Über Prof. A. Müller's Discussionsmethode der algebraischen Flächen höherer Ordnungen.

Von dem w. M. **Prof. J. Petzval.**

(Vorgelegt in der Sitzung vom 5. Juli 1860.)

Prof. Anton Müller von Zürich hat im Jahre 1857 der kaiserlichen Akademie eine Abhandlung über die algebraischen Curven der unbestimmten n^{ten} Ordnung vorgelegt und ich habe im Auftrage dieser Körperschaft einen Bericht, der sich in den Sitzungsberichten Band XXIX. Seite 40 vorfindet, erstattet und diese verdienstvolle Arbeit zur Aufnahme in die Denkschriften empfohlen, allwo sie im Bande XIX erscheinen wird. Im Jahre 1858 hat Müller seine Untersuchungen auch auf die algebraischen Flächen unbestimmter n^{ten} Ordnung ausgedehnt und die Grundzüge seiner Methode in einem Schreiben mir mitgetheilt. Nachdem nun mittlerweile Müller von seinen wissenschaftlichen Bestrebungen durch den Tod abberufen worden ist, wird die letzterwähnte Mittheilung zu einem Vermächtniss an das gesammte wissenschaftliche Publicum und ich glaube nur meine Pflicht zu erfüllen, wenn ich sie der mathem.-naturw. Classe zur Aufnahme in ihre Sitzungsberichte vorlege. Möge dieser schöne Gegenstand sehr bald einen jungen rüstigen Bearbeiter finden, der, mit gleicher Beharrlichkeit in die Fussstapfen seines Vorgängers tretend, denselben zu dem gewünschten Abschlusse bringt.

Die Mittheilung lautet: Die Begriffe Fläche und Flächen-Aggregat betrachte ich als untergeordnet dem höheren Begriff Flächengebilde, und trenne daher die Eigenschaften der Flächengebilde von jenen, welche den Flächen als solchen zukommen. Die Untersuchung beginnt mit der Bildung der Segmentengleichung. Es wird vorausgesetzt, das Flächengebilde $\mathfrak{F}$ der n^{ten} Ordnung werde von einer Transversalen TT durchschnitten. TT bilde mit den Axen der xyz die Winkel uvw, in TT sei ein Punkt O durch seine Coordinaten $\xi\eta\zeta$ angenommen, und r sei das zwischen $\xi\eta\zeta$ und dem gemeinsamen Punkte xyz

von TT und $\mathfrak{F}$ liegende Segment. Werden nun mit UVW die Cosinus der Winkel uvw bezeichnet, so bestehen die Gleichungen

$$x = \xi + rU \quad , \quad y = \eta + rV \quad , \quad z = \zeta + rW$$

und durch die Substitution dieser Werthe in der Gleichung $F=0$ von $\mathfrak{F}$ erhält man den Satz

$$F_n \, . \, r^n + F_{n-1} \, . \, r^{n-1} + \ldots . + F_1 \, . \, r + F = 0 \qquad (\Sigma)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung bezeichne man mit $r_1 \, r_2 \ldots . \, r_n$, so ist

$$(r_1 \, r_2 \ldots . \, r_n)^{(q)} = (-1)^q \, . \, \frac{F_{n-q}}{F_n}.$$

Diesem Satze zufolge wird, wenn man O in TT so annimmt, dass

$$(r_1 \, r_2 \ldots r_n)^{(q)} = 0$$

ist, der Punkt O der Durchschnitt von TT und dem durch die Gleichung

$$F_{n-q} = 0 \qquad (\mathfrak{D}_q)$$

angegebenen Flächengebilde der q^{ten} Ordnung. Dieses Flächengebilde $\mathfrak{D}_q$ nenne ich den zu $u\,v\,w$ gehörigen Diameter q^{ter} Ordnung des Flächengebildes $\mathfrak{F}$.

Für den zu $u\,v\,w$ gehörigen Diameter $\mathfrak{D}_{n-p}$ hat man die Gleichung $F_p=0$, oder

$$\sum_{0}^{p}{}_{\beta} \sum_{0}^{p-\beta}{}_{\alpha} \frac{U^{p-\alpha-\beta} \, . \, V^{\alpha} \, . \, W^{\beta}}{1^{p-\alpha-\beta|1} \, . \, 1^{\alpha|1} \, . \, 1^{\beta|1}} \, . \, \frac{d^p F}{d\xi^{p-\alpha-\beta} \, . \, d\eta^{\alpha} \, . \, d\zeta^{\beta}} = 0 \qquad (\mathfrak{D}_{n-p})$$

In dem Systeme der Diameter $\mathfrak{D}_{n-p}$ schneiden je zwei einander in einem ebenen oder unebenen Liniengebilde; drei derselben aber gehen mit einander durch einen oder mehrere Punkte. Ob mehr als drei Diameter $\mathfrak{D}_{n-p}$ mit einander durch einen Punkt gehen, hängt von der Beschaffenheit des Systems dieser Diameter ab.

