Über die Änderung des Tones und der Farbe durch Bewegung.

Von Dr. **Ernst Mach**,

Eleve des k. k. physikalischen Institutes.

Vorliegende Abhandlung stellt sich die Aufgabe, die Doppler'sche Theorie der Änderung des Tones und der Farbe durch Bewegung einer neuen experimentellen und theoretischen Untersuchung zu unterwerfen. Diese Theorie wurde nämlich unserer Meinung nach, wenn auch manches an ihrer Form auszusetzen wäre, doch mit Unrecht angegriffen.

Doppler [1]) behauptet, dass ein Ton höher erscheine sobald sich die Tonquelle mit bedeutender Geschwindigkeit dem Beobachter nähert, tiefer sobald sie sich entfernt; er sucht diesen Vorgang durch eine elementare mathematische Betrachtung zu deduciren und überträgt dieselbe Anschauungsweise auch auf die Farbe einer in Bewegung befindlichen Lichtquelle.

Es wurden zur Bestätigung des erwähnten Satzes Experimente angestellt, welche fast sämmtlich zur Befriedigung ausfielen.

Dagegen behauptet eine geachtete mathematische Autorität [2]):

1. Entweder sind diese Experimente falsch und dann ist die Täuschung durch die Theorie hervorgerufen worden;

2. oder die Experimente sind richtig und dann ist wenigstens die Doppler'sche Erklärung eine unrichtige.

Seine letzte Streitschrift [3]) gegen Doppler schliesst der oben gedachte Gelehrte mit den Worten:

„Wenn auch bei dem gegenwärtigen Stande dieser Streitfrage der Einfluss der progressiven Bewegung einer Ton- oder Lichtquelle auf die schwingende Bewegung als noch nicht vollständig erörtert zu

[1]) Theorie des farbigen Lichtes der Doppelsterne. Prag 1842.

[2]) Prof. Petzval in den Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. VIII, p. 567.

[3]) Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. IX, p. 679.

betrachten ist, so ist er doch ganz gewiss nicht derjenige, dem Masse nach und auch der Ordnung der Wirkungen nach, zu der er gehört, den die Doppler'sche Theorie gibt."

In dieser ersten Arbeit nun soll es unsere Aufgabe sein:

1. Streng experimentell nachzuweisen, dass durch Bewegung der Ton in der That geändert werde und zwar im Sinne der Doppler'schen Theorie;

2. es wahrscheinlich zu machen, dass selbst die nach der Doppler'schen Betrachtungsweise gewonnenen Formeln als Näherungsgesetze anzusehen sind, welche für geringere Geschwindigkeiten gelten;

3. daran einige für die Astronomie wichtige Consequenzen zu knüpfen.

In einer folgenden Arbeit wollen wir den Einfluss der Geschwindigkeit, der progressiven Bewegung und Dichtenveränderung des Mittels auf die Tonhöhe genauer untersuchen. Gegen die Behauptung Prof. Petzval's, die Doppler'sche Erklärung der Facta, wenn sie auch wirklich existirten, sei ungenügend, können wir nichts einwenden, da sie wirklich mehr auf Analogie als auf eine strenge Untersuchung gegründet ist. Überhaupt wird kein Unparteiischer die Vorzüge der Petzval'schen Betrachtungsweise verkennen; nur war hiermit nicht die Berechtigung gegeben, eine Theorie, weil sie ungenau war, ganz über Bord zu werfen, ohne eine bessere an die Stelle zu setzen.

Wir wollen nun zunächst die Theorie, wie sie Doppler gibt, und die dagegen von verschiedenen Seiten her erhobenen Einwürfe speciell betrachten.

Doppler [1]) untersucht die beiden Fälle, wenn der Beobachter in Bewegung und die Tonquelle in Ruhe ist, so wie den entgegengesetzten gesondert.

Fig. 1.

Fig. 2.

1. Fall. Es heisse die Geschwindigkeit, mit welcher die Wellen fortgepflanzt werden a,

[1]) Über das farbige Licht, p. 6.

und O und A (Fig. 1, 2) bedeute Anfang und Ende einer Welle, Q dagegen die entfernte Quelle derselben; ferner n die Anzahl Secunden, welche eine Welle nöthig hat, um von A nach O zu kommen, d. h. um eine Wellenlänge zu durchlaufen, und x'' die Zeit, die sie braucht, um den gegen oder von A sich bewegenden Beobachter zu erreichen. Man hat daher für den Fall der Annäherung sowohl, wie der Entfernung des Beobachters von oder an die Tonquelle, wegen

$$a\,x'' \pm \alpha\,x'' = an;\; x'' = \frac{a\,n}{a \pm \alpha};$$

2. Fall. Für diesen findet man auf ganz ähnliche Weise:

$$x'' = \left(\frac{a \mp \alpha}{a}\right) \cdot n.$$

Wir bedienen uns statt der Doppler'schen Formeln lieber der folgenden. Bedeute γ die Geschwindigkeit der Welle, $\varkappa$ die der Wellenquelle, c die des Beobachters, τ die Schwingungsdauer der Quelle und τ' die scheinbare Schwingungsdauer; so hat man

1. bei Bewegung der Quelle allein:

$$\tau' = \tau \cdot \frac{\gamma - \varkappa}{\gamma};$$

2. bei Bewegung des Beobachters allein:

$$\tau' = \tau \cdot \frac{\gamma}{\gamma - c};$$

3. wenn Quelle und Beobachter zugleich sich bewegen:

$$\tau' = \tau \cdot \frac{\gamma - \varkappa}{\gamma - c};$$

wobei $\varkappa$ und c positiv zu nehmen sind in der Richtung von der Quelle gegen den Beobachter, negativ in der entgegengesetzten. Statt der Schwingungsdauer könnte man auch ohne Veränderung der Formeln die entsprechende Wellenlänge einführen.

