Theorie des Gleichgewichtes und der Bewegung eines Systems von Punkten.

Von **J. Loschmidt.**

Poinsot definirt die Aufgabe der gesammten Mechanik in dem berühmten Memoire: „De l'équilibre et du mouvement des Systèmes" Jour. de l'école pol. cahier 13, tome VI, p. 230 in folgenden Sätzen:

„Die Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung eines freien Punktes sind bekannt und strenge bewiesen; welches aber werden die Gesetze des Gleichgewichtes und der Bewegung mehrerer Punkte sein, die durch gewisse Bedingungen untereinander zu einem System verbunden sind? Dies das allgemeine Problem der ganzen Mechanik. — Der natürliche Gedankengang in dieser Untersuchung führt offenbar zunächst auf die Betrachtung, daß in einem Systeme, welches in Ruhe ist, jeder einzelne Punkt für sich im Gleichgewichte stehen müsse unter dem vereinten Einflusse der Kräfte, welche an ihm unmittelbar angebracht sind, und der Einwirkungen, welche er vermöge seiner Verbindungen mit andern Punkten von diesen erfährt.

Und ebenso, wenn sich das System in Bewegung befindet, wird jeder Punkt sich so bewegen, als ob er frei wäre, und dem Impulse jener Kräfte und Einwirkungen zugleich unterworfen wäre. Verstünde man also die gegenseitigen Einwirkungen der einzelnen Punkte auf einander zu berechnen, so brauchte man dieselben nur für jeden einzelnen Punkt mit den allda angebrachten Kräften, wie sie sich aus der Natur der gestellten Aufgabe ergeben, zu combiniren, dann die Gleichungen des Gleichgewichtes oder der Bewegung für jeden so aufzustellen, als ob er ein freier wäre, und man hätte alles beisammen, um den Zustand des Systems im Raume zu bestimmen — das Problem wäre gelöst."

Diese Aufgabe nun hat Poinsot in seiner Abhandlung wirklich gelöst. Er gelangt dabei zu einem Theorem, welches die Gleichungen sowohl des Gleichgewichtes, als auch der Bewegung eines Systemes gibt, ohne im letztern Fall das D'Alembert'sche Princip zu benöthigen.

Zum Schlusse zeigt er noch, wie das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten als eine einfache analytische Transformation seines Theorems anzusehen sei, welche Form in manchen Fällen allerdings eine bequemere Handhabung gestattet, während in manchen andern das Gegentheil stattfindet.

Die Aufgabe, welche wir uns in Folgendem stellen besteht erstlich in einer kürzern Ableitung des Poinsot'schen Theorems. Dabei wollen wir zugleich einen von Poinsot gebrauchten Kunstgriff vermeiden, gegen welchen sich Bedenken erheben lassen. Um nämlich den Einfluß einer Bedingungsgleichung zwischen den Coordinaten der Systempunkte auf einen dieser Punkte m_1 zu bestimmen, betrachtet derselbe einstweilen drei andere Punkte des Systems als fix, und die Abstände aller übrigen — mit Ausnahme von m_1 — von diesen als constant, was allerdings die Betrachtung wesentlich vereinfacht. Allein es dürfte schwierig, oder mindestens weitläufig werden, die Zulässigkeit dieses Verfahrens für alle Systeme nachzuweisen. — Zweitens wollen wir das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten auf ähnlichem Wege direct ableiten.

Für das Gleichgewicht eines freien Punktes haben wir zwei äquivalente Sätze: 1. Die Resultirende aller auf ihn wirkenden Kräfte muß verschwinden. $R = o$. 2. Die Summe der virtuellen Momente aller auf ihn wirkenden Kräfte muß Null sein: $\Sigma P\delta s. (\cos P.\delta s) = o$ oder $\delta s \cos (P.\delta s) = \delta p$ gesetzt:

$$\Sigma P\delta p = 0.$$

Die Ausdehnung des ersten Satzes auf ein System von Punkten führt zum Poinsot'schen Theorem, die des zweiten zum Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

I. Gleichgewichtsbedingungen für einen Punkt, dessen Bewegung Bedingungsgleichungen unterworfen ist, welche als Variable allein seine Coordinaten enthalten.

Zum Gleichgewichte des freien Punktes m, auf welchen die Kräfte P_1, P_2. wirken, ist erforderlich, daß die Resultirende dieser Kräfte Null sei. Anders wenn derselbe kein vollkommen freier ist. Befindet sich m z. B. am Ende der starren Linie am, welche um den fixen Punkt a frei beweglich ist, so ist die Bewegung des Punktes m an die mit dem Radius am beschriebene Kugelfläche gebunden. Jede Kraftcomponente, welche auf m in der Richtung am wirkt, wird durch den Widerstand der starren Linie aufgehoben, und es genügt schon zum Gleichgewichte von m, daß die Resultirende aller auf am senkrechten Componenten verschwinde.