Um für die Richtungen solcher Transversalen, deren zugehörige Diameter $\mathfrak{D}_{n-p}$ mit einander durch einen Punkt gehen, einen einfachen Gesetzes-Ausdruck zu gewinnen, setze man einen Punkt $\xi\eta\zeta$ als gemeinsamen Punkt so vieler Diameter $\mathfrak{D}_{n-p}$, als durch denselben gehen können, voraus; ferner nehme man eine Ebene $\mathfrak{A}$ parallel zur Ebene der Coordinaten $\xi\eta$, und in einer beliebigen Distanz t von dieser Coordinatenebene zu Hilfe, endlich nehme man an, eine Transversale TT, deren zugehöriger Diameter $\mathfrak{D}_{n-p}$ durch $\xi\eta\zeta$ geht, sei durch den Anfangspunkt der Coordinaten gelegt, schneide die Ebene $\mathfrak{A}$ im Punkte xy, und bilde mit den Axen der Coordinaten $\xi\eta\zeta$ die Winkel uvw. Unter diesen Voraussetzungen ist $U = \frac{x}{t}\, W$, $V = \frac{y}{t}\, W$, und wenn man diese Werthe in der obigen Gleichung einführt, so entspringt die Gleichung

$$\sum_{0}^{p}{}_{\beta} \sum_{0}^{p-\beta}{}_{\alpha} \frac{x^{p-\alpha-\beta}.y^{\alpha}.t^{\beta}}{1^{p-\alpha-\beta|1}.\,1^{\alpha|1}.\,1^{\beta|1}} \cdot \frac{d^p F}{d\xi^{p-\alpha-\beta}.d\eta^{\alpha}.d\zeta^{\beta}} = 0 \qquad (\mathfrak{aa})$$

Hierin sind die p^{ten} Differentiale von F wegen der gegebenen Werthe von $\xi\eta\zeta$ constant; auch t ist eine constante Grösse. Demnach gibt die vorstehende Gleichung ein Liniengebilde $\mathfrak{aa}$ der p^{ten} Ordnung an, das in der Ebene $\mathfrak{A}$ liegt. Daraus geht hervor, dass eine Transversale, deren zugehöriger Diameter $\mathfrak{D}_{n-p}$ durch den vorausgesetzten Punkt geht, in einer Kegelfläche liegt, von welcher das Liniengebilde $\mathfrak{aa}$ die Basis, der Anfangspunkt der Coordinaten aber die Spitze ist.

In Bezug auf die Diameter $\mathfrak{D}_{n-1}$ wird das Gebilde $\mathfrak{aa}$ eine gerade Linie, die Kegelfläche also eine Ebene. Daher folgt: die Transversalen, deren zugehörige Diameter $\mathfrak{D}_{n-1}$ durch einen gegebenen Punkt gehen, sind alle mit einander zu einer und derselben Ebene parallel.

Es seien nun TT, T_1T_1, T_2T_2 drei zu einerlei Ebene parallele Transversalen, die aber unter einander nicht parallel sind; ferner seien uvw, $u_1v_1w_1$, $u_2v_2w_2$ die Winkel, welche diese Transversalen mit den Coordinatenaxen bilden, und UVW, $U_1V_1W_1$, $U_2V_2W_2$ die Cosinus der genannten Winkel, so besteht der Satz

$$U(V_1W_2 - V_2W_1) - V.(U_1W_2 - U_2W_1) + W.(U_1V_2 - U_2V_1) = 0.$$

Nun ist die Gleichung des zu TT gehörigen Diameters $\mathfrak{D}_{n-1}$

$$U \cdot \frac{dF}{d\xi} + V \cdot \frac{dF}{d\eta} + W \cdot \frac{dF}{d\zeta} = 0$$

und wenn man den Werth von W aus der vorangehenden Gleichung hier einführt, so ergibt sich der Satz

$$\begin{aligned} 0 = (U.V_2 - U_2V) . \left(U_1 \cdot \frac{dF}{d\xi} + V_1 \cdot \frac{dF}{d\eta} + W_1 \cdot \frac{dF}{d\zeta}\right) \\ - (UV_1 - U_1V) . \left(U_2 \cdot \frac{dF}{d\xi} + V_2 \cdot \frac{dF}{d\eta} + W_2 \cdot \frac{dF}{d\zeta}\right) \end{aligned}$$