1. Professor Petzval setzt dieser Theorie das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer entgegen [1]). Herr Regierungsrath A. Ritter von Ettingshausen sagt aber schon im IX. Bande der Sitzungsberichte, p. 29, bei Gelegenheit der Besprechung des betreffenden Aufsatzes: „Der Herr Verfasser geht über die Befugniss,

[1]) Sitzb. VIII, p. 134.

welche ihm die Prämissen gestatten, hinaus, wenn er (Sitzungsberichte, Jännerheft, S. 155), nachdem nur ein anfänglicher Erregungszustand besprochen war, die für selben in Anspruch genommene Folge auch ohne weitere Erörterung auf jeden, einem schwingenden Körper anhängenden permanenten Erregungszustand bezieht". — Es wird ausserdem gut sein zu bemerken, dass das Princip von der Schwingungsdauer eines und desselben Theilchens spricht, während Auge und Ohr im Zustande der Bewegung, ihre Phasen in jedem Augenblicke von einem andern Theilchen empfangen.

2. Die von Doppler gewonnenen Formeln sind nach der Voraussetzung abgeleitet, dass der Ton aus einer Reihe von Explosionen bestehe, denn es wird hier von der Welle wie von einem Individuum gesprochen, was nach Prof. Petzval's Ansicht unstatthaft ist [1]). Es kann aber wenigstens Explosionstöne geben, eine Sirene z. B. mit kleinen weitabstehenden Löchern, wie auch Savart's gezähntes Rad bringt einen solchen hervor. Pflanzen sich aber die eine Welle zusammensetzenden Elementarwellen mit gleicher Geschwindigkeit fort und ohne sich zu stören, wie man das wohl annimmt, so gelten dann diese Formeln für jede Wellenform, da die Tonhöhe nur durch den Abstand zweier entsprechender übrigens ganz beliebiger Phasen bestimmt ist, welche Phasen man dann immerhin als momentan oder als Explosion fassen kann. Übrigens wird Niemand dagegen sein, wenn man an die Stelle der Doppler'schen Ableitung die strengere und elegantere Petzval's setzt, die übrigens, was die Wellenlänge betrifft, zu demselben Resultate geführt hat.

3. Die beiden vorigen Einwürfe wurden unter der Voraussetzung betrachtet, dass das Mittel an der progressiven Bewegung des tönenden Körpers, so wie des Beobachters keinen Antheil nehme. Auch diese Voraussetzung findet Prof. Petzval unrichtig; es sei nämlich nicht einzusehen, warum das Mittel die periodische Bewegung bereitwilliger aufnehmen solle als die progressive. Wir erlauben uns dagegen mit Bestimmtheit zu behaupten, dass die periodische Bewegung vom Mittel in einer ganz anderen Weise aufgenommen werde als die progressive; die Art dieser Aufnahme wird nicht nur von der Geschwindigkeit, sondern auch von der Grösse und Form des Querschnittes abhängen. Wären Beobachter und tönender Körper

[1]) Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. VIII, p. 567.

unendliche parallele Ebenen oder in einer Röhre eingeschlossen, in der Art, dass sie das ganze zwischen ihnen liegende Mittel vor sich herschieben müssten, so würde man allerdings diesen Fall der Rechnung unterwerfend zu anderen Resultaten gelangen als Doppler. Ist aber der tönende Körper von begrenztem Querschnitte, so kommt noch ein anderer Umstand hinzu, der bei der periodischen und progressiven Bewegung von ganz verschiedenem Einflusse ist. — Nach dem Principe der Gleichheit des Druckes nach allen Richtungen bei Flüssigkeiten, sucht sich nämlich jede dem Mittel beigebrachte Änderung der Dichte nicht nur an die folgende Schichte fort zu pflanzen, sondern auch nach der Seite auszugleichen. Folgt nun, wie bei der schwingenden Bewegung schnell hinter einander Verdichtung auf Verdünnung, so ist zu dieser Ausgleichung nach der Seite hin so zu sagen keine Zeit, indem die ganze Dichtenänderung sogleich an die folgende Schichte übertragen wird. Bei einer fortdauernden, durch eine progressive Bewegung beigebrachten Verdichtung oder Verdünnung hingegen wird sich diese auch fortwährend nach der Seite ausgleichen, das Mittel wird zur Seite ausweichen oder hereinströmen, so zwar, dass namentlich bei geringen Geschwindigkeiten der ganze Einfluss der progressiven Bewegung schon in einer geringen Entfernung von der Quelle erlischt. Desshalb wird wahrscheinlich auch das obige Rechnungsresultat bei geringen Geschwindigkeiten durch den Einfluss der progressiven Bewegung nicht bedeutend afficirt [1]). Wir nehmen uns übrigens vor, diese Deduction, welche wir hier blos angedeutet haben und die eigentlich von der Integration einer partiellen Differentialgleichung abhängt, unter erleichternden Voraussetzungen nächstens mathematisch durchzuführen [2]). Es sind also die Doppler'schen Formeln nur Näherungsgesetze für geringe Geschwindigkeiten.