Der Widerstand der Linie am ist jedenfalls eine Kraft — ein Etwas, das den Bewegungszustand eines materiellen Punktes abzuändern vermag — aber eine eigenthümliche. Diese Kraft vermag nämlich selber keine Bewegung hervorzubringen, sondern nur welche zu verhindern, auch hat sie keine für sich bestimmte Größe, wohl aber eine bestimmte Richtungslinie. In letzterer wirkend nimmt sie jedesmal genau die Größe jener Kraft an, welche auf m direct in dieser Richtungslinie angebracht ist. Zugleich ist sie der letztern immer gerade entgegengesetzt. Die absonderliche Natur dieser Kräfte entspringt aus der Auffassung des Mathematikers, dem die Einführung solcher fingirter Kräfte eine große und zulässige Erleichterung in der Behandlung vieler Probleme gewährt. In unserm obigen Beispiele ist nämlich die starre Linie am in der Wirklichkeit immer ein physischer Körper und als solcher sowohl ausdehnbar als auch zusammendrückbar. Nennen wir in unserm Beispiele die in die Richtung am fallende Total-Componente der angebrachten Kräfte p, so wird für $p = o$ die Stange weder eine Verlängerung noch eine Verkürzung erfahren, und ihr Widerstand ebenfalls Null sein. Sobald aber p eine angebbare Größe in der Richtung am erhält, wird die Stange ausgedehnt, der Punkt m rückt in die Position m_1 vor, und zwar so weit, bis die durch die Ausdehnung in der Stange geweckte Elasticitätskraft gleich p geworden ist. Umgekehrt, wenn die Richtung von p nach ma geht, wird die Stange zusammengedrückt, so weit bis die rückwirkende Kraft die Größe von p erreicht. Es erscheint demnach jener Punkt, in welchem sich m für $p = o$ befindet, als Centralpunkt einer Elasticitätskraft, welche mit veränderlicher Intensität auf den materiellen Punkt m anziehend wirkt. Die obige Kugelfläche ist der geometrische Ort aller Ruhelagen von m für alle mögliche Positionen von am, oder, im Falle der Bewegung, die Fläche, in welcher alle denkbaren Bahnen desselben liegen. Aber in der Wirklichkeit ist diese Annahme nur eine angenäherte. Denn während der Bewegung z. B. wird die Bahn von m im Allgemeinen eine Linie beschreiben, welche wellenartig sich bald über die Kugelfläche hinaus, bald innerhalb derselben hineinbiegen wird.

Nun sind aber die Verlängerungen und Verkürzungen, welche die Stange erleidet, meistens ganz unbedeutend neben den andern Ortsveränderungen, welche man in Betracht zieht, so daß man sie neben diesen füglich ganz vernachlässigen darf, was eben mit dem Ausdruck die Linie *am* sei „vollkommen starr" angezeigt wird. Die Verlängerungen und Verkürzungen konnte man demnach ohne Schaden weglassen, aber nicht die durch sie geweckten Elasticitätskräfte oder Widerstände. Man hat nunmehr in diesen Kräften Wirkungen, deren Ursachen man geflissentlich vernachläßigt, und sie werden damit einigermaßen paradox. Nun erscheint an m, ohne daß es seine Lage in Bezug auf *am* ändert, bald keine, bald eine sehr große Kraft, welche vom Materiale der Linie *am* ausgeht — in Wirklichkeit findet aber immer eine correspondirende Ortsveränderung statt. — Die reine Mechanik, welche billigerweise bei allen ihren a prioristischen Constructionen die Bedürfnisse der physischen Mechanik nicht aus den Augen verliert, hat diese Widerstandskräfte in den Bedingungsgleichungen mit Leichtigkeit zu handhaben gelernt, ohne sich um ihre physische Herkunft sonderlich zu kümmern.

Hätte man aber eine Methode aus diesen Bedingungsgleichungen die Widerstandskräfte, welche sie repräsentiren, explicite herauszuheben, so brauchte man sie nur, wie Poinsot andeutet, den unmittelbar gegebenen Kräften beizufügen, und alles Anomale in der Art dieser Kräfte des Widerstandes wäre getilgt, das Problem auf die Behandlung des freien Punktes reducirt. Vortheilhaft ist es, in complicirten Fällen, wo der bewegliche Punkt in verschiedenen Positionen zu betrachten ist, die Richtung der Widerstandskräfte immer auf drei beliebige fixe Punkte a, b, c, welche nicht in einer Geraden liegen, zu beziehen.

Sei für den beweglichen Punkt m, an welchen die Kraft P angebracht ist, die Bedingungsgleichung $f(x, y, z) = L = o$, gegeben. Welches sind die Widerstandskräfte, die durch diese Gleichung repräsentirt werden?

