe die Sehnen  $ef, eg$  und  $eh$ , so ist:

$$ef = 2R \cos \frac{K_1}{2}$$

$$eg = 2R \cos \frac{K_2}{2}$$

$$eh = 2R \cos \frac{K_3}{2}.$$

Aus diesen Sehnen construire man das Kreisviereck  $mnpq$ , Taf. I, Fig. 1, wobei  $mq = cf = 2R \cos \frac{K_1}{2}$ ,  $mn = pq = eg = 2R \cos \frac{K_2}{2}$ ,  $np = eh = 2R \cos \frac{K_3}{2}$  und  $mq \parallel np$  ist, stelle jedoch das Viereck  $mnpq$  wegen Vereinfachung der weiteren Construction horizontal und mit den zu einander parallelen Seiten  $mq$  und  $np$  senkrecht auf die verticale Projections-Ebene.

Durch die Eckpunkte  $m, n, p, q$  ziehe man an den dem Trapeze  $mnpq$  umschriebenen Kreis die Tangenten  $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \delta\alpha$ , welche durch ihr Zusammentreffen die Kantenpunkte  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  geben.

Dann zeichne man über der im Mittelpunkte  $w$  des Kreises  $mnpq$  auf dessen Ebene senkrechten Geraden  $oS$  als Hypotenuse ein Dreieck  $oSz$ , dessen Scheitel  $z$  des rechten Winkels in die Peripherie des Kreises  $mnpq$  fällt und dessen eine Kathete  $zo = R$  ist und verbinde den dieser Kathete gegenüber liegenden Eckpunkt  $S$  (des rechtwinkligen Dreieckes  $Szo$ ) mit den Punkten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  durch die Geraden  $S\alpha, S\beta, S\gamma$  und  $S\delta$ ; so ist  $S'a'b'c'd'$  die horizontale und  $S''a''b''c''d''$  die verticale Projection der gesuchten Ecke  $Sabcd$ .

Um nun hieraus das Hemiorthotyp  $Sabcd\sigma$  selbst zu bestimmen, ziehe man durch einen beliebigen Punkt  $\sigma''$  der Geraden  $S''\sigma''$  die  $c''\sigma'' \parallel S''a'', a''\sigma'' \parallel S''c''$ , so wie auch die Gerade  $a''c''$ .  $S''a''b''c''d''\sigma''$  ist dann schon die verticale Projection des Hemiorthotypes. Seine horizontale Projection  $S'a'b'c'd'\sigma'$  wird erhalten, indem man die Punkte  $a'', b'', c'', d'', \sigma''$  nach  $a', b', c', d', \sigma'$  projicirt und die Geraden  $a'b', b'c', c'd', d'a', \sigma'b'$  und  $\sigma'd'$  zieht.

Bei dieser Lage des Hemiorthotypes gegen die beiden Projections-Ebenen erscheint der rhomboidische Hauptschnitt  $Sa\sigma c$  in der verticalen Projections-Ebene in der wahren Grösse.

Fällt man von  $S'$  auf die Gerade  $a''c''$  das Perpendikel  $S''x''$ , so ist der Winkel  $\sigma''S''x''$  die Grösse der Abweichung der schiefen Axe  $S\sigma$ .

Für den rhombischen Hauptschnitt  $abcd$ , welcher hier als Basis gewählt wurde, ist  $b'd'$  die eine,  $a''c''$  die andere Diagonale; für den rhombischen Hauptschnitt  $Sb\sigma d$  ist  $b'd'$  die eine und  $S''\sigma''$  die zweite Diagonale.

In Fig. 2 sind die orthogonalen Projectionen des Hemiorthotypes  $Sabcd\sigma$  dargestellt, wenn die Basis  $abcd$  horizontal liegt und der rhomboidische Schnitt, wie in Fig. 1 zur verticalen Projections-Ebene parallel ist.

Das Bild  $Sabcd\sigma$ , Fig. 7, desselben Hemiorthotypes wurde erhalten, indem zuerst das Hemiorthotyp, Fig. 2, um die horizontale Gerade  $PQ$  um den Elevationswinkel  $\alpha$  (Fig. 6) mit der Spitze  $S$  nach vorne gedreht und dann auf die durch  $PQ$  gehende Vertical-Ebene orthogonal projectirt wurde.

## §. 2. Construction des Anorthotypes (skalenische Pyramide).

Zur Bestimmung eines Anorthotypes ist die Grösse von fünf Kanten erforderlich.