4. Endlich wirft Prof. Petzval [3]) jener Theorie noch die absurden Folgerungen vor, welche sich aus den aufgestellten Formeln ziehen lassen. Dieser Vorwurf fällt von selbst weg, da wir die Geltung der Formeln auf den Fall geringer Geschwindigkeiten

[1]) Anders ist es natürlich bei einer sehr schnellen Bewegung.

[2]) Ein Problem, welches in seiner allgemeinsten Form mit sehr bedeutenden analytischen Schwierigkeiten verbunden ist.

[3]) Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. IX, p. 699.

einschränken. Man könnte ja sonst auch das Brechungsgesetz angreifen, weil es für den speciellen Fall der totalen Reflexion verlangt, dass der Sinus grösser als 1 sein solle, was wenigstens eine eben so grosse Unmöglichkeit ist wie ein unendlich hoher oder ein negativer Ton.

Alles zusammengefasst, bleibt es also das Verdienst des Herrn Prof. Petzval nachgewiesen zu haben, dass Doppler's Theorem

1. mangelhaft deducirt sei und
2. nicht allgemein gelten könne.

Nun zu den von anderen Seiten her gemachten Einwürfen!

Es lohnt sich nicht der Mühe auf diejenigen einzugehen, welche sich auf die blosse Behauptung reduciren, man habe sich bei den für die Theorie angestellten Versuchen getäuscht; es erübrigt nur noch der experimentelle Beweis, den Angström, gegen die Doppler'sche Theorie, wenigstens bezüglich der Farbe, versucht hat.

Angström [1]) untersucht das Spectrum des zwischen zwei vertical über einander aufgestellten Metallkugeln überspringenden elektrischen Funkens. Das Spectrum, welches sich hier zeigt, ist eigentlich eine Überdeckung zweier Spectra; der eine Theil rührt von der Luft, der andere von den fortgeschleuderten glühenden Metalltheilchen her. Nun meint Angström, wenn man den Funken statt in verticaler in einer sehr geneigten Richtung überspringen liesse, so müssten die Linien im Spectrum wandern, da die Metalltheilchen des einen Poles sich nach seiner Angabe mit einer Geschwindigkeit von 80—90 Meilen dem Beobachter nähern, die des andern sich ebenso schnell entfernen. Eigentlich müsste sich jede vom Metall herrührende Linie in zwei spalten, die nach entgegengesetzter Richtung aus einander treten. Stellt man nun das Experiment wirklich an, so bemerkt man gar keine Veränderung im Spectrum. Angström hat hier das Fortschreiten des Glühens mit dem Fortschreiten der glühenden Theilchen verwechselt, was eben so unstatthaft ist, als wenn man das Fortschreiten einer Wasserwelle mit dem Fortschreiten der Wassertheilchen vermengen wollte. Überdies widerlegt er sich selbst, indem er einige Seiten weiter sagt, dass wenn man auch den Funken schief überspringen lässt, die Metalltheilchen doch (wahr-

[1]) Optische Untersuchungen in Poggendorff's Annalen, 94. Bd., p. 141.

scheinlich durch den Strom der erwärmten Luft) aufwärts getrieben werden. Wäre in der That die Geschwindigkeit der Theilchen eine so grosse, wie sie ihnen Angström zuschreibt, so könnte die kleine Kraftcomponente, welche vom Luftstrome herrührt, keine solche Ablenkung bewirken. Es ist also klar, wie wenig das angeführte Experiment entscheiden kann.

Übergehen wir nun zu den Versuchen, welche zur Unterstützung der Doppler'schen Theorie angestellt wurden; diese allein würden schon, da sie fast durchgängig gelungen sind, die Einwürfe der Gegner entkräften, wenigstens würden sie beweisen, dass die Deductionen derselben auf unstatthaften Voraussetzungen beruhen. Zu diesen Versuchen gehören:

1. Die auf Eisenbahnen [1]) von Dr. Buys Bullot in Belgien und von M. Svott Russel in England angestellten, welche beide lehrten, dass der kommende Ton höher, der fortgehende tiefer erscheine.

2. Fizeau [2]) soll einen Versuch durch eine Art Umkehrung des Savart'schen gezähnten Rades gemacht haben, der zur Befriedigung ausfiel. Es war mir nicht möglich etwas Genaueres darüber zu erfahren.

3. Als ich anfing mich mit dieser Theorie zu beschäftigen, stellte ich zunächst einige vorläufige Versuche mit durchbohrten Spitzkugeln an, welche ich nahe an mir vorüberschiessen liess und deren pfeifenden Ton ich beobachtete. Die Entfernung, in der ich mich aufgestellt hatte, war so gewählt, dass man annehmen konnte, die Geschwindigkeit der Kugel sei noch ziemlich constant. Beim Vorüberfliegen hörte ich den Ton plötzlich aus der Höhe in die Tiefe fallen. Da übrigens diese Art des Experimentirens viel Unsicherheit hat, suchte ich nach einer besseren Methode.