Die Gleichung $L = o$ gilt für jede Position des Gleichgewichtes, so wie auch für jeden Moment der Bewegung von m. Dieselbe besagt: daß der Punkt m in jeder möglichen Position des Gleichgewichtes oder der Bewegung sich auf der Fläche $L = o$ befinden müsse, oder auch, daß die Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ desselben für jede wirkliche oder auch nur zulässige Bewegung an die Bedingung gebunden sind:

$$\frac{dL}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{dL}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{dL}{dz}\,\frac{dz}{dt}=0 \qquad (A)$$

Die Cosinus der Winkel, welche die Normale N der Fläche $L=o$ im Punkte x, y, z mit den drei Coordinatenaxen X, Y, Z macht, sind

$$\left.\begin{aligned}\cos(N.X)&=\frac{1}{V}\cdot\frac{dL}{dx}\\ \cos(N.Y)&=\frac{1}{V}\cdot\frac{dL}{dy}\\ \cos(N.Z)&=\frac{1}{V}\cdot\frac{dL}{dz}\end{aligned}\right\}\text{ wo } V=\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2}$$

bezeichnet.

Demnach sind die orthogonalen Componenten der im Punkte x, y, z auf der Fläche $L=o$ normalstehenden Widerstandskraft Π

$$\begin{aligned}\Pi\cos(N.X)&=\frac{\Pi}{V}\,\frac{dL}{dx}\\ \Pi\cos(N.Y)&=\frac{\Pi}{V}\cdot\frac{dL}{dy}\\ \Pi\cos(N.Z)&=\frac{\Pi}{V}\cdot\frac{dL}{dz}\end{aligned} \qquad (B)$$

Indem wir zur Abkürzung $\frac{\Pi}{V}=\lambda$ setzen, und die Distanzen $am=n$, $bm=p$, $cm=q$ des Punktes m von drei fixen Punkten a, b, c statt x, y, z in die Gleichungen $L=o$ einführen, erhalten die Gleichungen B die Form

$$\begin{aligned}\Pi\cos(N.X)&=\lambda\frac{dL}{dx}=\lambda\left[\frac{dL}{dn}\;\frac{dn}{dx}+\frac{dL}{dp}\;\frac{dp}{dx}+\frac{dL}{dq}\;\frac{dq}{dx}\right]\\ \Pi\operatorname{con}(N.Y)&=\lambda\frac{dL}{dy}=\lambda\left[\frac{dL}{dn}\;\frac{dn}{dy}+\frac{dL}{dp}\;\frac{dp}{dy}+\frac{dL}{dq}\;\frac{dq}{dy}\right]\\ \Pi\cos(N.Z)&=\lambda\frac{dL}{dz}=\lambda\left[\frac{dL}{dn}\;\frac{dn}{dz}+\frac{dL}{dp}\;\frac{dp}{dz}+\frac{dL}{dq}\;\frac{dq}{dz}\right]\end{aligned} \qquad (C)$$

Seien ferner die orthogonalen Coordinaten der Punkte a, b, c respective ξ, η, ζ; ξ_2, η_2, ζ_2; ξ_3, η_3, ζ_3 so wird

$$\begin{cases} n = \sqrt{(x-\xi_1)^2+(y-\eta_1)^2+(z-\zeta_1)^2} \\ p = \sqrt{(x-\xi_2)^2+(y-\eta_2)^2+(z-\zeta_2)^2} \\ q = \sqrt{(x-\xi_3)^2+(y-\eta_3)^2+(z-\zeta_3)^2} \end{cases}$$

und

$$\frac{dn}{dx} = \frac{x-\xi_1}{n} = \cos(n.X)\,; \quad \frac{dp}{dx} = \frac{x-\xi_2}{p} = \cos(p.X)\,;$$
$$\frac{dq}{dx} = \frac{x-\xi_3}{q} = \cos(q.X)$$

$$\frac{dn}{dy} = \frac{y-\eta_1}{n} = \cos(n.Y)\,; \quad \frac{dp}{dy} = \frac{y-\eta_2}{p} = \cos(p.Y)\,;$$
$$\frac{dq}{dy} = \frac{y-\eta_3}{q} = \cos(q.Y)$$

$$\frac{dn}{dz} = \frac{z-\zeta_1}{n} = \cos(n.Z)\,; \quad \frac{dp}{dz} = \frac{z-\zeta_2}{p} = \cos(p.Z)\,;$$
$$\frac{dq}{dz} = \frac{z-\zeta_3}{q} = \cos(q.Z).$$

Durch Substitution dieser Werthe von $\frac{dn}{dx}$, $\frac{dn}{dy}$ ...... in (C) haben wir

$$\begin{aligned} \Pi.\cos(N.X) &= \lambda\frac{dL}{dn}\cos(n.X) + \lambda\frac{dL}{dp}.\cos(p.X) + \lambda\frac{dL}{dq}.\cos(q.X) \\ \Pi.\cos(N.Y) &= \lambda\frac{dL}{dn}.\cos(n.Y) + \lambda\frac{dL}{dp}.\cos(p.Y) + \lambda\frac{dL}{dq}.\cos(q.Y) \quad (D) \\ \Pi.\cos(N.Z) &= \lambda\frac{dL}{dn}\cos(n.Z) + \lambda\frac{dL}{dp}.\cos(p.Z) + \lambda\frac{dL}{dq}.\cos(q.Z) \end{aligned}$$

Der bloße Anblick der Gleichungen D aber zeigt, daß die Größen $\lambda\frac{dL}{dn}$, $\lambda\frac{dL}{dp}$, $\lambda\frac{dL}{dq}$ die Componenten von Π nach den Linien n, p, q vorstellen.