Hiernach kommen dem zu TT gehörigen Diameter $\mathfrak{D}_{n-1}$ alle Punkte zu, deren Coordinaten den Gleichungen

$$U_1 \cdot \frac{dF}{d\xi} + V_1 \cdot \frac{dF}{d\eta} + W_1 \cdot \frac{dF}{d\zeta} = 0$$

$$U_2 \cdot \frac{dF}{d\xi} + V_2 \cdot \frac{dF}{d\eta} + W_2 \cdot \frac{dF}{d\zeta} = 0$$

genügen. Diese Gleichungen geben aber die zu $T_1 T_1$ und $T_2 T_2$ gehörigen Diameter $\mathfrak{D}_{n-1}$ an, und diese Diameter schneiden einander in einer ebenen oder unebenen Linie (= Liniengebilde). Demnach gehen die drei zu TT, $T_1 T_1$, $T_2 T_2$ gehörigen Diameter $\mathfrak{D}_{n-1}$ mit einander durch eine und dieselbe Linie. Hieraus folgt: Alle Diameter $\mathfrak{D}_{n-1}$, welche zu solchen Transversalen gehören, die zu einer und derselben Ebene parallel sind, schneiden einander in einer und derselben Linie.

Es heisse E die Ebene, zu welcher jene Transversalen parallel sind, deren zugehörige Diameter $\mathfrak{D}_{n-1}$ einander in einer Linie schneiden, und diese Linie werde mit zz bezeichnet; endlich sei O ein Punkt in zz. Man lege eine zur Ebene E parallele Transversale TT durch O, so geht der zu TT gehörige Diameter $\mathfrak{D}_{n-1}$ auch durch O. Wenn also $r_1\, r_2 \ldots r_n$ die Segmente sind, welche in TT liegen, und von O an bis zu den gemeinsamen Punkten von TT und dem Flächengebilde $\mathfrak{F}$ gerechnet werden, so ist

$$(r_1\, r_2 \ldots r_n)^{(n-1)} = 0.$$

Dieser Satz ist anwendbar auf die Segmente in jeder zur Ebene E parallelen Transversalen, welche durch O geht, weil zu jeder solchen Transversalen ein Diameter $\mathfrak{D}_{n-1}$ gehört, der ebenfalls durch O geht.

Alle zur Ebene E parallelen Transversalen, welche durch O gehen, liegen aber in einer zu E parallelen Ebene e, und diese schneidet das Flächengebilde $\mathfrak{F}$ in einem Liniengebilde L. Dieses Gebilde L wird von einer zu E parallelen Transversalen TT, welche durch O gelegt ist, in den gemeinsamen Punkten von TT und $\mathfrak{F}$ geschnitten. Weil nun zwischen den in TT liegenden Segmenten $r_1\, r_2 \ldots r_n$ die vorangehende Gleichung besteht, so folgt, dass O ein Punkt des zu TT gehörigen Diameters der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung von dem Gebilde L ist. Die erwähnte Relation zwischen $r_1\, r_2 \ldots$ gilt aber für die

Segmente in jeder Transversalen, welche durch O geht, und zur Ebene E parallel ist, und zu jeder solchen Transversalen gehört ein Diameter $(n-1)^{ter}$ Ordnung des Gebildes L. Daher ist O ein gemeinsamer Punkt aller Diameter $(n-1)^{ter}$ Ordnung des Schnittes L, folglich ein Mittelpunkt von L.

Die Voraussetzung in Betreff der Ebenen E und e, der Linie zz und des Punktes O soll fortbestehen, dabei soll aber angenommen werden, dass das Gebilde $\mathfrak{F}$ eine Fläche sei, so dass der Schnitt L eine Curve in der Ebene e wird. Die Linie zz schneidet die Fläche $\mathfrak{F}$ möglicher Weise in einem oder in mehreren Punkten. Es sei O einer von diesen Punkten, so wird jede Transversale TT, welche parallel zu E ist und durch O geht, eine Tangente der Fläche $\mathfrak{F}$, mithin die Ebene e, in welcher diese Transversalen liegen, eine tangirende Ebene von $\mathfrak{F}$. Die Curve L, in welcher die Fläche $\mathfrak{F}$ von der tangirenden Ebene e geschnitten wird, geht auch durch den Punkt O, weil O in der Fläche $\mathfrak{F}$ und in der Ebene e liegt. Da nun O, als Punkt der Linie zz, ein Mittelpunkt von L ist, so wird der Berührungspunkt O ein Doppelpunkt der Curve L. Man hat also den allgemeinen Satz: Der Punkt, in welchem eine Fläche von einer Ebene tangirt wird, ist ein Doppelpunkt der Curve, in welcher die Fläche von der tangirenden Ebene geschnitten wird.

