Die Axen der Linien zweiter Ordnung in allgemeinen trimetrischen Punkt-Coordinaten.

Von **Dr. Otto Stolz.**

Im XXII. Bande der Nouv. Ann. de Math. (1863) p. 289 ff., findet sich ein Auszug aus einem Mémoire von Faure: „sur les coordonnées trilinéaires", worin unter Anderem Ausdrücke für die Summe und das Product der Quadrate der Halbaxen eines Kegelschnittes angeführt sind. Dieselben Ausdrücke sind auch das hauptsächliche Ergebniß des vorliegenden Aufsatzes, der unabhängig von jener Abhandlung entstand. Wenn derselbe dennoch einer hohen kaiserlichen Akademie der Wissenschaften vorgelegt wird, so ist der Grund davon in der Ansicht des Verfassers zu suchen, daß derselbe immerhin eine nicht unwesentliche Ergänzung zu Faure's Arbeit bilden dürfte. Während sich dieselbe nur auf orthogonale Coordinaten erstreckt — die allerdings am häufigsten angewendet werden und auf welche sich nach dem Vorgange Plücker's (System der analytischen Geometrie p. 7) auch die Betrachtung allgemeiner trimetrischer Coordinaten zurückführen läßt, — so wird doch im Folgenden eine derartige Beschränkung vermieden. Denn ist dieselbe bei vielen Untersuchungen an sich lästig genug, so bietet sie im vorliegenden Falle den weit größern Nachtheil, daß die Hauptgleichung (24) wegen der zusammengezogenen Form des Coëfficienten von λ einer erschöpfenden Discussion nicht unterzogen werden kann. In der That glauben wir durch die Form, die wir dem genannten Coëfficienten ertheilen, über die oben erwähnte Abhandlung hinausgegangen zu sein. Wir werden dadurch nicht nur in den Stand gesetzt, Ferrers' Bedingungen, daß die allgemeine Gleichung II. Grades in trimetrischen Coordinaten einen Kreis darstelle, unmittelbar abzuleiten, sondern auch die Untersuchung über die verschiedenen Arten der Örter zweiter Ordnung zum Abschlusse zu bringen, so daß eine Vergleichung mit dem üblichen Schema derselben möglich wird. Dagegen genügt der bloße Anblick des von Faure gegebenen

Coëfficienten, um einzusehen, daß derselbe nicht ohne beträchtliche Schwierigkeit den zu diesem Zwecke nöthigen Transformationen zugänglich sei.

Was den Gang des Aufsatzes betrifft, so schien es, indem die Axen der Kegelschnitte als Maximum und Minimum der Durchmesser aufgefaßt werden, zweckmäßig, eine allgemeine Darstellung der Entfernung zweier Punkte in trimetrischen Coordinaten vorauszuschicken, wie sie sich meist nur angedeutet, ohne die wesentlichen Punkte hervortreten zu lassen, findet.

1. Der durch zwei gegebene Punkte M' und M'' begrenzten geradlinigen Strecke, die wir mit d bezeichnen, kommen vermöge ihres Begriffes folgende Eigenschaften zu: sie kann in zwei entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden, besitzt also zwei entgegengesetzte Werthe; sie hängt in derselben Weise vom Punkte M', wie von M'' ab; sie verschwindet endlich, wenn beide Punkte zusammenfallen. Durch unmittelbare Übertragung dieser Merkmale in die Ausdrucksweise der Analysis werden wir d als Function irgend welcher Coordinaten der Endpunkte darstellen können. Beschränken wir uns hiebei auf trilineare Coordinaten, so wird d^2 als Ausdruck zweiter Dimension in Bezug auf dieselben erscheinen, und zwar speciell als Function der Coordinatendifferenzen. Macht man über die Lage der begrenzenden Punkte keine besonderen Voraussetzungen, so ist d^2 bezüglich der drei Coordinaten homogen. Fassen wir dies zusammen, so ergibt sich, daß d^2 durch eine vollständige homogene Function zweiten Grades der Coordinatendifferenzen dargestellt werde. Es wird sich nur darum handeln, die Constanten derselben entsprechend zu bestimmen.

Sind x, y rechtwinkelige cartesianische Coordinaten, so werden die allgemeinen trimetrischen Coordinaten p, q, r durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} p &= ax + by + c \\ q &= a'x + b'y + c' \\ r &= a''x + b''y + c'' \end{aligned} \tag{1}$$

eingeführt. Eliminiren wir aus diesen Gleichungen x, y, so erhalten wir als identische Gleichung des Systemes

$$\gamma p + \gamma' q + \gamma'' r = S \tag{2}$$

worin

$$\begin{Bmatrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{Bmatrix} = S$$

und die adjungirten Elemente der 3. Columne von S

$$a'b''-a''b' = \gamma', \quad a''b-ab'' = \gamma', \quad ab'-a'b = \gamma''$$

gesetzt wurden.

Sind nun die Coordinaten von M', M'' beziehungsweise $p'q'r'$; $p''q''r''$, so ist nach dem vorausgehenden

$$\begin{aligned} d^2 = k\,(p'-p'')^2 + l\,(q'-q'')^2 + m\,(r'-r'')^2 + 2k'(q'-q'')\,(r'-r'') \\ + 2l'(r'-r'')\,(p'-p'') + 2m'(p'-p'')\,(q'-q'') \end{aligned} \tag{3}$$

zu setzen. Die 6 Constanten $k, l, \ldots . m'$ sind so zu bestimmen, daß der Ausdruck (3) zur Darstellung der Seiten des Fundamental-Dreieckes

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 0,$$

welche übereinstimmend mit den Geraden, in die sie fallen, mit P, Q, R bezeichnet werden, gebraucht werden könne. Es sind, wie man leicht sieht:

$$P^2 = \frac{S^2(a^2+b^2)}{\gamma'^2\gamma''^2} \qquad Q^2 = \frac{S^2(a'^2+b'^2)}{\gamma''^2\gamma^2}, \qquad R^2 = \frac{S^2(a''^2+b''^2)}{\gamma^2\gamma'^2}.$$

Ferner sind die Coordinaten der Ecken des Fundamental-Dreieckes nach (2)

$$\begin{array}{lll} p = 0 & q = 0 & r = \dfrac{S}{\gamma''} \\ p = 0 & q = \dfrac{S}{\gamma'}, & r = 0 \\ p = \dfrac{S}{\gamma}, & q = 0 & r = 0. \end{array}$$

Wendet man also den Ausdruck (3) auf die Längen P, Q, R an, so erhält man die drei Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{a^2+b^2}{\gamma'^2\gamma''^2} &= \frac{l}{\gamma'^2}+\frac{m}{\gamma''^2}-\frac{2k'}{\gamma'\gamma''}\\
\frac{a'^2+b'^2}{\gamma''^2\gamma^2} &= \frac{m}{\gamma''^2}+\frac{k}{\gamma^2}-\frac{2l'}{\gamma''\gamma}\\
\frac{a''^2+b''^2}{\gamma^2\gamma'^2} &= \frac{k}{\gamma^2}+\frac{l}{\gamma'^2}-\frac{2m'}{\gamma\gamma'}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Somit bleiben von den 6 Constanten k, $l, \ldots . m'$ drei völlig unbestimmt. Es liegt nahe, dieselben so zu bestimmen, daß in (3) die Producte der Coordinaten-Differenzen verschwinden; wir erhalten

$$d^2 = -\frac{a'a''+b'b''}{\gamma'\gamma''}(p'-p'')^2 - \frac{a''a+b''b}{\gamma''\gamma}(q'-q'')^2 - \frac{aa'+bb'}{\gamma\gamma'}(r'-r'')^2. \tag{5}$$

Diese Form von d^2 findet sich bei Salmon (Analytische Geometrie der Kegelschnitte, deutsch von Fiedler. 1860. p. 78).

Wir haben uns, um den folgenden Entwickelungen die volle Allgemeinheit zu wahren, entschlossen, den Ausdruck (3) in seiner Allgemeinheit anzuwenden.

2. Wir gehen, wie bereits bemerkt wurde, davon aus, daß die Halbaxen einer Curve zweiter Ordnung das Maximum und Minimum der Radienvectoren ihres Mittelpunktes sind. Stellen wir die Curven zweiter Ordnung durch die Gleichung

$$F(p,q,r) = Ap^2+Bq^2+Cr^2+2A'qr+2B'rp+2C'pq = 0 \tag{6}$$

dar, so ergeben sich bekanntlich für die Coordinaten p_0, q_0, r_0 ihres Mittelpunktes — als des Poles der in das Unendliche entfernten Geraden

$$\gamma p+\gamma' q+\gamma'' r = 0$$

— die Gleichungen

$$\begin{aligned}
Ap_0 + C'q_0 + B'r_0 &= \gamma f\\
C'p_0 + Bq_0 + A'r_0 &= \gamma' f\\
B'p_0 + A'q_0 + Cr_0 &= \gamma'' f,
\end{aligned} \tag{7}$$

worin f einen unbekannten Factor bezeichnet. Außerdem ist natürlich nach (2)

$$\gamma p_0+\gamma' q_0+\gamma'' r_0 = S. \tag{8}$$

Durch diese vier Gleichungen sind p_0, q_0, r_0 (und f) vollkommen bestimmt.