Note. Aus den Gleichungen

$$\frac{dn}{dx} = \frac{x-\xi_1}{n} \text{ und } \frac{dn}{d\xi_1} = -\frac{(x-\xi_1)}{n}$$

u. s. w. erhellt, daß auch die Widerstände, welche die fixen Punkte a, b, c zu erleiden haben den derivirten von L nach den Linien n, p, q proportional sind. —

Wenn zwei Bedingungsgleichungen: $L=o$, $M=o$ zwischen den Coordinaten von m gegeben sind, so schneiden sich im Punkte x, y, z zwei Flächen. Jede derselben hebt eine beliebig große Kraft auf, welche am Punkte m in der Richtung ihrer Normale angebracht wäre. Bezeichnen wir diese beiden Widerstandskräfte mit Π_1 und Π_2, so erhalten wir nach den Verbindungslinien n, p, q die Componenten

$$N=\lambda\frac{dL}{dn}+\mu\frac{dM}{dn};\; P=\lambda\frac{dL}{dp}+\mu\frac{dM}{dp};\; Q=\lambda\frac{dL}{dq}+\mu\frac{dM}{dq};$$

und ebenso für die Componenten nach X, Y, Z

$$X=\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx};\; Y=\lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dL}{dy};\; Z=\lambda\frac{dL}{dz}+\mu\frac{dM}{dz},$$

wo

$$\lambda=\Pi_1\left[\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

und

$$\mu=\Pi_2\left[\left(\frac{dM}{dx}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy}\right)^3+\left(\frac{dM}{dz}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

gesetzt wurde.

Die beiden Kräfte Π_1 und Π_2 setzen sich an m zu einer Resultirenden zusammen, deren Richtung in die Ebene der Normallinien beider Flächen fällt, welche aber in dieser, vermöge der Unbestimmtheit der Größe von Π_1 und Π_2, jede beliebige Größe und Richtung haben kann. — Dies der Fall, wo m auf einer vorgeschriebenen Curve zu bleiben genöthigt ist.

Obwohl drei fixe Punkte a, b, c immer genügen, die Kraft Π, welche auf den Punkt m normal zur Fläche $L=o$ wirkt, in jeder Position als Resultirende von Kräften, die in diesen Richtungen wirken, erscheinen zu lassen, so hindert doch nichts, mehr als drei solche fixe Punkte zu benützen. Wenn man deren Abstände von m in die Gleichung $L = o$ einführt, so werden die in selbe fallenden Componenten von Π wieder durch das Produkt von λ in die nach den respectiven Distanzen genommenen Differentialquotienten von L ausgedrückt. Dies ist von Wichtigkeit, wenn es sich darum handelt, die Widerstände zu bestimmen, welche gewisse Verbindungsstücke in einer mechanischen Construction zu leisten haben.

Außerdem können diese fixen Punkte selber für die verschiedenen Punkte der Oberfläche $L = o$, in welchen sich m successive befindet, verschieden sein. Einen speciellen Fall bietet die Anwendung der gewöhnlichen Coordinaten. Es sind dies Abstände von je drei fixen Punkten in drei Ebenen, welche fixe Punkte im Allgemeinen für jeden Punkt der Fläche andere sind.

Will man auch jene Widerstände bestimmen, welche die fixen Punkte zu leisten haben, so muß man sie als bewegliche behandeln, welche durch die Gleichung $L = o$, in der nunmehr auch die Coordinaten dieser Punkte als Variable auftreten, an gewisse Flächen gebunden sind. Daraus sieht man, daß die vollständige Lösung unseres Problems auf die Betrachtung eines Systems von mehreren Punkten hinweist, eine Aufgabe, mit der wir uns im Folgenden beschäftigen wollen.

Gleichgewicht eines Systems von Punkten.

Es ist ein System von Punkten: m_1, m_2, $m_3 \ldots$ gegeben, an denen respective die Kräfte P_1, P_2, $P_3 \ldots$ angebracht sind. Zwischen diesen Punkten bestehen Verbindungen, welche durch die Bedingungsgleichung $L = o$ ausgedrückt sind. Diese Gleichung enthalte als Veränderliche nur die Coordinaten der Punkte des Systems.

Gesucht werden die Bedingungen, welchen die Kräfte $P_1, P_2\, P_3 \ldots$ für jede beliebige Position des Systems, die mit der Natur desselben vereinbar ist, genügen müssen, damit das System im Gleichgewicht sei.