Ein Doppelpunkt einer ebenen Curve ist entweder Durchschnittspunkt zweier Zweige der Curve, oder aber ein isolirter Punkt derselben. Wenn also die Fläche $\mathfrak{F}$ von der Ebene e in O tangirt und in der Curve L geschnitten wird, so ist O entweder Durchschnittspunkt zweier Zweige der Curve L, oder ein isolirter Punkt derselben.

Man nehme zuerst an, es sei O der Durchschnittspunkt zweier Zweige der Curve L. Unter dieser Voraussetzung sind in O zwei Wendepunkte der Curve L vereinigt, und es kommen der Curve L in O zwei Wendetangenten zu. Sind tt und $t_1 t_1$ diese Wendetangenten, so hat sowohl tt als $t_1 t_1$ in O mit der Curve L drei Punkte gemein. Diese Punkte sind aber Punkte der Fläche $\mathfrak{F}$, daher verschwinden drei von den in tt liegenden Segmenten, und ebenso drei von jenen, welche in $t_1 t_1$ liegen. Sind also $r_1 r_2 \dots r_n$ die Segmente in tt, so ist

$$(r_1 r_2 \dots r_n)^{(n-2)} = 0,$$

weil jedes Product dieser Summe verschwindet; eben dieser Satz gilt, wenn $r_1 r_2 \dots r_n$ die Segmente in $t_1 t_1$ sind. Daraus folgt, dass die zu tt und $t_1 t_1$ gehörigen Diameter $\mathfrak{D}_{n-2}$ der Fläche F mit einander durch den Punkt O gehen. Durch eben diesen Punkt gehen aber auch die zu tt und $t_1 t_1$ gehörigen Diameter $\mathfrak{D}_{n-1}$. Ist also der Punkt O durch seine Coordinaten $\xi \eta \zeta$ gegeben, und nennt man $u v w$, $u_1 v_1 w_1$ die von tt und $t_1 t_1$ mit den Coordinatenaxen gebildeten Winkel, so hat man für die Angabe von $u v w$ die zwei Gleichungen

$$U \cdot \frac{dF}{d\xi} + V \cdot \frac{dF}{d\eta} + W \cdot \frac{dF}{d\zeta} = 0$$

$$U^2 \frac{d^2F}{d\xi^2} + 2\,UV \frac{d^2F}{d\xi\, d\eta} + V^2 \frac{d^2F}{d\eta^2} + 2\,UW \frac{d^2F}{d\xi\, d\zeta} + 2\,VW \frac{d^2F}{d\eta\, d\zeta} + W^2 \frac{d^2F}{d\zeta^2} = 0$$

und für $u_1 v_1 w_1$ zwei ähnliche Gleichungen.

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt aber, wenn V eliminirt wird,

$$0 = \left(\frac{U}{W}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2 \cdot \frac{d^2F}{d\eta^2} - 2 \cdot \frac{dF}{d\xi} \cdot \frac{dF}{d\eta} \cdot \frac{d^2F}{d\xi\, d\eta} + \left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 \cdot \frac{d^2F}{d\xi^2}\right]$$
$$+ 2\frac{U}{W}\left[\frac{dF}{d\xi}\frac{dF}{d\zeta}\frac{d^2F}{d\eta^2} - \frac{dF}{d\xi}\frac{dF}{d\eta}\frac{d^2F}{d\eta\, d\zeta} - \frac{dF}{d\eta}\frac{dF}{d\zeta}\frac{d^2F}{d\xi\, d\eta} + \left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2F}{d\xi\, d\zeta}\right]$$
$$+ \left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 \cdot \frac{d^2F}{d\zeta^2} - 2 \cdot \frac{dF}{d\eta} \cdot \frac{dF}{d\zeta} \cdot \frac{d^2F}{d\eta\, d\zeta} + \left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2 \cdot \frac{d^2F}{d\eta^2}$$