Sind also die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve (6) p, q, r; ρ dessen Radiusvector zum Mittelpunkte derselben, so haben wir diejenigen Werthe p, q, r aufzusuchen, für welche der Ausdruck

$$\begin{aligned}(9)\quad \rho^2 = k(p-p_0)^2 + l(q-q_0)^2 + m(r-r_0)^2 + 2k'(q-q_0)(r-r_0) \\ + 2l'(r-r_0)(p-p_0) + 2m'(p-p_0)(q-q_0)\end{aligned}$$

ein Maximum oder Minimum wird. Die Bedingungsgleichung derselben ist

$$\begin{aligned}(10)\quad \rho d\rho = \{k\ (p-p_0) + m'(q-q_0) + l'\ (r-r_0)\}\, dp + \\ \{m'(p-p_0) + l\ (q-q_0) + k'\ (r-r_0)\}\, dq + \\ \{l'\ (p-p_0) + k'\ (q-q_0) + m\ (r-r_0)\}\, dr.\end{aligned}$$

Da p, q, r außerdem noch den Gleichungen (2) und (6) zu genügen haben, so ergeben sich für dp, dq, dr ferner die Gleichungen

$$(11)\quad (Ap+C'q+B'r)\,dp + (C'p+Bq+A'r)\,dq + (B'p+A'q+Cr)\,dr = 0$$

$$(12)\quad \gamma dp + \gamma' dq + \gamma'' dr = 0.$$

Um aus den Gleichungen (10)—(12) dp, dq, dr zu eliminiren, multipliciren wir die erste und dritte derselben beziehungsweise mit den unbestimmten Factoren λ, μ und addiren sie zur zweiten. Wir erhalten, indem wir sodann die Coëfficienten der dp, dq, dr der Nulle gleichsetzen, die Gleichungen

$$\begin{aligned}(13)\quad & Ap + C'q + B'r + \lambda\{k\ (p-p_0) + m'(q-q_0) + l'\ (r-r_0)\} \\ & \qquad + \mu\gamma = 0 \\ & C'p + Bq + A'r + \lambda\{m'(p-p_0) + l\ (q-q_0) + k'\ (r-r_0)\} \\ & \qquad + \mu\gamma' = 0 \\ & B'p + A'q + Cr + \lambda\{l'\ (p-p_0) + k'\ (q-q_0) + m\ (r-r_0)\} \\ & \qquad + \mu\gamma'' = 0.\end{aligned}$$

Ziehen wir von der 1., 2., 3. dieser Gleichungen beziehungsweise die 1., 2., 3. der Gleichungen (7) ab und ordnen nach den $p-p_0$, $q-q_0$, $r-r_0$, so folgen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&(\lambda.k\ +A)\ (p-p_0)+(\lambda.m'+C')(q-q_0)+(\lambda.l'+B')(r-r_0)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\gamma\ (\lambda.f+\mu)=0\\
&(\lambda.m'+C')(p-p_0)+(\lambda.l\ +B)\ (q-q_0)+(\lambda.k'+A')(r-r_0)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\gamma'(\lambda.f+\mu)=0\\
&(\lambda.l'\ +B')(p-p_0)+(\lambda.k'\ +A')(q-q_0)+(\lambda.m+C)\ (r-r_0)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\gamma''(\lambda.f+\mu)=0.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Fügen wir hiezu noch die aus der Subtraction der Gleichungen (2) und (8) hervorgehende Gleichung

$$\gamma(p-p_0)+\gamma'(q-q_0)+\gamma''(r-r_0)=0, \quad (15)$$

so sehen wir ein System von vier Gleichungen vor uns, aus dem sich die 4 Größen $p-p_0$, $q-q_0$, $r-r_0$, $\lambda.f+\mu$ eliminiren lassen. Das Resultat dieser Operation ist die quadratische Gleichung für λ:

$$\begin{Bmatrix}
\lambda.k\ +A\ , & \lambda.m'+C', & \lambda.l'+B', & \gamma\\
\lambda.m'+C', & \lambda.l\ +B\ , & \lambda.k'+A', & \gamma'\\
\lambda.l'\ +B', & \lambda.k'+A', & \lambda.m+C\ , & \gamma''\\
\gamma & \gamma' & \gamma'' & 0
\end{Bmatrix}=0 \quad (16)$$

Hat man die Werthe von λ auf diese Weise ermittelt, so ergeben sich die Werthe der Halbaxen, welche wir mit R bezeichnen, aus dem System der Gleichungen (13), indem wir die erste derselben mit $p-p_0$, die zweite mit $q-q_0$, die dritte mit $r-r_0$ multipliciren und die Resultate addiren. Man erhält sofort unter Berücksichtigung der Gleichungen (6), (9), (15)

$$\begin{aligned}
\lambda.R^2 &= (Ap+C'q+B'r)\,p_0+(C'p+Bq+A'r)\,q_0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +(B'p+A'q+Cr)\,r_0\\
&=(Ap_0+C'q_0+B'r_0)\,p+(C'p_0+Bq_0+A'r_0)\,q\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +(B'p_0+A'q_0+Cr_0)\,r
\end{aligned}$$

oder mit Rücksicht auf (9) und (2)

$$\lambda.R^2=f(\gamma p+\gamma' q+\gamma'' r)=f.S.$$

Wenn wir nun

$$\begin{Bmatrix}
A\ , & C', & B'\\
C', & B\ , & A'\\
B', & A', & C
\end{Bmatrix}=\Delta \qquad
\begin{Bmatrix}
A\ , & C', & B', & \gamma\\
C', & B\ , & A', & \gamma'\\
B', & A', & C\ , & \gamma''\\
\gamma\ , & \gamma' & \gamma'', & 0
\end{Bmatrix}=D$$

setzen, so stellt sich der Werth von f, wie er sich aus der Auflösung der Gleichungen (7) und (8) ergibt, in der Form dar:

$$-D.f = \Delta.S;$$

man hat also

$$\lambda.R^2 = -\frac{S^2.\Delta}{D}. \tag{17}$$

3. Wir haben zunächst die auf der linken Seite von Gleichung (16) befindliche Determinante, die wir mit E bezeichnen werden, zu entwickeln. Man hat dabei natürlich auf die Gleichungen (4), welche die gegenseitige Abhängigkeit der sechs Constanten k, l, m' ausdrücken, zurückzugehen. Setzt man für k', l', m' die aus (4) sich ergebenden Werthe in E ein, so folgt

$$E = \begin{pmatrix} \lambda.k+A, & \frac{1}{2}\lambda\left\{-\frac{a''^2+b''^2}{\gamma\gamma'}+k.\frac{\gamma'}{\gamma}+l.\frac{\gamma}{\gamma'}\right\}+C', & \frac{1}{2}\lambda\left\{-\frac{a'^2+b'^2}{\gamma''\gamma}+m.\frac{\gamma}{\gamma''}+k.\frac{\gamma''}{\gamma}\right\}+B', & \gamma \\ & \lambda.l+B & \frac{1}{2}\lambda\left\{-\frac{a^2+b^2}{\gamma\gamma'}+l.\frac{\gamma''}{\gamma'}+m.\frac{\gamma'}{\gamma''}\right\}+A', & \gamma' \\ & & \lambda.m+C & ,\ \gamma'' \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

(Hier sind die leicht zu ergänzenden Elemente unter der Hauptdiagonale durch Punkte angedeutet). Zieht man in vorstehender Determinante die der Reihe nach mit

$$\frac{1}{2}\lambda.\frac{k}{\gamma},\quad \frac{1}{2}\lambda.\frac{l}{\gamma'},\quad \frac{1}{2}\lambda.\frac{m}{\gamma''}$$

multiplicirte 4. Columne beziehungsweise von der 1., 2., 3. Columne ab; ebenso die mit den nämlichen Factoren multiplicirte 4. Reihe beziehungsweise von der 1., 2, 3. Reihe, so erhält man ohne Mühe

$$E=\left\{\begin{matrix} A & ,-\frac{1}{2}\lambda\,.\,\dfrac{a''^2+b''^2}{\gamma\gamma'}+C', & -\frac{1}{2}\lambda\,.\,\dfrac{a'^2+b'^2}{\gamma''\gamma}+B', & \gamma \\ -\frac{1}{2}\lambda\,.\,\dfrac{a''^2+b''^2}{\gamma\gamma'}+C', & B & ,-\frac{1}{2}\lambda\,.\,\dfrac{a^2+b^2}{\gamma'\gamma''}+A', & \gamma' \\ -\frac{1}{2}\lambda\,.\,\dfrac{a'^2+b'^2}{\gamma''\gamma}+B', & -\frac{1}{2}\lambda\,\dfrac{a^2+b^2}{\gamma'\gamma''}+A', & C & ,\gamma'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & 0 \end{matrix}\right\} \qquad (18)$$

Für unsern Zweck ist es wünschenswerth, λ aus den seitlichen Elementen in die der Hauptdiagonale zu verlegen. Wir erreichen dies leicht auf folgende Art: Es bestehen nach der Bedeutung der Größen γ, γ', γ'' (vgl. Nr. 1) — zufolge eines bekannten Satzes aus der Theorie der Determinanten — die Identitäten

$$a\gamma+a'\gamma'+a''\gamma''=0, \quad b\gamma+b'\gamma'+b''\gamma''=0. \qquad (19)$$

Multipliciren wir die erste derselben mit a, die zweite mit b und addiren, so folgt

$$(a^2+b^2)\gamma+(aa'+bb')\gamma'+(a''a+b''b)\gamma''=0$$

und analog

$$\begin{aligned}(aa'+bb')\gamma+(a'^2+b'^2)\gamma'+(a'a''+b'b'')\gamma''&=0\\ (a''a+b''b)\gamma+(a'a''+b'b'')\gamma''+(a''^2+b''^2)\gamma''&=0.\end{aligned} \qquad (20)$$

Addiren wir also in (18) die nacheinander mit

$$-\tfrac{1}{2}\lambda\,.\,\frac{a'a''+b'b''}{\gamma\gamma'\gamma''}, \quad -\tfrac{1}{2}\lambda\,.\,\frac{a''a+b''b}{\gamma\gamma'\gamma''}, \quad -\tfrac{1}{2}\lambda\,.\,\frac{aa'+bb'}{\gamma\gamma'\gamma''}$$

multiplicirte 4. Columne beziehungsweise zur 1., 2, 3. Columne, ebenso die mit denselben Factoren multiplicirte 4. Reihe nach einander zur 1., 2., 3. Reihe, so ergibt sich zufolge der Gleichungen (20), welche man sich zu diesem Zwecke durch $\gamma\gamma'\gamma''$ dividirt denken wird

$$(21)^{1)}\quad E=\left\{\begin{array}{llll} A-\lambda.\dfrac{a'a''+b'b''}{\gamma'\gamma''}, & C' & B' & ,\gamma \\ C' & ,B-\lambda.\dfrac{a''a+b''b}{\gamma''\gamma}, & A' & ,\gamma' \\ B' & A' & ,C-\lambda.\dfrac{aa'+bb'}{\gamma\gamma'}, & \gamma'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & 0 \end{array}\right\}=0$$