Bezeichnen wir die Coordinaten der Punkte $m_1, m_2, m_3 \ldots$, welche in die Gleichung $L = o$ eingehen, beziehungsweise mit $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots$, so erhält dieselbe die Form

$$L = f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots) = 0. \qquad \text{(I)}$$

Wäre der Punkt m_1 allein beweglich, die übrigen aber fix, so würde die Gleichung (I) aussagen, daß der Punkt m_1 bei allen möglichen Positionen, die er einnehmen kann, an eine Fläche gebunden sei, deren Gleichung eben (I) ist, wenn in ihr die Coordinaten der übrigen Punkte als constante Parameter betrachtet werden. Gibt man aber diesen letzteren successive verschiedene Werthe, so erhält zwar die Gleichung (I), als Flächengleichung von m_1 angesehen, für jede Werthgruppe eine andere Gestalt, aber m_1 bleibt doch jedesmal an dieselbe gebunden.

Beziehen wir nun die Gleichung (I) als Flächengleichung auf die verschiedenen Punkte $m_1, m_2 \ldots$ zugleich, und lassen das System successive verschiedene Positionen des Gleichgewichtes einnehmen, so stellt dieselbe für jede solche Position ein System von Flächen dar, derart, daß jeder von jenen Punkten an eine dieser Flächen gebunden ist.

Durch Differentiation der Gleichung (I) in Bezug auf die Zeit t erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dx_1}\frac{dx_1}{dt}dt + \frac{dL}{dy_1}\frac{dy_1}{dt}dt + \frac{dL}{dz_1}\frac{dz_1}{dt}dt + \frac{dL}{dx_2}\frac{dx_2}{dt}dt + \frac{dL}{dy_2}\frac{dy_2}{dt}dt \\ + \frac{dL}{dz_2}\frac{dz_2}{dt}dt + \ldots = 0,\end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

welche für jeden Punkt die Ebene angibt, in welcher sein Bahnelement enthalten sein muß, wenn das System aus einer bestimmten Position des Gleichgewichtes in eine beliebige zulässige Bewegung übergehen soll, oder, falls das System bereits in Bewegung ist, in welcher sich das derzeitige Bahnelement der wirklichen Bewegung befindet.

Für den Punkt m_1 hat die Gleichung jener Ebene die Form

$$\frac{dL}{dx_1} \cdot \xi + \frac{dL}{dy_1} \cdot \eta + \frac{dL}{dz_1} \cdot \zeta = D,$$

und die Cosinus, welche ihre im Punkte $x_1, y_1\, z_1$ errichtete Normale N mit den Coordinatenaxen macht, sind

$$\cos(N.X) = \frac{1}{V}\frac{dL}{dx_1}; \ \cos(N.Y) = \frac{1}{V}\frac{dL}{dy_1}; \ \cos(N.Z) = \frac{1}{V}\frac{dL}{dz_1},$$

wo

$$V = \sqrt{\left(\frac{dL}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dy_1}\right)^2 + \left(\frac{dL}{dz_1}\right)^2}$$

Es fallen daher diese Winkel mit jenen zusammen, welche die Normale der Fläche $L = o$, wenn in dieser x_1, y_1, z_1 als die einzigen Variablen angesehen werden, mit den Axen macht.

Dies kommt offenbar auf den Satz hinaus, daß die Änderungen, welche letztere Winkel durch die gleichzeitigen unendlich kleinen Verschiebungen der andern Systempunkte erleiden, unendlich kleine Größen höherer Ordnung sind.

Es besteht demnach der Einfluß der Gleichung $L = o$ auf den Zustand des Systems darin, daß zu den an den Punkten $m_1, m_2, m_3 \ldots$ angebrachten Kräften $P_1, P_2, P_3 \ldots$ andere Kräfte $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \ldots$ hinzukommen, deren Richtung in die Normale bestimmter durch jene Punkte gelegten Flächen fällt, die der Größe nach genau gleich, dem Zeichen nach aber entgegengesetzt sind jenen Componenten von P_1, P_2, P_3, welche in die betreffende Normale fallen.

Soll daher das System in Ruhe bleiben, so ist dazu nothwendig, daß an jedem einzelnen Punkte die auf die dortige Flächennormale senkrechte Componente der allda angebrachten Kraft verschwinde.

Ferner ist man berechtigt, bei der Ableitung der Componenten der Widerstandskräfte nach bestimmten Richtungen für einen Punkt so zu verfahren, als ob er allein beweglich wäre, da dieselben auch hier, den Differentialquotienten von L genommen, nach den betreffenden Linien proportional sind.

Zwischen den Widerstandskräften $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \ldots$, welche an den verschiedenen Punkten des Systems in Folge der Gleichung $L = o$ auftreten, finden Relationen statt, an deren Herstellung wir nunmehr gehen wollen.

Nehmen wir vorerst an, wir hätten es mit einem einzigen Punkt m zu thun, welcher an die Fläche $L = o$ gebunden ist.