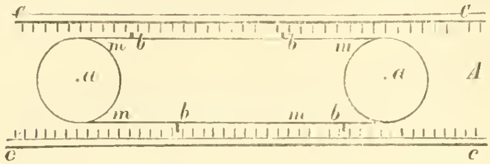
4. Eisenbahnen stehen als Experimentirmittel nicht Jedermann zu Gebote; auch glaube ich, dass man bei anderen einfachen Vorrichtungen mit weniger Aufwand die Umstände mehr in der Hand hat. Diese Art von Versuchen hat überdies noch den Vortheil, dass jeder, der sich von der Richtigkeit der Thatsachen überzeugen will, sie mit Leichtigkeit wiederholen kann. Durch Herrn Regierungs-

[1]) Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. V, p. 154.

[2]) Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. V, p. 154.

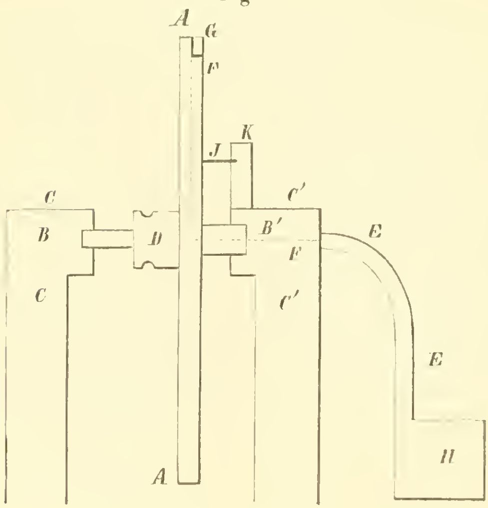
rath v. Ettingshausen unterstützt, construirte ich im k. k. physikalischen Institute einen Apparat, dessen Schema die beiliegende Zeichnung gibt: *aa* sind zwei Rollen, über welche eine Gurte *mm* gespannt ist, die 4 Stifte *bb* trägt. Wird der Apparat dadurch in Rotation versetzt, dass man die eine der Rollen mittelst einer Schnur mit der Drehbank verbindet; so schlagen die Stifte *bb* an die zwei gleichgezähnten Stangen *cc*, indem sie an denselben in entgegengesetzter Richtung hin laufen. Nach Doppler's Ansicht müsste man nun, wenn man sich in *A* aufstellt, bei hinreichender Geschwindigkeit zwei verschiedene constante Töne hören. Es war jedoch bei diesem Apparate nicht möglich eine bedeutende Geschwindigkeit zu erzielen, da die Reibungswiderstände zu gross waren. Man sieht, dass dieser Apparat der Fizeau'schen Vorrichtung wahrscheinlich sehr ähnlich ist, wenn er nicht ganz mit derselben zusammenfällt. Übrigens ist gegenwärtig kein Grund das Misslingen dieses Experimentes zu bedauern, da es doch nicht vollständig überzeugend gewesen wäre, indem sich hier die Tonquelle nicht wirklich, sondern nur imaginär bewegt.

Fig. 3.



5. Ich schritt nun zu einem neuen Versuche, der endlich vollständig gelang. Der zu diesem Zwecke construirte Apparat ist von folgender Beschaffenheit: *AA* ist eine 6′ lange Stange, welche mit einem horizontalen Zapfen *BB′* in dem Lager *CC* läuft. Die Rolle *D* wird mit

Fig. 4.



dem Schwungrade der Drehbank verbunden, um das Ganze in schnelle Rotation zu versetzen. Der dickere Theil des Zapfens B' steckt luftdicht in einer Stopfbüchse $C'C$ und ist mit einer Axenbohrung versehen. Zur Stopfbüchse führt ein Rohr EE von einem Blasebalg H und es gelangt nun die Luft durch dieses Rohr in die Axenbohrung des Zapfens und eine Längsbohrung der Stange FFF bis an das eine Ende der Stange, wo ein kleines Schnarrpfeifchen eingesetzt ist, ein gewöhnliches Stimm-A, wie es bei Orchestern gebraucht wird. J ist ein elastisches Plättchen, welches durch den mit der Stange AA verbundenen Stift k angeschlagen wird, wodurch man die Zahl der Umläufe in einer gewissen Zeit bestimmen kann.

Versetzt man Blasebalg und Drehbank zugleich in Thätigkeit und stellt sich in der Ebene der Rotation auf, so hört man den sonst vollkommen constanten Ton sogleich auf und abschweben, wie es nach Doppler's Ansicht sein muss, da sich die Geschwindigkeit des tönenden Körpers gegen den Beobachter oder genauer der Differentialquotient der Entfernung des tönenden Körpers vom Beobachter, nach der Zeit genommen in jedem Augenblicke ändert. Wird die Rotation beschleunigt, so vergrössert sich zugleich die Tondifferenz. Man kann nun nachweisen:

α) Dass die Schwebung des Tones von keinem anderen Umstande abhänge, als von der Richtung und Geschwindigkeit gegen den Beobachter;

β) dass die wahrgenommene Schwebung rein subjectiv sei.

α. Die Schwebung kann nicht von Stössen des Blasebalges oder der Drehbank herrühren, da diese vollkommen gleichförmig wirken und höchstens einen Unterschied in der Intensität geben könnten.