Nun bietet die Entwickelung nach den Potenzen von λ keine weitere Schwierigkeit dar. Indem wir in der ganzen Gleichung die Zeichen ändern, erhalten wir als Coëfficienten von λ^2 den Ausdruck

$$\frac{(a'a''+b'b'')\,(a''a+b''b)}{\gamma\gamma'}+\frac{(a''a+b''b)\,(aa'+bb')}{\gamma'\gamma''}+\frac{(aa'+bb')\,(a'a''+b'b'')}{\gamma''\gamma}.$$

Bedenkt man, daß

$$\gamma\gamma'=\begin{Bmatrix} a', & b' \\ a'', & b'' \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} a'', & b'' \\ a, & b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} a'a''+b'b'', & aa'+bb' \\ a''^2+b''^2, & a''a+b''b \end{Bmatrix}$$

und setzt nach Multiplication mit γ'' für $(a''^2+b''^2)\,\gamma''$ den Werth aus der 3. der Gleichungen (20) ein, so sieht man sogleich, daß der genannte Coëfficient $=1$ ist.

Bezeichnen wir ferner die adjungirten Elemente von D mit $d_{r,s}$, wo r, s die Indices des zugehörigen Elementes von D sind, so hat man unmittelbar als Coëfficienten von λ in Gleichung (21)

$$\frac{a'a''+b'b''}{\gamma'\gamma''}\,d_{1,1}+\frac{a''a+b''b}{\gamma''\gamma}\,d_{2,2}+\frac{aa'+bb'}{\gamma\gamma'}\,d_{3,3}.$$

Nun ist

$$(22)\quad d_{1,1}=-B\gamma''^2-C\gamma'^2+2A'\gamma'\gamma'',\qquad d_{2,2}=-C\gamma^2-A\gamma''^2+2B'\gamma'\gamma''$$
$$d_{3,3}=-A\gamma'^2-B\gamma^2+2C'\gamma\gamma';$$

---

1) Verwendet man zur Darstellung von ρ^2 den specialisirten Ausdruck (5), so bietet sich das Eliminationsresultat der Gleichungen (14) und (15) unmittelbar in der Form (21) dar.

bildet man ferner durch Multiplication mit a, a', a'' aus der 1. der Gleichungen (19) die Identitäten

$$\frac{a^2}{\gamma'\gamma''}+\frac{aa'}{\gamma''\gamma}+\frac{a''a}{\gamma\gamma'}=0,\ \frac{aa'}{\gamma'\gamma''}+\frac{a'^2}{\gamma''\gamma}+\frac{a'a''}{\gamma\gamma'}=0 \text{ etc.},$$

so ergibt sich sofort die weitere Identität:

$$\frac{a'a''}{\gamma'\gamma''}d_{1,1}+\frac{a''a}{\gamma''\gamma}d_{2,2}+\frac{aa'}{\gamma\gamma'}d_{3,3}=F(a,a',a'') \tag{23}$$

und analog

$$\frac{b'b''}{\gamma'\gamma''}d_{1,1}+\frac{b''b}{\gamma''\gamma}d_{2,2}+\frac{bb'}{\gamma\gamma'}d_{3,3}=F(b,b',b'').$$

Mithin läßt sich der genannte Coëfficient in der Form

$$F(a,a',a'')+F(b,b',b'')$$

darstellen.

Faßt man dies alles zusammen, so erhält man an Stelle von (21) die folgende Gleichung:

$$\lambda^2+[F(a,a',a'')+F(b,b',b'')]\,\lambda-D=0. \tag{24}$$

4. Die Wurzeln der vorstehenden Gleichung sind stets reell; was sich durch eine Umformung von D leicht zeigen läßt. Wir suchen die Werthe von A', B', C' aus (22) und substituiren dieselben in D; dann ergibt sich durch eine der an der Determinante E in Nr. 3 ausgeführten ganz ähnliche Reduction:

$$4D=\begin{vmatrix} 0 & \frac{d_{3,3}}{\gamma\gamma'}, & \frac{d_{2,2}}{\gamma''\gamma}, & \gamma \\ \frac{d_{3,3}}{\gamma\gamma'}, & 0 & \frac{d_{1,1}}{\gamma'\gamma''}, & \gamma' \\ \frac{d_{2,2}}{\gamma''\gamma}, & \frac{d_{1,1}}{\gamma'\gamma''}, & 0 & \gamma'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & 0 \end{vmatrix} \tag{25}$$

$$=\frac{\gamma^2 d_{1,1}^2}{\gamma'^2\gamma''^2}+\frac{\gamma'^2 d_{2,2}^2}{\gamma''^2\gamma^2}+\frac{\gamma''^2 d_{3,3}^2}{\gamma^2\gamma'^2}-2\frac{d_{2,2}d_{3,3}}{\gamma^2}-2\frac{d_{3,3}d_{1,1}}{\gamma'^2}-2\frac{d_{1,1}d_{2,2}}{\gamma''^2}.$$

Bedenkt man, daß einerseits

$$\gamma^2 = (a'b''+a''b')^2-4a'a''.\,b'b''$$
$$\gamma'^2 = (a''b+ab'')^2-4a''a.\,b''b$$
$$\gamma''^2 = (ab'+a'b)^2-4aa'.\,bb'$$

und andererseits

$$-\gamma'\gamma'' = \begin{Bmatrix} a'', & b'' \\ a, & b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b, & a \\ b', & a' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a''b+ab'', & a'b''+a''b' \\ 2ab & ab'+a'b \end{Bmatrix}$$
$$= (a''b+ab'')(ab'+a'b)-2aa'.\,b''b-2a''a.\,bb'$$

sowie

$$-\gamma''\gamma = (ab'+a'b)(a'b''+a''b')-2a''a.\,bb'-2aa'.\,b'b''$$
$$-\gamma\gamma' = (a'b''+a''b')(a''b+ab'')-2a'a''.\,b'b''-2a'a''.\,b''b,$$

so erkennt man mit Hilfe der Gleichungen (23) sofort, daß

$$4D = \left\{\frac{a'b''+a''b'}{\gamma'\gamma''}.\,d_{1,1}+\frac{a''b+ab''}{\gamma''\gamma}.\,d_{2,2}+\frac{ab'+a'b}{\gamma\gamma'}.\,d_{3,3}\right\}^2$$
$$-4F(a,a',a'')\,F(b,b',b'').$$

Setzt man also zur Abkürzung

$$\frac{a'b''+a''b'}{\gamma'\gamma''}\,d_{1,1}+\text{etc.} = N,$$

so folgt

(26) $$[F(a,a',a'')+F(b,b',b'')]^2+4D=[F(a,a',a'')-F(b,b',b'')]^2+N^2.$$

Somit ist die Diskriminante der Gleichung (24) negativ, d. h. die Wurzeln der Gleichung (24) sind stets reell und werden, falls genannter Ausdruck verschwindet, identisch. Dies ist nur dann möglich, wenn zugleich

$$\frac{a'b''+a''b'}{\gamma'\gamma''}\,d_{1,1}+\frac{a''b+ab''}{\gamma''\gamma}\,d_{2,2}+\frac{ab'+a'b}{\gamma\gamma'}\,d_{3,3}=0$$
$$F(a,a',a'')-F(b,b',b'')=0$$

ist. Letztere Gleichung kann nach (23) auch so geschrieben werden

$$\frac{a'a''-b'b''}{\gamma'\gamma''}\,d_{1,1}+\frac{a''a-b''b}{\gamma''\gamma}\,d_{2,2}+\frac{aa'-bb'}{\gamma\gamma'}\,d_{3,3}=0,$$

so daß aus beiden vorstehenden Gleichungen

$$\frac{d_{1,1}}{a^2+b^2}=\frac{d_{2,2}}{a'^2+b'^2}=\frac{d_{3,3}}{a''^2+b''^2} \tag{27}$$

abgeleitet werden kann. Der gemeinsame Werth dieser Brüche ist λ, wie sich sogleich ergibt, wenn man bedenkt, daß zufolge der Gleichungen (20) und einer in Nr. 3 vorgenommenen Reduction

$$\frac{a'a''+b'b''}{\gamma''\gamma'}(a^2+b^2)+\frac{a''a+b''b}{\gamma''\gamma}(a'^2+b'^2)+\frac{aa'+bb'}{\gamma\gamma'}(a''^2+b''^2)=-2$$

ist. Die Gleichungen (27) geben offenbar die Bedingungen, unter welchen die Gleichung (6) einen Kreis darstellt. In dieser Form wurden dieselben zuerst von Ferrers (vgl. Salmon a. a. Ort p. 163) angeführt, aber auf ganz anderem Wege gefunden.

5. Bezeichnen wir die beiden Werthe von λ mit λ_1 und λ_2 (für den ersteren wurde das Radical positiv genommen), so haben wir nach (24)

$$\lambda_1+\lambda_2=-F(a,a',a'')-F(b,b',b'');\quad \lambda_1\lambda_2=-D. \tag{28}$$

Durch Substitution dieser beiden Werthe von λ in (17) erhalten wir zwei Werthe R_1 und R_2, über deren Natur wir durch einen Blick auf (17) und (28) leicht entscheiden. Ebenso wird sich daraus ermitteln lassen, welcher von ihnen ein Maximum oder Minimum sei.