Sind  $K_1, K_2, K_3, K_4$  und  $K_5$  der Reihe nach die Winkel der Kanten  $Sa, Sb, Sc, Sd$  und  $ab$  des zu bestimmenden Anorthotypes  $Sabcd\sigma$  Taf. I, Fig. 8 gegeben, so kann aus diesen Daten die Ecke  $Sabcd$  auf folgende Weise sehr leicht construirt werden.

Da  $pl. ab\sigma \parallel pl. cdS$ , so ist auch der Neigungswinkel der zwei Ebenen  $abS$  und  $cdS$  bekannt; er ist  $= 180 - K_5$ .

Man zeichne zuerst die zwei Ebenen  $abS$  und  $cdS$ , Taf. I, Fig. 4, so, dass beide auf der verticalen Projections-Ebene senkrecht stehen und zugleich mit der horizontalen Ebene  $\mu\nu$  gleiche Winkel  $\frac{K_5}{2}$  einschliessen.

Die horizontalen Tracen  $a'b'$  und  $\gamma'\delta'$  der Ebenen  $abS$  und  $cdS$  stehen dann senkrecht auf der Projections-Axe  $AX$  und der von den beiden Ebenen eingeschlossene Winkel  $a''S''\delta'' = 180 - K_5$  erscheint in der verticalen Projections-Ebene in der wahren Grösse.

Die verticale Projection der Durchschnittslinie der beiden Ebenen  $abS$  und  $cdS$  bildet der Punkt  $S''$ , die horizontale Projection hingegen die Gerade  $S'o''$ , welche zu den beiden Tracen  $a'b'$  und  $\gamma'\delta'$  parallel ist.  $S''$  ist zugleich die verticale Projection der Spitze  $S$ ; als deren horizontale Projection wurde der Punkt  $S'$  gewählt.

Die zwei Ebenen  $bSc$  und  $a dS$  können nun wieder am einfachsten mittelst einer die Ebenen  $aSb$  und  $dSc$  berührenden Kugel

$u'y'v'$ ,  $u''t''v''$ , deren Mittelpunkt in  $o'$ ,  $o''$  angenommen wurde, bestimmt werden.

$m'$ ,  $m''$  und  $n'$ ,  $n''$  sind die Projectionen der Berührungspunkte der Kugel mit den Ebenen  $aSb$  und  $cSd$ . Die Punkte  $m$  und  $n$  liegen in demselben Parallelkreise  $m'n'$ ,  $m''n''$ .

Man ziehe an die Vertical-Contour der Kugel die zwei Tangenten  $e'f'$  und  $g'h'$  unter den Winkeln  $a'e'f' = K_2$  und  $g'h''c'' = K_3$  gegen die Ebenen  $aSb$  und beziehungsweise  $cSd$  geneigt.

Durch Rotation der Tangente  $ef$  um die auf der Ebene  $abS$  senkrechte Drehungsaxe  $om$  entsteht eine die Kugel nach dem zu der Ebene  $aSb$  parallelen Kreise  $fpi$  umhüllende Kegelfläche.

Jeder Punkt des Kreises  $fpi$  besitzt die Eigenschaft, dass die durch ihn an die Kugel berührend gelegte Ebene mit der Ebene  $aSb$  den Winkel  $K_2$  einschliesst.

Durch Rotation der Tangente  $gh$  um die auf der Ebene  $cdS$  senkrechte Drehungsaxe  $on$  entsteht ebenfalls eine die Kugel umhüllende Kegelfläche, welche jedoch mit der Kugel den zu der Ebene  $cdS$  parallelen Kreis  $gpk$  gemeinschaftlich hat.

Jeder Punkt des Kreises  $gpk$  besitzt wieder die Eigenschaft, dass die durch denselben an die Kugel berührend gelegte Ebene mit der Ebene  $cdS$  den Winkel  $K_3$  bildet.

Es muss demnach die durch den gemeinschaftlichen Punkt  $p$  der beiden Kreise  $fpi$  und  $gpk$  an die Kugel berührend gelegte Ebene sowohl mit der Ebene  $aSb$  den Winkel  $K_2$  als auch zugleich mit der Ebene  $cdS$  den Winkel  $K_3$  einschliessen.

Ginge nun die Berührungsebene des Punktes  $p$  auch durch den Punkt  $S$ , so würde sie die gesuchte Ebene  $bSc$  selbst sein. Da jedoch der Punkt  $p$  nicht in dem Parallelkreise  $mn$  der Punkte  $m$  und  $n$  liegt, so kann auch die Berührungsebene des Punktes  $p$  nicht durch den Punkt  $S$  gehen. Man muss daher, um die Ebene  $bSc$  selbst zu erhalten, durch den Punkt  $S$  eine zu der Berührungsebene des Punktes  $p$  parallele Ebene legen.