und wenn man hierin ξ und η mit einander vertauscht, so tritt $\frac{V}{W}$ an die Stelle von $\frac{U}{W}$. Man erhält also, wenn zur Abkürzung

$$A = \frac{dF}{d\xi}\frac{dF}{d\zeta}\frac{d^2F}{d\eta^2} - \frac{dF}{d\xi}\frac{dF}{d\eta}\frac{d^2F}{d\eta\, d\zeta} - \frac{dF}{d\eta}\frac{dF}{d\zeta}\frac{d^2F}{d\xi\, d\eta} + \left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 \frac{d^2F}{d\xi\, d\zeta}$$

$$B = \frac{dF}{d\eta}\frac{dF}{d\zeta}\frac{d^2F}{d\xi^2} - \frac{dF}{d\xi}\frac{dF}{d\eta}\frac{d^2F}{d\xi\, d\zeta} - \frac{dF}{d\xi}\frac{dF}{d\zeta}\frac{d^2F}{d\xi\, d\eta} + \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2 \frac{d^2F}{d\eta\, d\zeta}$$

$$N = \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2 \cdot \frac{d^2F}{d\eta^2} - 2 \cdot \frac{dF}{d\xi} \cdot \frac{dF}{d\eta} \cdot \frac{d^2F}{d\xi\, d\eta} + \left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 \cdot \frac{d^2F}{d\xi^2}$$

$$R = \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^2 \left[\left(\frac{d^2F}{d\eta\, d\zeta}\right)^2 - \frac{d^2F}{d\eta^2}\frac{d^2F}{d\zeta^2}\right] + 2\,\frac{dF}{d\xi}\,\frac{dF}{d\eta}\left[\frac{d^2F}{d\xi\, d\eta}\,\frac{d^2F}{d\zeta^2} - \frac{d^2F}{d\xi\, d\eta}\,\frac{d^2F}{d\eta\, d\zeta}\right]$$

$$+ \left(\frac{dF}{d\eta}\right)^2 \left[\left(\frac{d^2F}{d\xi\, d\zeta}\right)^2 - \frac{d^2F}{d\xi^2}\frac{d^2F}{d\zeta^2}\right] + 2\,\frac{dF}{d\xi}\,\frac{dF}{d\zeta}\left[\frac{d^2F}{d\xi\, d\zeta}\,\frac{d^2F}{d\eta^2} - \frac{d^2F}{d\xi\, d\eta}\,\frac{d^2F}{d\eta\, d\zeta}\right]$$

$$+ \left(\frac{dF}{d\zeta}\right)^2 \left[\left(\frac{d^2F}{d\xi\, d\eta}\right)^2 - \frac{d^2F}{d\xi^2}\frac{d^2F}{d\eta^2}\right] + 2\,\frac{dF}{d\eta}\,\frac{dF}{d\zeta}\left[\frac{d^2F}{d\eta\, d\zeta}\,\frac{d^2F}{d\xi^2} - \frac{d^2F}{d\xi\, d\eta}\,\frac{d^2F}{d\xi\, d\zeta}\right]$$

gesetzt wird, die Werthbestimmungen

$$\frac{U}{W}N = -A \pm \frac{dF}{d\eta}\sqrt{R}; \quad \frac{V}{W}N = -B \pm \frac{dF}{d\xi}\sqrt{R}.$$

Auf ganz gleichem Wege kann man auch $\frac{U_1}{W_1}$ und $\frac{V_1}{W_1}$ bestimmen, aber man gelangt dabei ebenfalls zu den vorstehenden Werthen. Demnach bezieht sich von den zwei Werthen der Grösse $\frac{U}{W}$ der eine auf die gerade Linie tt, der andere auf $t_1 t_1$, und dasselbe gilt von den zwei Werthen der Grösse $\frac{V}{W}$. Verbindet man endlich die Werthe der Grössen $\frac{U}{W}$ und $\frac{V}{W}$ in jedem Falle mit dem Satze $U^2 + V^2 + W^2 = 1$, so ergeben sich die Werthe der einzelnen Grössen UVW, $U_1 V_1 W_1$.

Hiernach kann man also für jeden Punkt O der Fläche $\mathfrak{F}$ die Richtungen von zwei geraden Linien tt und $t_1 t_1$ bestimmen, welche in der zu O gehörigen tangirenden Ebene liegend, durch O gehen, und von denen jede in O einen relativ dreifachen Punkt mit der Fläche $\mathfrak{F}$ gemein hat.