Ehe wir jedoch auf diesen Gegenstand näher eingehen, legen wir uns, theils zum genaueren Verständnisse, theils zur Abkürzung der folgenden Entwickelungen die Frage vor: Unter welcher Bedingung behält der Ausdruck

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2A'yz+2B'zx+2C'xy=F \tag{a}$$

für ein beliebiges System von Werthen der x, y, z, das nur der Bedingung

$$ax+by+cz=0 \tag{b}$$

unterworfen ist, ein bestimmtes Zeichen?

Wir versuchen für diese bekannte Aufgabe eine dem Geiste dieses Aufsatzes entsprechende Lösung zu geben.

Es seien ρ_1, ρ_2, ρ_3 drei positive Größen, σ ein unbestimmter Coëfficient, endlich k ein mit einem unveränderlichen Zeichen behafteter Ausdruck. Setzt man

$$
(c) \qquad \begin{aligned}
Ax + C'y + B'z &= k.\rho_1 x + \sigma.a \\
C'x + By + A'z &= k.\rho_2 y + \sigma.b \\
B'x + A'y + Cz &= k.\rho_3 z + \sigma.c,
\end{aligned}
$$

so erhält man mit Rücksicht auf (b)

$$F = k(\rho_1 x^2 + \rho_2 y^2 + \rho_3 z^2),$$

woraus erhellt, daß, solange die x, y, z an die Gleichung (c) gebunden sind, F stets das Zeichen von k trage. Eliminirt man x, y, z aus den Gleichungen (b) und (c), so findet sich als Bedingungsgleichung für obige Forderung:

$$
\left\{\begin{matrix}
A - k\rho_1, & C' & B' & , a \\
C' & B - k\rho_2, & A' & , b \\
B' & A' & C - k\rho_3, & c \\
a & b & c & , 0
\end{matrix}\right\} = 0
$$

oder

$$(d) \quad k^2(\rho_2\rho_3 a^2 + \rho_3\rho_1 b^2 + \rho_1\rho_2 c^2) + k(\rho_1 d_{1,1} + \rho_2 d_{2,2} + \rho_3 d_{3,3}) - D = 0$$

worin

$$
\left\{\begin{matrix}
A, & C', & B', & a \\
C', & B, & A', & b \\
B', & A', & C, & c \\
a, & b & c & 0
\end{matrix}\right\}
$$

mit D und ihre Unter-Determinanten mit $d_{r,s}$ bezeichnet sind. Die dieser Gleichung genügenden Werthe von k sind stets reell; was sich am einfachsten durch eine von Cauchy herrührende Transformation der Gleichungen (c) zeigen läßt (vgl. Petzval „Theorie des größten und kleinsten" in Haidinger's gesammelten naturwissenschaftlichen Abhandlungen Band II). Es seien k' und k'' die Wurzeln von (d), x', y', z' und $x''y''z''$ die ihnen entsprechenden Werthe von x, y, z; daher ist

$$
\begin{aligned}
(A - k'\rho_1)\, x' + C'y' + B'z' &= 0 \\
(A - k''\rho_1)\, x'' + C'y'' + B'z'' &= 0.
\end{aligned}
$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit x'', die zweite mit x', so folgt

$$(k' - k'')\,\rho_1 x'x'' + C'(x'y'' - x''y') + B'(z''x' - z'x'') = 0$$

Analog ergibt sich:

$$(k'-k'')\rho_2 y'y''+A'(y'z''-y''z')+C'(x''y'-x'y'')=0$$
$$(k'-k'')\rho_3 z'z''+B'(z'x''-z''x')+A'(y''z'-y'z'')=0.$$

Die Addition der vorstehenden Gleichungen liefert die Relation

$$(k'-k'')(\rho_1 x'x''+\rho_2 y'y''+\rho_3 z'z'')=0 \qquad (e)$$

woraus wir — nach dem Vorgange von Poisson — schließen, daß k' und k'' reell sein müssen; denn wäre dies nicht der Fall, so müßten wir uns

$$k'=\varkappa_1+\varkappa_2\sqrt{-1} \qquad k''=\varkappa_1+\varkappa_2\sqrt{-1}$$

und dem entsprechend

$$x'=\xi_1+\xi_2\sqrt{-1} \qquad x''=\xi_1-\xi_2\sqrt{-1}$$
$$y'=\eta_1+\eta_2\sqrt{-1} \qquad y''=\eta_1-\eta_2\sqrt{-1}$$
$$z'=\zeta_1+\zeta_2\sqrt{-1} \qquad z''=\zeta_1-\zeta_2\sqrt{-1}$$

denken. Dann geht aber die Gleichung (e) in folgende über

$$2k_2\sqrt{-1}\,\{\rho_1(\xi_1^2+\xi_2^2)+\rho_2(\eta_1^2+\eta_2^2)+\rho_3(\zeta_1^2+\zeta_2^2)\}=0,$$

welche zufolge der über die Größen ρ oben gemachten Voraussetzung nur durch die Annahme

$$k_2=0$$

verwirklicht werden kann [1]).

Damit nun die beiden Wurzeln von (d) gleichbezeichnet seien ist nothwendig, daß

$$D<0 \qquad (f)$$

sei. Das gemeinsame Zeichen derselben ist dem des Ausdruckes

$$\rho_1 d_{1,1}+\rho_2 d_{2,2}+\rho_3 d_{3,3}$$

entgegengesetzt, welchem wegen der Unbestimmtheit der ρ (mit Ausnahme des Zeichens) nur dann ein bestimmtes Zeichen zukommt, wenn die $d_{1,1}$, $d_{2,2}$, $d_{3,3}$ gleichbezeichnet sind. Diese Bedingung ist

---

[1]) Es ist nur durch langwierige Transformationen möglich, die Diskriminante der Gleichung (d) als Summe zweier Quadrate darzustellen. Daher wurde Cauchy's mehr indirecter Weg vorgezogen.

bereits in (f) enthalten; denn nach den bekannten Sätzen über adjungirte Systeme (oder insbesondere nach Gleichung (14) in Brioschi Teorica dei determinanti 1854, p. 11) bestehen die Relationen

$$(g)\quad -Da^2=d_{2,2}d_{3,3}-d_{2,3}^2,\ -Db^2=d_{3,3}d_{1,1}-d_{3,1}^2,\ -Dc^2=d_{1,1}d_{2,2}-d_{1,2}^2.$$

Wir gelangen also zum Schlusse, daß der Ausdruck (a) nur unter der Bedingung (f) für jedes Werthsystem x, y, z ein bestimmtes Zeichen behaupte, welches mit dem gemeinsamen Zeichen der Größen

$$-d_{1,1},\ -d_{2,2},\ -d_{3,3}$$

oder

$$(h)\quad Bc^2+Cb^2-2A'bc,\quad Ca^2+Ac^2-2B'ca,\quad Ab^2+Ba^2-2C'ab$$

übereinstimmt.

Ist dagegen $D>0$, so sind die Wurzeln der Gleichung (d) entgegengesetzt, so daß auch F sein Zeichen wechselt.

Im besondern Falle

$$D=0$$

verschwindet einer der Werthe von k, während der andere das durch die Ausdrücke (h) bestimmte Zeichen noch ferner behält. Demnach verschwindet F für alle Werthe x, y, z, welche außer der Gleichung (b) noch den Gleichungen

$$\begin{aligned} Ax+C'y+B'z&=\sigma.a\\ C'x+By+A'z&=\sigma.b\\ B'x+A'y+Cz&=\sigma.c \end{aligned}$$

genügen. Außerdem besitzt aber F ein bestimmtes Zeichen. Dies ist nur in der Art möglich, daß sich F — von einem constanten Factor, dessen Zeichen mit dem der Ausdrücke (h) übereinstimmt, abgesehen — als Quadrat eines in x, y, z linearen Ausdruckes darstellen lasse; und zwar wird dies auf unendlich verschiedene Art geschehen können.

6. Wir benützen das Resultat der vorigen Nummer sofort zur Beurtheilung des Zeichens von $d^2\rho$. Setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} k\,(p-p_0)+m'(q-q_0)+l'\,(r-r_0)&=\mathfrak{P}\\ m'(p-p_0)+l\,(q-q_0)+k'(r-r_0)&=\mathfrak{Q}\\ l'\,(p-p_0)+k'\,(q-q_0)+m(r-r_0)&=\mathfrak{R}, \end{aligned}$$

so ergibt sich durch nochmalige Differentiation aus (10)

$$\begin{aligned} \rho d^2\rho+d\rho^2=&\,dp(kdp+m'dq+l'dr)+dq(m'dp+ldq+k'dr)\\ &+dr(l'dp+k'dr+mdr)+\mathfrak{P}d^2p+\mathfrak{Q}d^2q+\mathfrak{R}d^2r. \end{aligned}$$

Ebenso folgt aus (11) und (12)

$$dp(Adp+C'dq+B'dr)+dq(C'dp+Bdq+A'dr)$$
$$+dr(B'dp+A'dq+Cdr)+\frac{\partial F}{\partial p}.d^2p+\frac{\partial F}{\partial q}d^2q+\frac{\partial F}{\partial r}d^2r=0$$
$$\gamma d^2p+\gamma' d^2q+\gamma'' d^2r=0.$$

Addirt man diese Gleichungen, nachdem man die erste mit λ und die dritte mit μ multiplicirt hat, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichungen (13) und $d\rho=0$

$$\begin{aligned}\lambda\rho d^2\rho = & (\lambda.k+A)\,dp^2+(\lambda.l+B)\,dq^2+(\lambda.m+C)\,dr^2\\ & +2(\lambda.k'+A')\,dq\,dr+2(\lambda.l'+B')\,dr\,dp+2(\lambda.m'+C')\,dp\,dq\end{aligned} \tag{29}$$