Weil die Berührungsebene des Punktes  $p$  auf dem Halbmesser  $op$  der Kugel senkrecht steht, so muss auch die zu ihr parallele Ebene  $bSc$  auf dem genannten Halbmesser und daher deren Trace  $b'g'$  auf der horizontalen Projection  $o'p'$  des Halbmessers  $op$  ebenfalls senkrecht stehen.

Zieht man durch den dem Hauptmeridiane und dem Parallelkreise des Punktes  $p$  gemeinschaftlichen Punkt  $p_1$  an die Vertical-Contour der Kugel die Tangente  $p_1''l''$  bis die  $o''S''$  in  $l''$  geschnitten wird, durch  $l''$  und  $p''$  die Gerade  $l''p''$  und zu dieser parallel durch  $S''$  die  $S''q''$ ; so bildet die  $S''q''$  die verticale und  $S'q'$  die horizontale Projection einer Geraden der Ebene  $bSc$ .

Die Gerade  $Sq$  durchdringt die Ebene  $\mu\nu$  im Punkte  $q$ , mithin stellt die durch den Punkt  $q'$  auf die Gerade  $o'p'$  senkrecht geführte Gerade  $b'q'$  den Durchschnitt der Ebene  $bSc$  mit der Ebene  $\mu\nu$  vor.  $b'S'$ ,  $b''S''$  und  $\gamma'S'$ ,  $\gamma''S''$  sind die beiden orthogonalen Projectionen der Kanten  $bS$  und  $\gamma S$ .

Auf die nämliche Weise erhält man die Trace  $z'\delta'$  der Ebene  $aSd$  und die Kanten  $aS$  und  $dS$ .

Dadurch ist die Ecke  $Sabcd$  construirt und kann hieraus das Anorthotyp selbst auf folgende Weise einfach dargestellt werden.

Nimmt man  $ab$  als die eine Seite der Basis des Anorthotypes an, so hat man zunächst in der Ebene  $\gamma S\delta$  eine Gerade  $dc$  zu bestimmen, welche gleich und parallel mit  $ab$  ist.

Man ziehe  $a'z' \parallel b'\gamma'$ ,  $d'z' \parallel S'\gamma'$ , und  $d'e' \parallel \gamma'\delta'$ , so ist  $c'd'$  die horizontale,  $c'd'$  die verticale Projection der Geraden  $dc$ . Die Geraden  $a'd'$ ,  $a''d''$  und  $b'e'$ ,  $b''e''$  sind die Projectionen der zwei anderen Basis-Kanten  $ad$  und  $bc$ .

Endlich ziehe man  $a'\tau' \parallel c'S'$ ,  $b'\tau' \parallel d'S'$ ,  $c'\tau' \parallel a'S'$ ,  $d'\tau' \parallel b'S'$ ,  $d''S'' \parallel S''b''$  und  $a''\tau'' \parallel d''S''$ , so sind  $S'a'b'e'd'\tau'$  und  $S'a''b''e''d''\tau''$  die beiden orthogonalen Projectionen des gesuchten Anorthotypes.

Fig. 5 stellt die orthogonalen Projectionen des Anorthotypes vor, wenn die Basis  $abcd$  eine horizontale Lage hat und die zwei parallelen Basiskanten  $ab$  und  $cd$  auf der verticalen Projections-Ebene senkrecht stehen.

Die Gerade  $PQ$  liegt in der Ebene der Basis  $abcd$  und wurde als Drehungsaxe benützt, um Fig. 8 zu erhalten. Der Elevationswinkel ist wieder  $\alpha$  (Fig. 6). Nach der Drehung wurde das Anorthotyp auf die durch  $PQ$  gehende Verticalebene orthogonal projectirt und dann erst das so erhaltene Bild auf die Zeichenfläche (Fig. 8) übertragen.

Das Weitere ist aus den beigeschlossenen Figuren für sich klar.