Wie wir oben gesehen, setzt dieser Fall voraus, daß im Allgemeinen noch drei Punkte a, b, c beizuziehen seien, welche mit m eigentlich ein System von vier Punkten bilden. Zwar sind diese letzteren fix, will man aber die Widerstände bestimmen, die sie zu leisten haben, so muß man sie als beweglich betrachten. Zu diesem Zwecke führen wir statt der Coordinaten x, y, z die Abstände $am = n$, $bm = p$, $cm = q$, $ab = f$, $ac = g$, $bc = h$ in die Gleichung $L = o$ ein, und erhalten dann für die Widerstandskraft Π am Punkte

m nach den Richtungen n, p, q die Componenten $\lambda \frac{dL}{dn}$, $\lambda \frac{dL}{dp}$, $\lambda \frac{dL}{dq}$, wo wieder $\lambda = \frac{\Pi}{V}$ bedeutet.

Ebenso wie m ist auch der Punkt a an eine Fläche gebunden, deren Gleichung wir erhalten, wenn wir in $L = o$ die orthogonalen Coordinaten von a allein als laufende Variable ansehen. Dann wirkt auf a normal zu dieser Fläche die Widerstandskraft Π_a, deren Componenten nach den Richtungen n, f, g analog dem Vorigen durch

$$\lambda_a \frac{dL}{dn}, \quad \lambda_a \frac{dL}{df}, \quad \lambda_a \frac{dL}{dg}$$

auszudrücken sind.

Wegen der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung in der Linie n muß aber sein $\lambda \frac{dL}{dn} = \lambda_a \frac{dL}{dn}$, also $\lambda = \lambda_a$.

Ebenso werden die Constanten λ_b, λ_c, welche die Componenten der Widerstandskräfte in den Punkten b und c als Factoren enthalten, derselben Größe λ gleich zu setzen sind.

Nehmen wir zweitens ein System von zwei Punkten m_1 und m_2, deren Coordinaten in die Bedingungsgleichung $L = o$ eingehen.

Wir benützen wieder das Dreieckcoordinatensystem, und führen in $L = o$ die Distanzen $am_1 = n_1$, $bm_1 = p_1$, $cm_1 = q_1$, $am_2 = n_2$, $bm_2 = p_2$, $cm_2 = q_2$ und f, g, h ein. An den fünf Punkten m_1, m_2, a, b, c, wirken normal zu den zugehörigen Flächen die Widerstandskräfte Π_1, Π_2, Π_a, Π_b, Π_c. Die Componenten derselben für jede von ihrem Angriffspunkte ausgehende Linie findet man auch hier, wenn man den Differenzialquotienten von L, genommen nach dieser Linie, mit einem Factor λ multiplicirt, welcher natürlich für alle Componenten jeder einzelner dieser Kräfte derselbe sein muß.

Wir erhalten so fünf Factoron λ_1, λ_2, λ_a, λ_b, λ_c.

Es ist aber leicht nachzuweisen, daß sie alle einander gleich sein müssen.

Denn am Punkte a haben wir für die Componenten der Widerstandskraft Π_a in den Richtungen f, g, n_1, n_2 die Ausdrücke

$$\lambda_a \frac{dL}{df}, \quad \lambda_a \frac{dL}{dg}, \quad \lambda_a \frac{dL}{dn_2}, \quad \lambda_n \frac{dL}{dn_2}.$$

Aber in der Richtung $am = n_1$ wirkt auch die Kraft $\lambda_1 \frac{dL}{dn_1}$ als Componente von Π_1 an m_1 in dieser Linie, und wegen der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung in dieser Linie ist nothwendig

$$\lambda_a \frac{dL}{dn_1} = \lambda_1 \frac{dL}{dn_1}$$

und aus gleichen Gründen auch

$$\lambda_a \frac{dL}{dn_2} = \lambda_2 \frac{dL}{dn_2} ,$$

woraus $\lambda_a = \lambda_1 = \lambda_2$, und, wenn wir diese Betrachtung weiter verfolgen, auch $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_c$ folgt.

Da dieses Raisonnement sich auf ganz gleiche Weise durchführen läßt, wie groß auch die Anzahl der Punkte des Systems sein möge, so gelangen wir zu folgendem Theorem:

Der Einfluß einer Bedingungsgleichung auf das System besteht darin, daß durch sie an jeden Punkt dessen Coordinaten in die Gleichung eingehen, eine Widerstandskraft von bestimmter Richtung und von einer bis auf einen willkürlichen für alle Punkte gleichen Factor, bestimmten Größe indizirt wird.

Note. Die Gleichung $L = o$ ist nur der unentwickelte Ausdruck jener Kräfte, und man drückt sich nicht correct aus, wenn man sagt: diese Kräfte können die Gleichung $L = o$ ersetzen, während sie eigentlich nichts bedeutet, als eben die Weisung, jene Kräfte an die betreffenden Punkte anzubringen. —

Auf Grund dieses Theorems wird man bei einer zweiten und dritten Bedingungsgleichung $N = o$, $M = o$ u. s. w., welche allenfalls außer $L = o$ noch vorhanden, genau so verfahren, als ob jede allein vorhanden wäre, und schließlich die von denselben an jeden Punkt indicirten Widerstandskräfte nach dem Kräftenparallelogramm zusammensetzen. Ein Zweifel ob dieses auch gestattet sei, ob man nicht alle Bedingungsgleichungen eines Systems gleichzeitig zu betrachten habe, ist ungerechtfertigt. Jede solche Gleichung sagt über Kräfte, welche an die Punkte des Systems zu kommen haben, etwas Bestimmtes aus, ohne sich um andere Beziehungen, welche nicht in ihr enthalten sind, zu kümmern, und die Kräfte, welche von allen an einen Punkt gebracht werden, können unmöglich anderen Gesetzen der Combination folgen, als irgend andere Kräfte, von denen sie sich im Wesen gar nicht unterscheiden.