Dabei sind die Differentiale *dp, dq, dr,* an die Gleichung (12) gebunden. Geht man auf die Gleichung (16) zurück, so wird man mit Hilfe dessen, was in Nr. 5 auseinandergesetzt ist, sogleich bemerken, daß die rechte Seite der Gleichung (29) sich als Quadrat eines nach *dp, dq, dr* linearen Ausdruckes darstellen lasse, abgesehen von einem gewissen constanten Factor, dessen Zeichen dem derjenigen Unterdeterminanten von E, welche zu den Elementen der Hauptdiagonale gehören, entgegengesetzt ist. Bezeichnet man diese Unterdeterminanten allgemein mit $e_{r,s}$, so hat man

$$e_{1,1}=\begin{Bmatrix}\lambda.l+B, & \lambda.k'+A', & \gamma'\\ \lambda.k'+A', & \lambda.m+C, & \gamma''\\ \gamma' & \gamma'' & 0\end{Bmatrix}.$$

Wird diese Determinante ganz auf dieselbe Weise behandelt, wie E in Nr. 3, so ergibt sich ohne Mühe

$$e_{1,1}=\begin{Bmatrix}B-\lambda.\dfrac{a''a+b''b}{\gamma''\gamma}, & A' & ,\gamma'\\ A' & ,C-\lambda.\dfrac{aa'+bb'}{\gamma\gamma'} & \gamma''\\ \gamma' & \gamma'' & 0\end{Bmatrix}$$

und daraus mit Rücksicht auf (20)

$$e_{1,1}=d_{1,1}-(a^2+b^2)\lambda;$$

auf ähnliche Weise findet man auch

$$(30) \qquad e_{2,2} = d_{2,2} - (a'^2 + b'^2)\lambda \;,\; e_{3,3} = d_{3,3} - (a''^2 + b''^2)\lambda.$$

Setzen wir in dem ersten dieser Ausdrücke für λ nacheinander seine Werthe λ_1 und λ_2 unter, so folgt, wenn die entsprechenden Werthe von $e_{1,1}$ mit $e'_{1,1}$ und $e''_{1,1}$ bezeichnet werden:

$$e'_{1,1} = d_{1,1} - (a^2+b^2)\lambda_1 \qquad e''_{1,1} = d_{1,1} - (a^2+b^2)\lambda_2$$

also

$$e'_{1,1}e''_{1,1} = d^2_{1,1} - d_{1,1}(a^2+b^2)(\lambda_1+\lambda_2) + (a^2+b^2)^2\lambda_1\lambda_2.$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen (28), (23), (25) in folgenden transformiren

$$e'_{1,1}e''_{1,1} = -\left[\left(\frac{aa'+bb'}{\gamma''} - \frac{a''a+b''b}{\gamma'}\right)d_{1,1} + \frac{a^2+b^2}{\gamma}\left(\frac{\gamma' d_{2,2}}{\gamma''} - \frac{\gamma'' d_{3,3}}{\gamma'}\right)\right]^2.$$

Die Zusammenziehung der mit $d_{1,1}$ behafteten Glieder wird erleichtert, wenn man an Stelle von $(a^2+b^2)\gamma$ den Werth aus (20) einführt. Dann bietet nur noch die Transformation des Coëfficienten von $-d^2_{1,1}$ Schwierigkeit dar; unmittelbar erhält man dafür

$$-4 - 4\frac{(a'a''+b'b'')(a^2+b^2)}{\gamma'\gamma''} + \frac{(a^2+b^2)^2\gamma^2}{\gamma'^2\gamma''^2};$$

da, wie schon öfters bemerkt wurde,

$$\gamma'\gamma'' = (a''a+b''b)(aa'+bb') - (a^2+b^2)(a'a''+b'b''),$$

so kann man an Stelle dieses Ausdruckes

$$\frac{1}{\gamma'^2\gamma''^2}$$

$$\{-\gamma'^2(ab'-a'b)^2 - \gamma''^2(a''b-ab'')^2 - 2(a'a''+b'b'')(a^2+b^2)\gamma'\gamma'' \\ -2(aa'+bb')(a''a+b''b)\gamma'\gamma'' + (a^2+b^2)[(a'\gamma'+a''\gamma'')^2 \\ +(b'\gamma'+b''\gamma'')^2]\}.$$

setzen, worin man sogleich

$$\frac{1}{\gamma'^2\gamma''^2}\{(aa'+bb')\gamma' - (a''a+b''b)\gamma''\}^2$$

erkennt. Man sieht also, daß die beiden Größen $e'_{1,1}$ und $e''_{1,1}$ entgegengesetztes Zeichen besitzen. Da ferner

$$e''_{1,1} - e'_{1,1} = (a^2+b^2)(\lambda_1 - \lambda_2),$$

so ergibt sich, wenn man sich erinnert, daß in λ_1 das Radical der Gleichung (24) positiv vorausgesetzt wurde, daß $e'_{1,1}$ eine negative, $e''_{1,1}$ eine positive Größe ist; somit ist die rechte Seite der Gleichung (29) für λ_1 positiv, für λ_2 negativ. Das Zeichen von $d^2\rho$ findet sich sodann, wenn das von λ bekannt ist, indem ρ, als absolute Quantität, positiv gedacht wird.

7. Zur Discussion der Gleichungen (17) und (28) übergehend, werden wir sofort folgende Hauptfälle unterscheiden:

I. $D<0$; λ_1 und λ_2 gleichbezeichnet; also R_1 und R_2 zugleich reell oder imaginär;

II. $D>0$; λ_1 und λ_2 ungleich bezeichnet; eines der R reell, das andere imaginär;

III. $D=0$; beide R unendlich groß.

Jeder dieser Hauptfälle umfaßt mehrere specielle Fälle, die sich auf folgende Art ergeben:

I. Aus $D<0$ folgt nach Nr. 5, da a, a', a''; b, b', b'' beziehungsweise den Gleichungen (19) genügen, daß $F(a, a', a'')$ und $F(b, b', b'')$ gleiches Zeichen besitzen, welches nach (28) dem der Größen λ_1 und λ_2 entgegengesetzt ist. Es ergibt sich also, daß, wenn

1. $\frac{\Delta}{F(a, a', a'')} < 0$, R_1 und R_2 reell sind; das eine ist ein Maximum, das andere ein Minimum. Ist $F(a, a', a'')>0$, so sind die λ negativ, also nach Nr. 6 R_1 das Maximum; im entgegengesetzten Falle fällt dasselbe auf R_2. Diese Unterscheidung ist jedoch unwesentlich, indem man sofort bemerkt, daß, wenn man in (6) durchgehends die Zeichen ändert, auch Δ, $F(a, a', a'')$ und $F(b, b', b'')$ ihre Zeichen ändern, wodurch R_1 und R_2 sich vertauschen. — Der hieher gehörige Kegelschnitt ist also die reelle Ellipse.

2. $\frac{\Delta}{F(a, a', a'')} > 0$, R_1 und R_2 imaginär. — Imaginäre Ellipse.

3. $\Delta=0$, R_1 und R_2 verschwinden. Bekanntlich stellt unter dieser Bedingung die Gleichung (6) ein System von zwei imaginären Geraden mit reellem Durchschnittspunkte dar, die übrigens nicht identisch werden dürfen, weil dann D bereits verschwindet (vgl. unten).

II. 1. $\Delta \gtrless 0$: — Hyperbel. Da beide Werthe von λ entgegengesetztes Zeichen besitzen, so ist nothwendig λ_1 positiv, λ_2 negativ.

Ist also $\Delta < 0$, so ist nach (17) R_1 reell und zwar nach Nr. 6 ein Minimum; ist $\Delta > 0$, so gilt dasselbe von R_2. (Bezüglich dieser Unterscheidung vgl. das unter I 1. Bemerkte).

2. $\Delta = 0$: — Ein System von zwei reellen sich schneidenden Geraden, die nicht identisch werden können (I, 3).

III. Wenn D verschwindet, so genügen die Coordinaten des Centrums des Kegelschnittes neben den Gleichungen (7) auch noch der Gleichung

$$\gamma p_0 + \gamma' q_0 + \gamma'' r_0 = 0,$$

d. h. dasselbe liegt im Unendlichen. — Andererseits drückt dieselbe Bedingung nach Nr. 5 auch aus, daß die $F(a, a', a'')$, $F(b, b', b'')$ — von gewissen constanten Factoren, deren Zeichen mit dem der Größen $-d_{1,1}$, $-d_{2,2}$, $-d_{3,3}$ übereinstimmt, abgesehen — vollständige Quadrate seien.

1. $\Delta \gtrless 0$. Da für die Determinante D zufolge eines oben erwähnten Satzes

$$\begin{aligned} d_{1,1}d_{4,4} - d_{1,4}^2 &= (BC - A'^2)\,D \\ d_{2,2}d_{4,4} - d_{2,4}^2 &= (CA - B'^2)\,D \\ d_{3,3}d_{4,4} - d_{3,4}^2 &= (AB - C'^2)\,D \end{aligned} \tag{31}$$

ist, worin $d_{4,4}$ nichts anders als Δ ist, so sieht man, daß für $D = 0$ die Größen $d_{1,1}$, $d_{2,2}$, $d_{3,3}$ mit Δ gleichbezeichnet sind, welches somit das dem Zeichen von $F(a, a', a'')$ entgegengesetzte trägt. Es verschwindet also von den λ im Falle $\Delta < 0 : \lambda_1$, im Falle $\Delta > 0 : \lambda_2$; das andere λ, im Zeichen mit Δ übereinstimmend, behält stets einen angebbaren Werth und kann nicht eher verschwinden, als bis die drei Größen $d_{1,1}$, $d_{2,2}$, $d_{3,3}$ zugleich $= 0$ werden, was bereits die Bedingung $\Delta = 0$ in sich schließt (vgl. unten). — Die Halbaxen-Quadrate sind unendlich groß, aber mit dem Unterschiede, daß dasjenige von ihnen, welches dem verschwindenden λ entspricht, sich als positiv nachweisen läßt, was man sogleich erkennt, wenn man in (17) an Stelle von D: $-\lambda_1\lambda_2$ einsetzt. Offenbar entspricht dasselbe der Richtung, auf welcher das Centrum in's Unendliche gerückt ist. — Die Curve ist eine Parabel.