Die Rotation an sich könnte den Ton wenigstens nicht periodisch ändern, da ein Element der Kreisbahn dem anderen vollkommen congruent ist, blos der ebengenannte Differentialquotient hat eine Periode.

So lange die Rotation währt, fällt immer, wie man sich durch das Zählwerk überzeugt, die Dauer eines Auf- und Abschwebens mit der Dauer eines Umlaufes zusammen; es ist klar, welche Unwahrscheinlichkeit diese Thatsache hätte, wenn die Schwankung des Tones durch zufällige Störungen entstünde.

β. Man kann sich aber auch überzeugen, dass die Tonveränderung subjectiv sei. Wo man auch immer stehen mag, hört man den höheren Ton beim Ankommen, den tieferen beim Fortgehen der Stange.

Stellt man sich in die Rotationsaxe, so vernimmt man nebst den von den Wänden des Zimmers herrührenden Reflexen noch ein vollkommen constantes Singen des Tones. Versetzt man den Apparat in sehr schnelle Rotation, so tönt er auch ohne Blasebalg durch die blos vermöge der Centrifugalkraft durchgetriebene Luft; stellt man sich dann in der Rotationsebene auf und führt ein Rohr von der Stopfbüchse zum Ohr, so hört man durch dasselbe einen intensiven schönen constanten Ton, während man von aussen eine bedeutende Schwankung vernimmt.

Selbst die Tondifferenz, so weit man sie durch das blosse Ohr bestimmen kann, scheint den Formeln Doppler's zu entsprechen. Unsere Stange hat 6′ Länge; es legt also jeder Endpunkt bei einem Umlaufe nahe 18′ zurück. Man sollte nun nach der Theorie bei etwas mehr als einem Umlaufe in der Secunde, einen halben Ton, zwischen 3 und 4 Umläufen nahezu eine Secund-Tondifferenz bekommen, was durch das Gehör bestätigt wird. Es gelang mir nicht die äussersten Grenzen des schwebenden Tones durch das Monochord zu fixiren. Man muss zum Zwecke der Messung einen anderen Apparat construiren, bei welchem man zwei verschiedene constante Töne erhält.

Ich glaube nun durch Theorie und Experiment gleichmässig Folgendes constatirt zu haben:

1. Die Tonhöhe wird durch Bewegung in der That geändert, und zwar im Sinne der Doppler'schen Theorie.

2. Die von Doppler aufgestellten Formeln sind Näherungsgesetze, welche für geringere Geschwindigkeiten gelten.

Auf den letzten Punkt unserer Aufgabe, nämlich die für die Astronomie wichtigen Consequenzen, wollen wir noch einen Blick werfen.

Man hat schon häufig beobachtet, dass gewisse Sterne ihre Farbe periodisch ändern; diese Erscheinung ist auf Grundlage der obigen Theorie nach Doppler erklärt, wenn man annimmt, die Geschwindigkeit der Sterne sei mit der Lichtgeschwindigkeit vergleichbar und ändere sich periodisch, welche Annahme durch die

Gesetze der Centralbewegung wohl gerechtfertigt ist. In der That hat die Richtigkeit dieser Erklärung eine grosse Wahrscheinlichkeit wenn man Folgendes bedenkt:

α. Eine andere Erklärung der Erscheinung ist wohl nicht möglich. Wollte man annehmen, eine periodische physikalische Änderung des Leuchtprocesses finde auf dem Sterne Statt, oder bei der Bewegung des Sternes durch verschiedene Gegenden des Weltraumes werden verschiedene Farben absorbirt; so wären diese Hypothesen so wenig plausibel, dass sich zu ihrer Annahme schwerlich jemand entschliessen würde.

β. Wir wissen von den Sternen, dass sie sich in Kegelschnitten bewegen. Das einzige, was sich mit der Farbe des Sternes zugleich ändert, ist also seine Richtung und Geschwindigkeit; es ist nun ein ganz natürlicher und der in der Naturwissenschaft herrschenden Methode angemessener Gedanke, Farbe und Geschwindigkeit in Zusammenhang zu bringen. Auch ist es jedem Mathematiker klar, wie wahrscheinlich dieser Zusammenhang auch dann schon wäre, wenn man ihn noch gar nicht einsehen könnte.

γ. Endlich gewinnt diese Erklärung noch dadurch, dass aus ihr abgeleitete Erscheinungen durch Beobachtungen vollständig bestätigt werden. Unser Planetensystem bewegt sich mit grosser Geschwindigkeit gegen das Sternbild des Hercules hin; es sollten also nach der Theorie dort die meisten violetten Sterne zu finden sein; Sestini's Beobachtungen bestätigen das [1]).

Durch das Licht allein gelangen wir zu unserer Kenntniss über den Weltraum, durch das Licht wissen wir alles, was über die physikalische Beschaffenheit und Bewegung der Himmelskörper bekannt ist; durch das polarisirte Licht unterscheiden wir beleuchtete Gestirne von selbstleuchtenden. Es bedarf nur einer kurzen Überlegung um einzusehen, dass die besprochene Theorie uns befähigt noch viel weiter zu gehen; dieselbe gibt nämlich nicht nur eine beiläufige Erklärung der Erscheinungen am Himmel, sondern sie gibt sogar einen mathematisch genauen Aufschluss über die Art der Bewegung der beobachteten Gestirne. Ich will hier nur zwei Punkte hervorheben.