Nach diesen Grundsätzen behandeln wir jeden Punkt des Systemes als einen freien sowohl hinsichtlich des Gleichgewichtes als auch der Bewegung.

Sind die Componenten der an den Punkt m_n angebrachten Kraft P_n nach den orthogonalen Coordinatenaxen X_n, Y_n, Z_n, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x_n}{dt^2} &= X_n + \lambda\frac{dL}{dx_n} + \mu\frac{dM}{dx_n} + \ldots\\
\frac{d^2y_n}{dt^2} &= Y_n + \lambda\frac{dL}{dy_n} + \mu\frac{dM}{dy_n} + \ldots\\
\frac{d^2z_n}{dt^2} &= Z_n + \lambda\frac{dL}{dz_n} + \mu\frac{dM}{dz_n} + \ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

wo man für n successive $1, 2, 3\ldots$ zu setzen hat, bis alle Punkte des Systems erschöpft sind.

Obwohl die Gleichungen (A) die vollständige Lösung unseres Problems enthalten, so ist es doch von Interesse eine andere Formel kennen zu lernen, welche durch eine einfache Transformation aus denselben hergeleitet werden kann, und einerseits das hochwichtige Problem von einer anderen Seite beleuchtet, andererseits in vielen Fällen eine leichtere Bearbeitung gestattet. Diese Formel ist das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, das wir hier in einer etwas veränderten Gestalt entwickeln wollen.

Nehmen wir unser System von Punkten mit den Bedingungsgleichungen $L = o$, $M = o$ .. Dieselben unterwerfen die Geschwindigkeitscomponenten

$$\frac{dx_1}{dt},\ \frac{dy_1}{dt},\ \frac{dz_1}{dt},\ \frac{dx_2}{dt}$$

den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dL}{dx_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{dL}{dy_1}\frac{dy_1}{dt}+\frac{dL}{dz_1}\frac{dz_1}{dt}+\frac{dL}{dx_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{dL}{dy_2}\frac{dy_2}{dt}+\\
&\qquad\qquad+\frac{dL}{dz_2}\frac{dz_2}{dt}+\qquad=0\\
&\frac{dM}{dx_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{dM}{dy_1}\frac{dy_1}{dt}+\frac{dM}{dz_1}\frac{dz_1}{dt}+\frac{dM}{dx_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{dM}{dy_2}\frac{dy_2}{dt}+\\
&\qquad\qquad+\frac{dM}{dz_2}\frac{dz_2}{dt}+.\qquad=0
\end{aligned}\right\}\quad\text{(B)}$$

Die Gleichungen (B) kann man in eine zusammenziehen, wenn man jede mit einem willkürlichen Factor multiplicirt, und erhält so:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\lambda\frac{dL}{dx_1}+\mu\frac{dM}{dx_1}+\ldots\right]\frac{dx_1}{dt}+\left[\lambda\frac{dL}{dy_1}+\mu\frac{dM}{dy_1}+\ldots\right]\frac{dy_1}{dt}+\\
&\qquad\qquad+\left[\lambda\frac{dL}{dz_1}+\mu\frac{dM}{dz_1}+\ldots\right]\frac{dz_1}{dt}+\\
&+\left[\lambda\frac{dL}{dx_2}+\mu\frac{dM}{dx_2}+\ldots\right]\frac{dx_2}{dt}+\left[\lambda\frac{dL}{dy_2}+\mu\frac{dM}{dy_2}+\ldots\right]\frac{dy_2}{dt}+\\
&\qquad\qquad+\left[\lambda\frac{dL}{dz_2}+\mu\frac{dM}{dz_2}+\ldots\right]\frac{dz_2}{dt}+\\
&+\qquad\qquad\qquad\qquad.
\end{aligned}\right\}=0\quad\text{(C)}$$