2. $\Delta = 0$. Die Gleichung (6) stellt zwei parallele Gerade dar. Es erscheint R in der Form $\frac{0}{0}$. Der wahre Werth dieses Symboles wird auf folgende Art ermittelt. Aus (31) ergibt sich jetzt

$$d_{1,4} = d_{2,4} = d_{3,4} = 0.$$

Lassen wir aber vorläufig nur die beiden letzteren verschwinden und bedenken, daß identisch

$$D=\gamma d_{1,4}+\gamma' d_{2,4}+\gamma'' d_{3,4},$$

so bleibt

$$D=\gamma\,.\,d_{1,4}.$$

Setzt man für $d_{1,4}$ diesen Werth in die erste der Gleichungen (31) ein, so folgt

$$d_{1,1}\,.\,\frac{\Delta}{D}-\frac{D}{\gamma^2}=BC-A'^2$$

also, wenn $D=0$ ist,

$$d_{1,1}\,.\,\frac{\Delta}{D}=BC-A'^2.$$

Aus der 2. und 3. der Gleichungen (31) findet man analog

$$d_{2,2}\,.\,\frac{\Delta}{D}=CA-B'^2$$

$$d_{3,3}\,.\,\frac{\Delta}{D}=AB-C'^2,$$

woraus man schließt:

$$\frac{BC-A'^2}{d_{1,1}}=\frac{CA-B'^2}{d_{2,2}}=\frac{AB-C'^2}{d_{3,3}},$$

daß also — nach (17) — die des Verschwindens von Δ wegen an sich gleichbezeichneten Ausdrücke

$$BC-A'^2,\ CA-B'^2,\ AB-C'^2,$$

daß dem Zeichen von $d_{1,1}\lambda\,.\,R^2$ entgegengesetzte besitzen. Von den R^2 bleibt eines unendlich groß und zwar für $d_{1,1}<0:R_1^2$, für $d_{1,1}>0:R_2^2$ (ein, wie oben, unwesentlicher Unterschied); ein bestimmtes Zeichen läßt sich dafür nicht mehr nachweisen. Das andere R^2 ist wieder endlich geworden und hat, da $d_{1,1}$ und λ gleichbezeichnet sind, das dem der Größen $BC-A'^2$ etc. entgegengesetzte Zeichen. Wir haben also die drei Fälle:

a) $BC-A'^2$, $CA-B'^2$, $AB-C'^2$ sind negativ, das zweite R ist reell: — ein System von zwei reellen parallelen Geraden.

b) Diese Größen sind positiv. Das zweite R ist imaginär: — ein System von zwei imaginären parallelen Geraden.

c) Diese Größen verschwinden. Die linke Seite der Gleichung (6) ist ein vollständiges Quadrat: eine doppelte Gerade.

Unter die Fälle *a)* und *c)* gehören auch die weitern Specialisirungen der Gleichung (6), welche vom gleichzeitigen Verschwinden der Größen $d_{1,1}$, $d_{2,2}$, $d_{3,3}$ ausgehen, so daß $\frac{\Delta}{D}$ wieder unendlich wird. Bemerkt man, daß jetzt zufolge (22)

$$(32)\ 2A' = B.\frac{\gamma''}{\gamma'} + C.\frac{\gamma'}{\gamma''};\ 2B' = C.\frac{\gamma}{\gamma''} + A.\frac{\gamma''}{\gamma};\ 2C' = A.\frac{\gamma'}{\gamma} + B.\frac{\gamma}{\gamma'}$$

so erkennt man sofort, daß die Gleichung (6) in folgende übergehe:

$$(\gamma p + \gamma' q + \gamma'' r)\left(\frac{A}{\gamma} p + \frac{B}{\gamma'} q + \frac{C}{\gamma''} r\right) = 0,$$

so daß also von beiden Geraden des Falles *a)* die eine in's Unendliche gerückt erscheint.

Verschwinden endlich noch einmal die Größen $BC - A'^2$ etc., so erscheint $\frac{\Delta}{D}$ wieder in der Form $\frac{0}{0}$. Quadrirt man die erste der Gleichungen (32) und setzt an Stelle von A'^2: BC, so folgt

$$B\frac{\gamma''}{\gamma'} - C\frac{\gamma'}{\gamma''} = 0;$$

also im Ganzen

$$\frac{A}{\gamma^2} = \frac{B}{\gamma'^2} = \frac{C}{\gamma''^2}$$

so daß sich die linke Seite von (6) auf $(\gamma p + \gamma' q + \gamma'' r)^2$ reducirt: die doppelte Gerade des Falles *c)* ist in's Unendliche gerückt. — Sohin ist vom Orte II Ordnung nichts mehr übrig; die Specialisirung hat ihr Ende erreicht.

Die Darstellung dieser zwei letzten Specialisirungen erleidet einige Abänderungen, wenn von den γ eines oder zwei verschwinden; das Resultat bleibt dasselbe.

Das eben gegebene Schema der Örter II. Ordnung wurde mit dem von Joachimsthal (Elemente der analytischen Geometrie 1863, p. 103) und Salmon (a. a. O. p. 422) mitgetheilten, die beide für Parallelcoordinaten giltig sind[1]), verglichen und nach

---

[1]) Bedeutet ω den Winkel der Coordinatenaxen $p=0$, $q=0$, so erhält man die bezüglichen Resultate durch die für jeden Werth von ω brauchbare Substitution

$$p = x - y \text{ cotang.}\,\omega \qquad q = y \text{ cosec.}\,\omega \qquad r = 1.$$

Berichtigung einiger Ungenauigkeiten damit in Übereinstimmung gebracht. Dahin gehört bei Joachimsthal die Scheidung der Fälle III. 2. *a)*, *b)*, *c)* (a. a. O. die beiden letzten Zeilen von 1., dann 3. und 4.) in zwei Abtheilungen, welche durch die Bemerkung, daß (in den dort gebrauchten Zeichen) $af-d^2$ und $cf-e^2$ gleichbezeichnet sind[1]), als identisch erkannt werden. Bei Salmon wird der Hauptfall I nach dem unwesentlichen Zeichen von Δ — statt $\frac{\Delta}{A}$ — abgetheilt, ohne daß eine bestimmte Annahme über das Zeichen von A oder C ersichtlich wäre.

8. Zu weiterer Bestätigung dieser Resultate suchen wir noch aus den Gleichungen (14) die Werthe für die Coordinatendifferenzen $p-p_0$, $q-q_0$, $r-r_0$. Wir erhalten unmittelbar:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{p-p_0}{e_{1,1}}=\frac{q-q_0}{e_{1,2}}=\frac{r-r_0}{e_{3,1}}&=\frac{k(p-p_0)+m'(q-q_0)+l'(r-r_0)}{ke_{1,1}+m'e_{1,2}+l'e_{3,1}}\\
\frac{p-p_0}{e_{1,2}}=\frac{q-q_0}{e_{2,2}}=\frac{r-r_0}{e_{2,3}}&=\frac{m'(p-p_0)+l(q-q_0)+k'(r-r_0)}{m'e_{1,2}+le_{2,2}+k'e_{2,3}}\\
\frac{p-p_0}{e_{\ ,1}}=\frac{q-q_0}{e_{3,2}}=\frac{r-r_0}{e_{3,3}}&=\frac{l'(p-p_0)+k'(q-q_0)+m(r-r_0)}{l'e_{3,1}+k'e_{2,3}+me_{3,3}}
\end{aligned}\right\}\quad(33)$$

Nun ist

$$\lambda(ke_{1,1}+m'e_{1,2}+l'e_{3,1})=\begin{Bmatrix} \lambda.k & \lambda.m' & \lambda.l' & ,\gamma \\ \lambda.m'+C', & \lambda.l+B, & \lambda.k'+A', & \gamma' \\ \lambda.l'+B', & \lambda.k'+A', & \lambda.m+C, & \gamma'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & 0 \end{Bmatrix}-\gamma e_1,$$

Die hier auftretende Determinante läßt sich ganz in derselben Weise umformen, wie E selbst (vgl. Nr. 3). Das Ergebniß ist

---

[1]) Was sich aus der Relation

$$(af-d^2)\,(cf-d^2)-(bf-de)^2=f.\begin{Bmatrix} a, & b, & d \\ b, & c, & c \\ d, & e, & f \end{Bmatrix}$$

sogleich ergibt.

$$\left\{\begin{array}{llll} -\lambda \dfrac{a'a''+b'b''}{\gamma'\gamma''}, & 0 & 0 & , \gamma \\ C' & , B-\lambda . \dfrac{a''a+b''b}{\gamma''\gamma}, & A' & , \gamma' \\ B' & A' & , C-\lambda . \dfrac{aa'+bb'}{\gamma\gamma'}, & \gamma'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' & 0 \end{array}\right\}.$$

Benützt man ferner die a. a. O. ausgeführten Reductionen, so kommt schließlich

$$\lambda(ke_{1,1}+m'e_{1,2}+l'e_{3,1}) = \gamma(d_{1,4}-e_{1,4})$$
$$-\lambda\left\{\frac{a'a''+b'b''}{\gamma'\gamma''}.d_{1,1}+\frac{a''a+b''b}{\gamma''}(B'\gamma''-C\gamma)+\frac{aa'+bb'}{\gamma'}(C'\gamma'-B\gamma)\right\}-\lambda^2,$$

und analog

$$\lambda(m'e_{1,2}+le_{2,2}+k'e_{2,3}) = \gamma'(d_{2,4}-e_{2,4})$$
$$-\lambda\left\{\frac{a'a''+b'b''}{\gamma''}(A'\gamma''-C\gamma')+\frac{a''a+b''b}{\gamma''\gamma}d_{2,2}+\frac{aa'+bb'}{\gamma}(C'\gamma-A\gamma')\right\}-\lambda^2,$$

$$\lambda(l'e_{3,1}+k'e_{2,3}+me_{3,3}) = \gamma''(d_{3,4}-e_{3,4})$$
$$-\lambda\left\{\frac{a'a''+b'b''}{\gamma'}(A'\gamma'-B\gamma'')+\frac{a''a+b''b}{\gamma}(B'\gamma-A\gamma'')+\frac{aa'+bb'}{\gamma\gamma'}d_{3,3}\right\}-\lambda^2.$$