---

[1]) Sitzb. d. k. Akad. d. Wiss. V, p. 154.

1. Die Bestimmung der Geschwindigkeit unseres Planetensystems gegen den Hercules und

2. die Berechnung der Bahnelemente periodisch farbiger Sterne.

1. Wollte man die Geschwindigkeit des Planetensystems gegen den Hercules bestimmen, so würde man von folgenden Betrachtungen ausgehen.

Die Gestirne des Himmels bewegen sich in den verschiedensten Richtungen und Geschwindigkeiten gegen uns und haben daher auch die verschiedensten Farben. Theilen wir die Sterne nach Farben oder deren Wellenlängen in mehrere Classen, so können wir von einer mittleren Wellenlänge auf einer gewissen Fläche des Himmels reden und diese wird wenn $\lambda \lambda' \lambda'' \ldots$ die verschiedenen Wellenlängen und $n\, n'\, n'' \ldots$ die zugehörige Zahl der Sterne bedeuten, durch den Ausdruck gegeben:

$$\Lambda = \frac{n\lambda + n'\lambda' + n''\lambda'' + \ldots}{n + n' + n'' + \ldots} = \frac{\Sigma n\lambda}{\Sigma n}.$$

Nehmen wir an, diese mittlere Wellenlänge wäre über den ganzen Himmel gleich, wenn sich unser System nicht gegen den Hercules bewegen würde, so wird dieses Verhältniss sogleich geändert, wenn sich unser System wirklich bewegt. Wir nehmen nun die Richtung gegen den Hercules als Axe und theilen senkrecht auf diese den Himmel in eine grössere Anzahl Parallelgürtel ab. Auf die Wellenlänge desjenigen Gürtels nun, der bei dieser Anordnung den Äquator bildet, wird die Geschwindigkeit c des Planetensystems gar keinen Einfluss üben, da ihre Projection in dieser Richtung $= 0$ ist, und seine mittlere Wellenlänge würde sich am ganzen Himmel zeigen, wenn $c = 0$ wäre; wir bezeichnen sie mit Λ_m. — Die mittlere Wellenlänge in einem andern Gürtel, dessen Radius vector mit der Richtung gegen den Hercules den Winkel φ einschliesst, wird nun nach unserer Formel sein:

$$\Lambda_\varphi = \Lambda_m \cdot \frac{\gamma}{\gamma - c\cos\varphi};$$

hieraus ergibt sich: $$c = \gamma \cdot \frac{\Lambda\varphi - \Lambda m}{\Lambda\varphi \cdot \cos\varphi}$$

und wenn man dieselbe Rechnung bei allen n Gürteln durchführt und hieraus das Mittel nimmt; so hat man:

$$c = \frac{\gamma}{n} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\Lambda\varphi_h - \Lambda m}{\Lambda\varphi_h \cos\varphi_h};$$

da man der Beobachtung desto mehr Gewicht beilegen muss, je grösser die Fläche des Gürtels ist, so sind die Verhältnisszahlen der Fläche des Gürtels f_h und der Kugelfläche F einzuführen:

$$c = \frac{\gamma}{nF} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\Lambda\varphi_h - \Lambda m}{\Lambda\varphi_h \cos\varphi_h} f_h.$$

Wollte man die Rechnung wirklich ausführen, so müsste man noch den violetten Sternen ein grösseres Gewicht beilegen, als den rothen, indem jene nach der Theorie die intensiver leuchtenden sind und daher weniger leicht übersehen werden. Überhaupt dürfte mit Zuhilfenahme schon gemachter astronomischer Erfahrungen noch manches zu modificiren sein.

Man könnte das hier angedeutete Problem auch allgemeiner fassen; eine Geschwindigkeit nach drei beliebigen Richtungen zerlegt annehmen und nun die wahrscheinlichsten Werthe dieser Componenten ermitteln. Nach dem Auseinandertreten der Sterne in der Gegend des Hercules hat man erkannt, dass sich unser Planetensystem in dieser Richtung bewegt; hat man die Geschwindigkeit dieser Bewegung nach unserer Methode bestimmt, so wird es erlaubt sein nach der Art des Auseinander- und Zusammentretens der Sterne in verschiedenen Partien des Himmels auf die mittlere Entfernung dieser Partien zu schliessen.

2. Der Bestimmung der Bahnelemente periodisch farbiger Sterne liegt folgender Gedanke zu Grunde:

Durch die Projection der Geschwindigkeit des Sternes auf die Richtung, in welcher wir ihn sehen, ist seine Farbe bestimmt, und da diese Geschwindigkeitsprojection nach den Gesetzen der Centralbewegung als Function der Zeit und der Bahnelemente bekannt ist, so sind durch eine gehörige Anzahl Beobachtungen von Farbe und Zeit und die darauf gegründeten Gleichungen diese Bahnelemente gegeben. — Die Neigung der Bahnebene des Sternes gegen die Richtung, in welcher wir ihn sehen, bleibt nach dieser Methode unbestimmt, wenn man keine messbare Ortsveränderung nachweisen kann, da die Neigung sowohl Zeit als Geschwindigkeit in ganz gleicher Weise afficirt und daher aus den aufgestellten Gleichungen nicht bestimmt werden kann. In diesem Falle kann man dann auch nur eine untere Grenze für die absolute Grösse der Bahnelemente und die Entfernung angeben. Aus leicht begreiflichen Gründen ist aber die Neigung der Bahnebene, hiemit die absolute Grösse der Elemente und die Entfernung bestimmt, sobald man eine messbare Ortsveränderung an dem Sterne bemerkt. Sollte die Photometrie noch Fortschritte machen, wie es wohl zu erwarten ist, so werden wir wenigstens in den speciellen Fällen, in welchen wir es mit sehr gestreckten Ellipsen zu thun haben, die Messung der Ortsveränderung durch Messung der Lichtintensität ersetzen können. Zugleich mit der Farbe ändert sich nämlich die Lichtintensität und diese hängt nicht nur von der Geschwindigkeit, sondern auch von der Entfernung des Sternes ab.