Es ist aber nicht zu übersehen, dass die Doppelwerthe von $\frac{U}{W}$ und $\frac{V}{W}$ nur für jeden solchen Punkt O der Fläche $\mathfrak{F}$ reell sind, in Bezug auf welchen die Grösse R positiv wird, und dass bei einem negativen R die genannten Doppelwerthe imaginär werden. In so fern also die Grösse R in Bezug auf die verschiedenen Punkte der Fläche $\mathfrak{F}$ bald positive, bald negative Werthe hat, befinden sich in $\mathfrak{F}$ solche Punkte O, deren jedem zwei gerade Linien tt und $t_1 t_1$ der bezeichneten Art zukommen, aber auch solche Punkte O, von denen keiner solche zwei gerade Linien hat.

Wenn aber die Grösse R bald positiv, bald negativ ist, so kommen auch solche Punkte O in der Fläche $\mathfrak{F}$ vor, in Bezug auf welche $R = 0$ ist. Durch diese Gleichung wird eine Fläche der $(4n-6)^{\text{ten}}$ Ordnung angegeben, und diese durchschneidet möglicher Weise die

Fläche $\mathfrak{F}$ in einer ebenen oder unebenen Curve $\lambda\lambda$. Hierdurch wird die Fläche $\mathfrak{F}$ je nach der Beschaffenheit von $\lambda\lambda$, in zwei oder mehrere Theile von verschiedenartiger Beschaffenheit getheilt. In den Theilen der einen Art ist die Fläche $\mathfrak{F}$ so beschaffen, dass zu jedem Punkte O derselben zwei gerade Linien $\mathfrak{t}\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_1$ bestimmbar sind, welche in der zu O gehörigen tangirenden Ebene liegend, mit $\mathfrak{F}$ in O relativ dreifache Punkte gemein haben; in den Theilen der anderen Art ist die Fläche $\mathfrak{F}$ aber so beschaffen, dass ohne Ausnahme jede gerade Linie, welche in einer tangirenden Ebene eines solchen Theiles liegend, durch den Berührungspunkt O geht, mit der Fläche in O lediglich einen relativ zweifachen Punkt gemein hat. Ein Flächenstück der ersten Art soll mit $\mathfrak{f}\mathfrak{f}$, ein Flächenstück der zweiten Art mit $\mathfrak{g}\mathfrak{g}$ bezeichnet werden.

Weil für jeden Punkt O der Curve $\lambda\lambda$ die zwei zugehörigen geraden Linien $\mathfrak{t}\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}_1\mathfrak{t}_1$ zusammen fallen, so kann man die verschiedenen Theile der Fläche $\mathfrak{F}$ und die Grenze $\lambda\lambda$ dieser Theile folgender Massen charakterisiren. In einem Flächentheile $\mathfrak{f}\mathfrak{f}$ geht die Curve L, in welcher die Fläche $\mathfrak{F}$ von einer tangirenden Ebene des Theiles $\mathfrak{f}\mathfrak{f}$ geschnitten wird, mit zweien ihrer Zweige durch den Berührungspunkt O; fällt O in die Grenzcurve $\lambda\lambda$, so bilden die zwei Zweige von L bei ihrem Zusammentreffen in O eine Spitze; in einem Flächentheile $\mathfrak{g}\mathfrak{g}$ dagegen löst sich der Berührungspunkt O als isolirter Punkt von dem übrigen Theile der Curve L ab. Ein Flächentheil $\mathfrak{f}\mathfrak{f}$ besteht daher aus Wellen; diese verflachen sich bei ihrer Annäherung an die Grenze $\lambda\lambda$, und jenseits dieser Grenze in einem Flächentheile $\mathfrak{g}\mathfrak{g}$ tritt eine Glattheit der Fläche $\mathfrak{F}$ ein, wie bei den Flächen der zweiten Ordnung.

Da die Grenzlinie $\lambda\lambda$ nicht zwei gleichartige Flächentheile trennen kann, so bilden entweder die Theile $\mathfrak{f}\mathfrak{f}$ ein Continuum, in welchem die Theile $\mathfrak{g}\mathfrak{g}$ inselartig liegen, oder die Theile $\mathfrak{g}\mathfrak{g}$ sind zu einem continuirlichen Ganzen vereinigt, in dem die Theile $\mathfrak{f}\mathfrak{f}$ sporadisch umherliegen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1860

Band/Volume: 41

Autor(en)/Author(s): Petzval Joseph Maximilian

Artikel/Article: Über Prof. A. Müller's Discussionsmethode der algebraischen flächen höherer Ordnungen. 735-742