Multiplicirt man die erste Reihe der Gleichungen (33) durchaus mit $p-p_0$, die zweite durchaus mit $q-q_0$, die dritte durchaus mit $r-r_0$ und nimmt Rücksicht auf die Gleichungen (9), (23) sowie auf folgende Relationen

$$\begin{aligned} \gamma d_{1,4}+\gamma' d_{2,4}+\gamma'' d_{3,4} &= D \\ \gamma e_{1,4}+\gamma' e_{2,4}+\gamma'' e_{3,4} &= E = 0 \\ \gamma'(A'\gamma''-C\gamma')+\gamma''(A'\gamma'-B\gamma'') &= d_{1,1} \\ \gamma''(B'\gamma-A\gamma'')+\gamma(B'\gamma''-C\gamma) &= d_{2,2} \\ \gamma(C'\gamma'-B\gamma)+\gamma'(C'\gamma-A\gamma') &= d_{3,3}, \end{aligned}$$

so erhält man sogleich

$$\frac{(p-p_0)^2}{e_{1,1}} =$$
$$\frac{(q-q_0)^2}{e_{2,2}} = \frac{(r-r_0)^2}{e_{3,3}} = \frac{\lambda . R^2}{D-2\lambda\,\{F(a,a',a'')+F(b,b',b'')\}-3\lambda^2}.$$

Der letzte Nenner geht, wenn man zuerst den Werth von D aus (24) und hierauf den von λ aus derselben Gleichung einsetzt, nacheinander über in:

$$-\lambda\,[F(a,a',a'')+F(b,b',b'')+2\lambda] \\ = \mp\lambda\sqrt{\{F(a,a',a'')-F(b,b',b'')\}^2+N^2}$$

(vgl. Nr. 4). Werden endlich für $e_{1,1}$, $e_{2,2}$, $e_{3,3}$ die Werthe aus (30) und für R^2 aus (17) eingesetzt, so folgt als Endergebniß

$$\frac{(p-p_0)^2}{d_{1,1}-(a^2+b^2)\lambda} = \frac{(q-q_0)^2}{d_{2,2}-(a'^2+b'^2)\lambda} = \frac{(r-r_0)^2}{d_{3,3}-(a''^2+b''^2)\lambda} \\ = \frac{\pm S^2.\Delta}{D\lambda\sqrt{[F(a,a',a'')-F(b,b',b'')]^2+N^2}} \qquad (34)$$

Das obere Zeichen gilt für $\lambda=\lambda_1$; das untere für $\lambda=\lambda_2$. — Somit erhält man für jede Coordinatendifferenz zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe. Welche davon auf denselben Endpunkt einer der Axen zu beziehen sind, läßt sich nur mit Hilfe von Gleichung (15) entscheiden.

Wir verzichten auf die Discussion der Gleichungen (34), die zu den bereits bekannten Ergebnissen führt. Nur die Bemerkung mag hier eine Stelle finden, daß dieselben mit den Gleichungen (27) vollkommen übereinstimmen, indem im Falle ihres Bestehens die Größen $p-p_0$ etc. völlig unbestimmt werden, wie es sich für den Kreis von selbst versteht. Auch das zum Falle III 1. bemerkte findet hier Bestätigung, wenn die Werthe von p_0, q_0, r_0 [vgl. Gleichungen (7) und (8)] berücksichtigt werden.

9. Die für die Quadrate der Halbaxen aufgestellten Ausdrücke können natürlich nur Invarianten sein. Um dies zu zeigen, führen wir durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} p &= \mathfrak{a}p_1 + \mathfrak{b}q_1 + \mathfrak{c}r_1 \\ q &= \mathfrak{a}'p_1 + \mathfrak{b}'q_1 + \mathfrak{c}'r_1 \\ r &= \mathfrak{a}''p_1 + \mathfrak{b}''q_1 + \mathfrak{c}''r_1 \end{aligned} \qquad (a)$$

ein neues Coordinatensystem p_1, q_1, r_1 ein und suchen die darauf sich beziehenden Ausdrücke, welche wir durch den unten beigesetzten Index „1" hervorheben, wieder durch die Constanten des ursprünglichen Systemes darzustellen.

Bezeichnet man die Determinante der Substitution (a) mit $\mathfrak{D}$ und die Unterdeterminanten derselben mit $\mathfrak{d}_{r,s}$, so ergibt sich durch Umkehrung von (a)

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}.p_1 &= \mathfrak{d}_{1,1}p+\mathfrak{d}_{2,1}q+\mathfrak{d}_{3,1}r\\ \mathfrak{D}.q_1 &= \mathfrak{d}_{1,2}p+\mathfrak{d}_{2,2}q+\mathfrak{d}_{3,2}r\\ \mathfrak{D}.r_1 &= \mathfrak{d}_{1,3}p+\mathfrak{d}_{2,3}q+\mathfrak{d}_{3,3}r.\end{aligned}$$

Setzt man hierin für p, q, r die Ausdrücke (1) und für p_1, q_1, r_1 die entsprechenden $a_1x+b_1y+c_1$ etc., so erhält man sofort

$$(b)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{D}.a_1 &= \mathfrak{d}_{1,1}a+\mathfrak{d}_{2,1}a'+\mathfrak{d}_{3,1}a''\\ \mathfrak{D}.a_1' &= \mathfrak{d}_{1,2}a+\mathfrak{d}_{2,2}a'+\mathfrak{d}_{3,2}a''\\ \mathfrak{D}.a_1'' &= \mathfrak{d}_{1,3}a+\mathfrak{d}_{2,3}a'+\mathfrak{d}_{3,3}a''\end{aligned}$$

und analog für die b_1, b_1', b_1'' und c_1, c_1', c_1'' zwei Systeme von Gleichungen, die aus (b) durch Vertauschung der a mit den b, bezüglich c hervorgehen. Man sieht jetzt unmittelbar, daß

$$(c)\qquad S_1 = \frac{S}{\mathfrak{D}}.$$

Die identische Gleichung des neuen Systemes wird durch

$$\gamma_1 p_1+\gamma_1' q_1+\gamma_1'' r_1 = \frac{S}{\mathfrak{D}}$$

dargestellt; mit ihr fällt die Gleichung zusammen, welche man erhält, wenn man in (2) die Substitution (a) ausführt. Diese Bemerkung liefert die Identitäten:

$$(d)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{D}.\gamma_1 &= \mathfrak{a}\gamma+\mathfrak{a}'\gamma'+\mathfrak{a}''\gamma''\\ \mathfrak{D}.\gamma_1' &= \mathfrak{b}\gamma+\mathfrak{b}'\gamma'+\mathfrak{b}''\gamma''\\ \mathfrak{D}.\gamma_1'' &= \mathfrak{c}\gamma+\mathfrak{c}'\gamma'+\mathfrak{c}''\gamma''.\end{aligned}$$

Um die Coëfficienten der transformirten Gleichung (6) einfach darzustellen, benützen wir die Größen

$$A\mathfrak{a}+C'\mathfrak{a}'+B'\mathfrak{a}'' = \mathfrak{A},\quad C'\mathfrak{a}+B\mathfrak{a}'+A'\mathfrak{a}'' = \mathfrak{A}',\quad B'\mathfrak{a}+A'\mathfrak{a}'+C\mathfrak{a}'' = \mathfrak{A}'$$

und zwei weitere Systeme $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{B}''$; $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, welche aus den $\mathfrak{A}$ durch Vertauschung der $\mathfrak{a}$ mit den $\mathfrak{b}$, bezüglich $\mathfrak{c}$ hervorgehen. Jetzt erscheinen die genannten Coëfficienten in folgender Form:

$$\left.\begin{array}{c} A_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{a} + \mathfrak{A}'\mathfrak{a}' + \mathfrak{A}''\mathfrak{a}'', \; B_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{b} + \mathfrak{B}'\mathfrak{b}' + \mathfrak{B}''\mathfrak{b}'', \; C_1 = \mathfrak{C}\mathfrak{c} + \mathfrak{C}'\mathfrak{c}' + \mathfrak{C}''\mathfrak{c}'' \\ A'_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{c} + \mathfrak{B}'\mathfrak{c}' + \mathfrak{B}''\mathfrak{c}'' = \mathfrak{C}\mathfrak{b} + \mathfrak{C}'\mathfrak{b}' + \mathfrak{C}''\mathfrak{b}'' \\ B'_1 = \mathfrak{C}\mathfrak{a} + \mathfrak{C}'\mathfrak{a}' + \mathfrak{C}''\mathfrak{a}'' = \mathfrak{A}\mathfrak{c} + \mathfrak{A}'\mathfrak{c}' + \mathfrak{A}''\mathfrak{c}'' \\ C'_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{b} + \mathfrak{A}'\mathfrak{b}' + \mathfrak{A}''\mathfrak{b}'' = \mathfrak{B}\mathfrak{a} + \mathfrak{B}'\mathfrak{a}' + \mathfrak{B}''\mathfrak{a} \end{array}\right\} \quad (e)$$

Mit Hilfe dieser und der Ausdrücke (d) findet man sofort

$$D_1 = D. \qquad (f)$$

Ferner ergibt sich vermittelst (b)

$$\mathfrak{D}(A_1 a_1 + C'_1 a'_1 + B'_1 a''_1) = a(A_1 \mathfrak{d}_{1,1} + C'_1 \mathfrak{d}_{1,2} + B'_1 \mathfrak{d}_{1,3}) \\ + a'(A_1 \mathfrak{d}_{2,1} + C'_1 \mathfrak{d}_{2,2} + B'_1 \mathfrak{d}_{2,3}) + a''(A_1 \mathfrak{d}_{3,1} + C'_1 \mathfrak{d}_{3,2} + B'_1 \mathfrak{d}_{3,3}).$$