Man kann also durch Beachtung der Lichtintensität einerseits die aus der Farbe gerechneten Elemente controliren und andererseits, wenn ein Theil dieser Elemente bekannt ist, die fehlenden (z. B. Neigung der Bahnebene und Entfernung) bestimmen.

Bei den Bestimmungen der Farbe, welche man zum Zwecke der Rechnung machen wird, kann man sich nicht auf das blosse Auge verlassen, sondern man müsste beiläufig so verfahren:

Das Bild des Sternes wird durch das Prisma in ein Spectrum zerlegt, in welchem sich nun zweierlei dunkle Linien zeigen, die einen rühren von unserer Atmosphäre, die anderen vom Sterne her; die letzteren müssen nun beim Farbenwechsel des Sternes ihren Ort ändern und aus dieser Änderung wird die Geschwindigkeit des Sternes bestimmt.

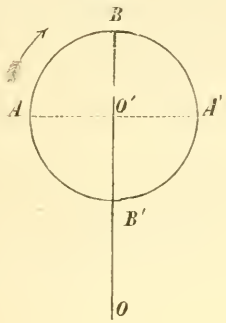
Wir müssen uns hier vorläufig auf die einfachsten Beispiele der Bahnbestimmung beschränken.

I. Es bewege sich der zu beobachtende Stern in einem Kreise. Ob dies stattfinde oder nicht, werden wir unter allen Umständen sehr leicht entscheiden können, selbst wenn wir gar keine Ortsveränderung am Sterne nachweisen können. In unserem Falle wird nämlich der Stern eine gleichlange Zeit brauchen um von seiner grössten Wellenlänge zur kleinsten und von dieser zurück zur grössten zu gelangen. Bei der Ellipse findet das nicht mehr Statt, weil hier die Geschwindigkeit verkehrt proportionirt ist der Normale; man wird aber hier gerade aus dem erwähnten Zeitverhältnisse am leichtesten die Excentricität bestimmen.

1. Der Stern bewege sich also in einem Kreise vom Radius r mit der Geschwindigkeit k; der Kreis liege so weit, dass er uns nur

einen verschwindenden Gesichtswinkel gebe, und die Richtung, in welcher wir den Stern sehen, falle in die Ebene des Kreises. Befindet sich der Beobachter in der Richtung $O'O$ und bewegt sich der Stern in der Richtung des Pfeiles, so zeigt er in A die grösste, in A' die kleinste Wellenlänge, in BB' seine natürliche, welche das arithmetische Mittel aus der grössten und kleinsten ist. Beobachtet man nun die ganze Farbenperiode, so kann man mit Zuhilfenahme der bekannten Savary-schen Methode die Bahnelemente mit Leichtigkeit bestimmen. Die halbe Periode des Sternes von B' bis B wird nämlich scheinbar länger ausfallen, als die andere Hälfte von B bis B', weil das Licht von B einen längeren Weg zum Beobachter zurückzulegen hat. Ist T die wahre halbe Umlaufszeit und τ die Zeit, die das Licht braucht um BB' zu durchlaufen, so hat man für die scheinbare Dauer der ersten Periodenhälfte:

Fig. 5.



$$T_1 = T + \tau;\ \text{für die zweite}\ T_2 = T - \tau;$$

hieraus:

$$\tau = \frac{T_1 - T_2}{2};\ \text{ist}\ \gamma\ \text{die Lichtgeschwindigkeit, so ergibt sich}\ \gamma\tau = 2r$$

und

$$1) \ldots r = \gamma \frac{T_1 - T_2}{4};\ \text{ferner}\ r\pi = k\tau;\ \ 2) \ldots k = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}\gamma\frac{\pi}{2};$$

womit aber die Elemente bestimmt sind. Wäre nun noch eine Parallaxe gegeben, so hätte man auch die Entfernung, da der Radius der Bahn bekannt ist.

2. Unabhängig von der Savary'schen Methode findet man die Bahnelemente auch auf eine andere Art:

Bedeutet λ' die kleinste, λ'' die grösste, λ die mittlere Wellenlänge, T die halbe Umlaufszeit, so ist

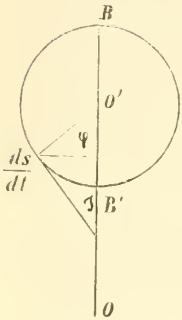
$$\lambda' = \lambda\frac{\gamma - k}{\gamma};\ \ \lambda' = \lambda\frac{\gamma + k}{\gamma};\ \ \lambda = \frac{\lambda'' + \lambda'}{2};$$

also: $k = \gamma \frac{\lambda''-\lambda'}{\lambda''+\lambda'}$; . . . . 1)

und da $cT = r\pi$; $r = \frac{\gamma T}{\pi} \cdot \frac{\lambda''-\lambda'}{\lambda''+\lambda'}$; . . . . 2)

3. Halten wir die früheren Voraussetzungen fest und nehmen wir an, wir wollten blos einen Theil der Farbenperiode beobachten.