Aber die in den Klammern stehenden Ausdrücke sind die specialisirten Größen

$$\frac{d^2x_n}{dt^2}-Z_n;\quad\frac{d^2y_n}{dt^2}-Y_n;\quad\frac{d^2z_n}{dt^2}-Z_n$$

unserer Gleichungen (A), daher haben wir auch

$$\begin{aligned}
&\left(X_1-\frac{d^2x_1}{dt^2}\right)\frac{dx_1}{dt}+\left(Y_1-\frac{d^2y_1}{dt^2}\right)\frac{dy_1}{dt}+\left(Z_1-\frac{d^2z_1}{dt^2}\right)\frac{dz_1}{dt}+\\
&+\left(X_2-\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)\frac{dx_2}{dt^2}+\left(Y_2-\frac{d^2y_2}{dt^2}\right)\frac{dy_2}{dt^2}+\left(Z_2-\frac{d^2z_2}{dt^2}\right)\frac{dz_2}{dt}+\qquad\text{(D)}\\
&\qquad\qquad\qquad+\ldots.=0.
\end{aligned}$$

Für den Fall des Gleichgewichtes sind die Beschleunigungen Null; wir können sie aber auch im Falle der Bewegung mit in die Symbole X_1, Y_1. Z_1 einbezogen denken, und erhalten dann, wenn wir bedenken, daß

$$X_1=P_1 \cos(P_1 . X),\ Y_1=P_1 \cos(P_1 . Y),\ Z_1=P_1 \cos(P_1 . Z);$$

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{ds_1}{dt}\cos\left(\frac{ds_1}{dt}.X\right),\ \frac{dy_1}{dt}=\frac{ds_1}{dt}\cos\left(\frac{ds_1}{dt}.Y\right),$$

$$\frac{dz_1}{dt}=\frac{ds_1}{dt}\cos\left(\frac{ds_1}{dt}.Z\right)$$

und

$$\cos(P_1 . X).\cos\left(\frac{ds_1}{dt}.X\right)+\cos(P_1 . Y)\cos\left(\frac{ds_1}{dt}.Y\right)+$$

$$+\cos(P_1 . Z).\cos\left(\frac{ds_1}{dt}.Z\right)=\cos\left(P_1 . \frac{ds_1}{dt}\right)$$

ist, die Gleichung

$$P_1\frac{ds_1}{dt}\cos\left(P_1\frac{ds_1}{dt}\right)+P_2 . \frac{ds_2}{dt}\cos\left(P_2 . \frac{ds_2}{dt}\right)+\ldots=0 \qquad \text{(E)}$$

oder auch

$$\Sigma P . \frac{ds}{dt}\cos\left(P . \frac{ds}{dt}\right)=0 \qquad \text{(F)}$$

die gesuchte Formel.

II. Directe Ableitung des Princips der virtuellen Geschwindigkeit.

Wir haben im Eingange als zweite Form der Bedingung des Gleichgewichtes von Kräften, die auf einen freien Punkt wirken, den Ausdruck $\Sigma P\delta p=0$ hingestellt. Derselbe läßt sich mit Leichtigkeit auf ein System von Punkten übertragen, auf deren jeden gegebene Kräfte wirken, und zwischen denen Verbindungen existiren, vermöge welcher die Bewegungen eines jeden durch die der andern in bestimmter Weise bedingt werden.

Gleichgewicht wird in diesem Falle offenbar nur dann eintreten, wenn an jedem einzelnen Punkte für sich Gleichgewicht besteht, zwischen den an ihm unmittelbar angebrachten Kräften, und den Einwirkungen, welche er von allen andern Punkten erfährt.

Bezeichnen wir die letzteren, in soferne es sich um den Punkt m_1 handelt, mit Q'_2, Q'_3, $Q'_4 \ldots$, wo die Indices die Einwirkungen der Punkte m_2, m_3, $m_4 \ldots$ auf m_1 andeuten, und mit q'_2, q'_3, q'_4. die Distanzen $m_1 m_2$, $m_1 m_3$, $m_1 m_4 \ldots$, so haben wir für das Gleichgewicht des Punktes m_1 die Gleichung

$$\Sigma P_1 \delta p_1 + \Sigma Q'_n \delta q'_n = 0.$$

Und wenn wir den Algorithmus für die übrigen Punkte entsprechend modificiren

$$\Sigma P_2 \delta p_2 + \Sigma Q''_n \delta q''_n = 0 \text{ für } m_2$$
$$\Sigma P_3 \delta p_3 + \Sigma Q'''_n \delta q'''_n = 0 \text{ für } m_3 \text{ u. s. w.}$$

Nehmen wir jetzt die Summe aller dieser Gleichungen und bedenken, daß in dieser Summe jedes Glied von der Form $Q\delta q$ zweimal, und zwar, als Wirkung und Gegenwirkung zweier Punkte, mit entgegengesetzten Zeichen vorkommen muß, so sehen wir, daß sie sich sämmtlich tilgen, und die gesuchte allgemeine Formel $\Sigma P\delta p = o$ erhalten wird, wo sich das Summenzeichen auf alle Punkte des Systems erstreckt.

Wie man vom Princip der virtuellen Gleichung ausgehend, zum Poinsot'schen Theorem gelangt, findet sich bei La Grange: Mécanique analytique, trois. édit. p. 69.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1867

Band/Volume: 55_2

Autor(en)/Author(s): Loschmidt Josef

Artikel/Article: Theorie des Gleichgewichtes und der Bewegung eines Systems von Punkten. 523-538