Mit Rücksicht auf die Relationen

$$\mathfrak{d}_{1,1}\mathfrak{a} + \mathfrak{d}_{1,2}\mathfrak{b} + \mathfrak{d}_{1,3}\mathfrak{c} = \mathfrak{D}, \; \mathfrak{d}_{1,1}\mathfrak{a}' + \mathfrak{d}_{1,2}\mathfrak{b}' + \mathfrak{d}_{1,3}\mathfrak{c}' = 0, \; \mathfrak{d}_{1,1}\mathfrak{a}'' + \mathfrak{d}_{1,2}\mathfrak{b}'' + \mathfrak{d}_{1,3}\mathfrak{c}'' = 0$$

erhält man aus (e)

$$A_1 \mathfrak{d}_{1,1} + C' \mathfrak{d}_{1,2} + B' \mathfrak{d}_{1,3} = \mathfrak{A} . \mathfrak{D}$$

und analog

$$A_1 \mathfrak{d}_{2,1} + C'_1 \mathfrak{d}_{2,2} + B'_1 \mathfrak{d}_{2,3} = \mathfrak{A}'\mathfrak{D}, \quad A_1 \mathfrak{d}_{3,1} + B'_1 \mathfrak{d}_{3,2} + C'_1 \mathfrak{d}_{3,3} = \mathfrak{A}''\mathfrak{D};$$

also schließlich

$$A_1 a_1 + C'_1 a'_1 + B'_1 a''_1 = \mathfrak{A}a + \mathfrak{A}'a' + \mathfrak{A}''a''.$$

Auf ähnliche Art verschafft man sich die Gleichungen

$$C'_1 a_1 + B_1 a'_1 + A'_1 a''_1 = \mathfrak{B}a + \mathfrak{B}'a' + \mathfrak{B}''a''$$
$$B'_1 a_1 + A'_1 a'_1 + C_1 a''_1 = \mathfrak{C}a + \mathfrak{C}'a' + \mathfrak{C}''a''$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit a_1, a'_1, a''_1 und addirt, so folgt

$$F_1(a_1, a'_1, a''_1) = a(\mathfrak{A}a_1 + \mathfrak{B}a'_1 + \mathfrak{C}a''_1) + a'(\mathfrak{A}'a_1 + \mathfrak{B}'a'_1 + \mathfrak{C}'a''_1) \\ + a''(\mathfrak{A}''a_1 + \mathfrak{B}''a'_1 + \mathfrak{C}''a''_1).$$

Durch unmittelbare Substitution der Werthe von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ergibt sich ferner

$$\mathfrak{A}a_1 + \mathfrak{B}a'_1 + \mathfrak{C}a''_1 = A(a_1\mathfrak{a} + a'_1\mathfrak{b} + a''_1\mathfrak{c}) + C'(a_1\mathfrak{a}' + a'_1\mathfrak{b}' + a''_1\mathfrak{c}') \\ + B'(a_1\mathfrak{a}'' + a'_1\mathfrak{b}'' + a''_1\mathfrak{c}'').$$

Man bemerkt mit Rücksicht auf die Identitäten (b) sogleich, daß die Coëfficienten der A, C', B' in vorstehender Gleichung nichts anderes sind, als a, a', a''; also ist

$$\mathfrak{A}a_1+\mathfrak{B}a'_1+\mathfrak{C}a''_1 = Aa+C'a'+B'a''$$

und analog

$$\mathfrak{A}'a_1+\mathfrak{B}'a'_1+\mathfrak{C}'a''_1 = C'a+Ba'+A'a''$$
$$\mathfrak{A}''a_1+\mathfrak{B}''a'_1+\mathfrak{C}''a''_1 = B'a+A'a'+Ca'',$$

so daß man zur Gleichung gelangt

$$(g) \qquad F_1(a_1, a'_1, a''_1) = F(a, a', a''),$$

der man sogleich die analoge an die Seite stellen wird:

$$F_1(b_1, b'_1, b''_1) = F(b, b', b'')$$

Man sieht also, daß die Coëfficienten der Gleichung (24) durch eine Coordinaten-Transformation nicht geändert werden, daß somit

$$\lambda_1 = \lambda.$$

Bemerkt man hiezu noch, daß den Gleichungen (e) zufolge

$$\Delta_1 = \mathfrak{D}^2 . \Delta,$$

so findet man unter Beachtung von (c) aus (17), daß

$$R_1 = R.$$

10. Zum Schlusse sei es gestattet, die vorgeführten Ausdrücke auf die bekannte Aufgabe: „die größte Ellipse zu bestimmen, welche sich einem gegebenen Dreiecke einschreiben läßt“, anzuwenden. Indem wir das gegebene Dreieck als Fundamentaldreieck

$$p=0, \quad q=0, \quad r=0$$

betrachten, erhalten wir bekanntlich als allgemeine Gleichung der demselben eingeschriebenen Kegelschnitte:

$$k^2p^2+l^2q^2+m^2r^2-2klpq-2lmqr-2mkrp = 0,$$

worin k, l, m beliebige Constante sind. Für die Fläche F einer Ellipse haben wir im Allgemeinen [nach (28)]:

$$(35) \qquad F = R_1R_2\pi = \pi S^2 . \frac{\Delta}{(-D)^{\frac{3}{2}}}.$$

In unserem Falle ist

$$\Delta = -4k^2l^2m^2 \qquad D = -4klm(k\gamma'\gamma''+l\gamma''\gamma+m\gamma\gamma').$$

Setzt man diese Ausdrücke in (35) ein, so sieht man sogleich, daß es sich um Untersuchung des Ausdruckes

$$U = \frac{klm}{(k\gamma'\gamma''+l\gamma''\gamma+m\gamma\gamma')^3}$$

handle. Indem wir die Größen k, l, m als unabhängige Veränderliche betrachten, erhalten wir als Bedingungsgleichungen für die Maxima und Minima von U:

$$\begin{aligned} lm\,(-2k\gamma'\gamma''+\ l\gamma''\gamma+\ m\gamma\gamma') &= 0 \\ mk\,(\ \ k\gamma'\gamma''-2l\gamma''\gamma+\ m\gamma\gamma') &= 0 \\ kl\,(\ \ k\gamma'\gamma''+\ l\gamma''\gamma-2m\gamma\gamma') &= 0. \end{aligned}$$

Das Verschwinden der Größen k, l, m ist offenbar nicht zulässig; also bleibt nur die Annahme

$$\frac{k}{\gamma} = \frac{l}{\gamma'} = \frac{m}{\gamma''}$$

übrig, welche in der That, wie man sich leicht überzeugt, einem Maximum von F entspricht. Man findet dasselbe sofort $= \dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}\ \dfrac{S^2}{\gamma\gamma'\gamma''}$.

Da der Flächeninhalt des Fundamentaldreieckes bekanntlich $\frac{1}{2}\cdot\dfrac{S^2}{\gamma\gamma'\gamma''}$ ist, so ist das Verhältniß desselben zur größten eingeschriebenen Ellipse $3\sqrt{3} : \pi$.

Nach den Gleichungen (7) ergibt sich für die Mittelpunkts-Coordinaten unserer Ellipse:

$$\gamma p_0-\gamma' q_0-\gamma'' r_0 = -\gamma p_0+\gamma' q_0-\gamma'' r_0 = -\gamma p_0-\gamma' q_0+\gamma'' r_0$$

oder

$$\gamma p_0 = \gamma' q_0 = \gamma'' r_0 = \frac{S}{3}$$

[nach (8)]: das Centrum fällt also in den Schwerpunkt des Dreieckes.

Die Berührungspunkte der Dreieckseiten bestimmen sich durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p &= 0, & \gamma' q - \gamma'' r &= 0 \\ q &= 0, & \gamma'' r - \gamma p &= 0 \\ r &= 0, & \gamma p - \gamma' q &= 0 \end{aligned}$$

und werden sofort als die Mittelpunkte derselben erkannt.

Um endlich die Axen unserer Ellipse zu bestimmen, suchen wir, da nach (35) $R_1 R_2$ schon bekannt ist, noch

$$(36)\quad R_1^2 + R_2^2 = -\frac{S^2 . \Delta}{D}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) = -\frac{S^2 \Delta}{D^2}\{F(a, a', a'') + F(b, b', b'')\}$$

[vgl. (17) und (28)]. Wenn wir diesen Ausdruck nach Gleichung (23) bilden, so ergibt sich ohne Mühe

$$R_1^2 + R_2^2 = -\frac{S^2}{9\gamma^2\gamma'^2\gamma''^2} . \\ \{(a'a'' + b'b'')\gamma'\gamma'' + (a''a + b''b)\gamma''\gamma + (aa' + bb')\gamma\gamma'\} .$$

Multiplicirt man die Gleichungen (20) der Reihe nach mit γ, γ', γ'' und addirt, so erhält man an Stelle des in der Klammer stehenden Ausdruckes

$$-\tfrac{1}{2}\{(a^2 + b^2)\gamma^2 + (a'^2 + b'^2)\gamma'^2 + (a''^2 + b''^2)\gamma''^2\},$$

also

$$R_1^2 + R_2^2 = \frac{S^2}{18}\left\{\frac{a^2 + b^2}{\gamma'^2\gamma''^2} + \frac{a'^2 + b'^2}{\gamma''^2\gamma^2} + \frac{a''^2 + b''^2}{\gamma^2\gamma'^2}\right\}$$

oder mit Rücksicht auf die in Nr. 1 für die Seiten P, Q, R des Fundamentaldreieckes aufgestellten Ausdrücke

$$R_1^2 + R_2^2 = \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{18}.$$

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1867

Band/Volume: 55_2

Autor(en)/Author(s): Stolz Otto

Artikel/Article: Die Axen der Linien zweiter Ordnung in allgemeinen trimetrischen Punkt-Coordinaten. 280-308