Fig. 6.



Durch die Projection der Geschwindigkeit auf $O'O$ ist die Farbe bestimmt und umgekehrt kennt man die Farbe, so hat man auch die Geschwindigkeits-Projection; diese ist $c = \frac{ds}{dt} \cos \tau$, worin ds das Bogenelement bedeutet. Da nun für den Kreis $\frac{ds}{dt} = k$ und $\cos \tau = \sin \varphi = \sin \frac{kt}{r}$ ist, so hat man $c = k \sin \frac{kt}{r}$.

In B' hat c als Curve betrachtet einen Wendepunkt; von dem Augenblicke des durch Beobachtung gefundenen Wendepunktes wollen wir die Zeit t zählen. Wir erhalten unsere Formeln in sehr einfacher geschlossener Form, wenn wir bei der Zeit t und $2t$ beobachten.

$$c' = k \,.\, \sin \frac{kt}{r}; \quad c'' = k \,.\, \sin \frac{2kt}{r} = 2k \,.\, \sin \frac{kt}{r} \cos \frac{kt}{r};$$

und $$\frac{c''}{2c'} = \cos \frac{kt}{r}; \quad \frac{k}{r} = \frac{1}{t} \, Arc \cos \left(\frac{c''}{2c'}\right);$$

also: $k = \frac{c'}{\sin \frac{kt}{r}} = \frac{2c'^2}{\sqrt{4c'^2 - c''^2}}$; . . . . 1)

$$r = \frac{2c'^2 t}{\sqrt{4c'^2 - c''^2} \, Arc \cos \left(\frac{c''}{2c'}\right)}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Hat man nun bei Wellenlängen beobachtet, welche von der mittleren nicht weit abstehe, so hat man k und r näherungsweise bestimmt und man kann die Correction wegen der Lichtverzögerung bei der Bewegung des Sternes anbringen.

Der Weg, den das Licht bei der Fortbewegung des Sternes mehr zu durchlaufen hat, ist: $s = r\ (1 - \cos\varphi) = \gamma\,\tau$; und die Verzögerung:

$$\tau = \frac{r}{\gamma}\left\{1 - \cos\frac{kt}{r}\right\};$$

die wahre Zeit $t = t' - \tau$, wobei t' die beobachtete Zeit bedeutet. Man hat nun

$$t = t' - \frac{r}{\gamma}\left\{1 - \cos\frac{kt'}{r}\right\},$$

wobei man, um das wahre t zu finden, annäherungsweise r, k, t einsetzt, mit der richtigeren Zeit t_1, t_2, t_3; wiederholt man nun die Rechnung und bestimmt, wie gewöhnlich, aus linearen Gleichungen die Fehler x, ρ von k, r, indem man die höheren Potenzen vernachlässigt.

II. Auf ähnliche Weise verfährt man, wenn man eine elliptische Bahn zu bestimmen hat, die sich dem Kreise nähert. Man rechnet die Elemente für den Kreis und fügt die Correction hinzu.

III. Schwieriger ist die Rechnung bei einem Kegelschnitte im Allgemeinen, denn man hat hier mehrere transcendente Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Es bleibt in diesem Falle nichts übrig als ein systematisches schnell zum Ziele führendes Tatonnement zu suchen.

Im Allgemeinen ist es wahrscheinlich, dass wir es bei farbigen Sternen nicht mit Kegelschnitten zu thun haben, sondern mit anderen ähnlichen Bahnen, weil man der schnellen Bewegung wegen auf den Widerstand im Äther Rücksicht nehmen muss. Auch kann sich ein Stern um einen anderen, mit diesem um einen dritten u. s. f. bewegen, wo wir alsdann eine Farbenperiode erhalten werden, welche wieder mehrere kleinere Perioden enthält.

Nach einer kurzen Überlegung sieht man ein, wie wichtig die eben eingeführte Anwendung der Doppler'schen Theorie ist; denn dieses Mittel wird zur Erweiterung der Astronomie eben erst da anwendbar, wo die übrigen aufhören es zu sein. Es werden uns Gegenden des Himmels aufgeschlossen und unserem Wissen näher gebracht, von deren Verhalten wir früher keine Ahnung haben konnten. Werfen wir einen Blick auf den Himmel, so sehen wir Dinge, die längst nicht mehr so sind, wie sie sich uns darstellen; wir nehmen nur Ungleichzeitiges wahr. Wird die Anwendung unserer Theorie durchgeführt sein, so ist uns erst damit die wahre Anordnung der im Weltraume vertheilten Körper gegeben.

Zum Schlusse fühle ich mich noch verpflichtet dem Director des k. k. physikalischen Institutes, Herrn Regierungsrath Ritter v. Ettingshausen, hier meinen Dank für die Unterstützung bei dieser Arbeit auszusprechen.