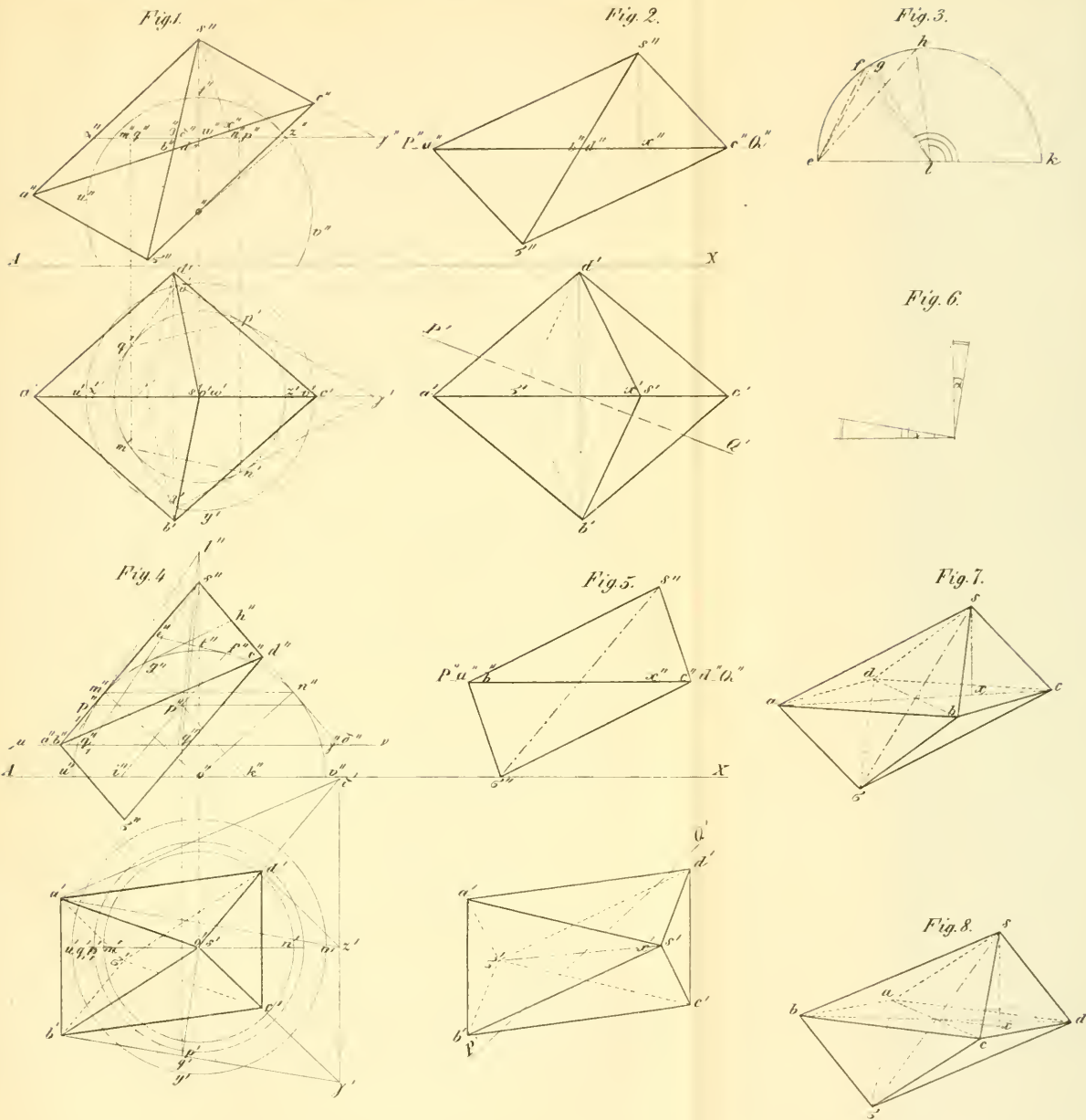
Um irgend eine Combinationsfläche fixiren zu können, muss entweder ihre Neigung gegen zwei bereits bekannte Flächen oder die Richtung einer Combinationskante und die Neigung gegen eine

bekannte Fläche gegeben sein. In beiden Fällen kann die Combinationsfläche mittelst einer Kugel und der die Kugel umhüllenden Kegelflächen, deren Erzeugenden die gegebenen Neigungswinkel mit den bekannten Flächen einschliessen, sehr leicht construirt werden. Der Vorgang ist ähnlich dem hier im §. 2 gezeigten oder dem im §. 32 der Abhandlung: „Über die directe Constructionsmethode der verticalaxigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln“ angegebenen. (Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, Bd. XXXVIII, S. 324.)

Um die Schärfe des Resultates namentlich bei vielfächigen Combinationen zu steigern, ist es zweckmässig, wenn man die Figuren zuerst in grösserem Massstabe construirt und dann mittelst Proportionalwinkels auf die gegebene Grösse bringt.

---





# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse](#)

Jahr/Year: 1860

Band/Volume: [41](#)

Autor(en)/Author(s): Niemtschik Rudolf

Artikel/Article: [Über die directe Construction dr schiefaxigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln. 535-542](#)