Über Longitudinalschwingungen elastischer Stäbe.

Von J. Stefan.

Die Erscheinungen, welche beim Übergange schwingender Bewegungen aus einem Mittel in ein anderes auftreten, bilden eines der wichtigsten Objecte physikalischer Untersuchung. Das Gesetzmäßige in denselben kann zum Theil durch das bloße Experiment festgestellt, zum Theil muß es aber aus Hypothesen nach mathematischer Methode abgeleitet werden und dem Experimente bleibt nur die Aufgabe, die Resultate der Analyse und mit ihnen auch die Zulässigkeit der Hypothesen zu erproben. So verhält es sich mit der Reflexion und Brechung des Lichtes. Die Gesetze für den Gang des Lichtes konnten aus der Erfahrung abgeleitet, die complicirteren Formeln für die Intensität des reflectirten und gebrochenen Lichtes nur auf theoretischem Wege gefunden werden.

Die Hypothesen, deren sich Fresnel bedient, sind erstens, daß die Verschiebungen der Theilchen in der Trennungsfläche der beiden Medien nicht sprungweise sich ändern, sondern continuirlich in einander übergehen, und zweitens, daß die lebendige Kraft in einer einfallenden Welle gleich ist der Summe der lebendigen Kräfte in der aus ihr entstandenen reflectirten und gebrochenen Welle.

Dieser zweite Grundsatz läßt sich, wie schon Neumann bemerkt hat, ersetzen durch die Aufstellung, daß die Spannungen in der Trennungsfläche der beiden Medien ebenfalls in continuirlicher Weise in einander übergehen. Es können also die Erscheinungen der Reflexion und Brechung aus zwei Principen abgeleitet werden, aus dem Principe der Continuität der Verschiebungen und dem Principe der Continuität der Spannungen.

Diese beiden Principe wurden auch von Cauchy benützt, die Gleichheit der ersten Differentialquotienten der Verschiebungen in der Trennungsfläche, welche Cauchy annimmt, fällt nämlich mit dem zweiten der genannten Principe zusammen, wenn die Elasticität des Lichtäthers in allen Medien als gleich angenommen wird.

Es schien mir von Interesse, die Anwendbarkeit dieser für die Optik so fruchtbar gewordenen Principe an einigen einfachen der Akustik angehörigen Fällen, welche auch in der Schule leicht zu demonstriren sind, zu prüfen. Als solche Fälle erschienen mir die Schwingungen von Stäben und Saiten, welche aus verschiedenen Stücken bestehen. Dieser erste Aufsatz ist den Longitudinalabschwingungen der Stäbe gewidmet.

I. Über Stäbe, welche aus zwei Stücken von ungleichem Querschnitte bestehen.

Die Töne, welche durch Longitudinalschwingungen eines homogenen elastischen Stabes von durchaus gleichem Querschnitt entstehen, sind in Bezug auf ihre Höhe unabhängig von der Größe dieses Querschnittes. Dieses Resultat liefert nicht nur die Theorie, es ist auch durch das Experiment festgestellt worden. Untersuchungen über Stäbe von veränderlichem Querschnitt sind mir nicht bekannt. Zunächst bot sich der einfache Fall dar, in welchem ein Stab aus einem und demselben Material so geschnitten ist, daß er aus zwei Stücken von ungleichem Querschnitt besteht. Er ist experimentell am leichtesten zu behandeln.

Die Stäbe, mit denen ich experimentirte, waren aus Fichtenholz. Ich gab ihnen zuerst einen möglichst gleichförmigen rechteckigen Querschnitt. Um den Querschnitt ein bestimmtes Stück des Stabes entlang zu verkleinern, wurde das überschüssige Holz weggeschnitten und dabei getrachtet, daß der verkleinerte Querschnitt wieder möglichst gleichförmig ausfiel.

Die Töne wurden hervorgebracht durch Reiben mit einem wollenen Lappen, der mit Colophonium bestreut war. Dabei wurde der Stab mit den Fingern an der Stelle eines Knotenpunktes oder nahe daran gehalten. Die Stäbe waren immer an beiden Enden frei.

Jeder Ton wurde dadurch bestimmt, daß er in Einklang gebracht wurde mit dem eines entsprechenden Stückes einer am Monochord aufgespannten Saite.

Zwei Arten von Versuchen wurden gemacht. Zuerst wurde der Querschnitt des einen Stückes immer um dieselbe Größe verkleinert und die Länge dieses Stückes variirt. Bei der zweiten Art der Versuche blieb die Länge jedes Stückes constant, die Größe des Querschnittes wurde variirt.

Bei den Versuchen erster Art, auf welche sich die folgenden Zahlenangaben beziehen, wurde der Querschnitt des einen Stückes halb so groß gemacht, als der des anderen. Ich theile die mit vier Stäben erhaltenen Resultate mit. Die Länge, Breite, Höhe waren beim ganzen

Stabe Nr.	I.	1321^{mm}	8^{mm}	6^{mm}
	II.	1256	11	7
	III.	1251	5	15
	IV.	1268	4	8

Mit der Halbirung des Querschnittes wurde bei den ersten drei Stäben von $\frac{1}{16}$ zu $\frac{1}{16}$ bei dem letzten von $\frac{1}{8}$ zu $\frac{1}{8}$ der ganzen Länge vorgeschritten. Die Zahlen in der ersten Colonne der folgenden Tabelle geben an, auf wie viele Sechzehntel die Halbirung sich erstreckt. In den Colonnen I, II, III, IV stehen die Längen der Monochordsaite in Millimetern, bei welchen sie in Einklang war mit den jedesmaligen Tönen der Stäbe I, II, III, IV.

	I.	II.	III.	IV.
0	90	83	78·0	70·0
1	86	80·5	75·5	
2	84	78·3	72·7	65·9
3	82·5	76·4	71·1	
4	81	75·3	70·6	62·8
5	82	75·6	71·0	
6	85	77.7	73·5	65·1
7	87	80·5	75·1	
8	91	83·5	78·0	70·0
9	95	86·6	82·0	
10	97	89·3	85·0	75·4
11	99	91·0	87·8	
12	100	92·5	88·8	79·6
13	100	92·5	88·0	
14	98	91·0	86·0	76·3
15	96	87·3	82·0	
16	90	83	78·0	70·0

Bei dem Stabe II wurde auch der zweite Ton bestimmt, und zwar bei $\frac{4}{16}$ zu 42, bei $\frac{12}{16}$ zu 41·5. Bei $\frac{8}{16}$ drängte sich ein rauher Ton auf entsprechend einer Saitenlänge von 167·4.

Die zur Bestimmung der Tonhöhe dienenden Saitenlängen sind, wie die Tafel zeigt, gering, deßhalb auch die Genauigkeit nicht sehr groß. Auch ist die Vergleichung der Töne des Stabes mit denen der Saite eine schwierige namentlich in den Fällen, in welchen die Obertöne nicht harmonisch zum Grundton sind, ein Umstand, welcher sich bei der später vorgenommenen Untersuchung über die Schwingungen von Saiten, welche aus ungleichen Stücken bestehen, in sehr auffälliger Weise der Beachtung darbot. Es zeigte sich nämlich bei dieser Untersuchung, daß die Höhe eines Tones, dessen Obertöne tiefer als die harmonischen, tiefer geschätzt wird, als er wirklich ist und höher, wenn die Obertöne höher sind als die harmonischen. Aber noch andere Ursachen stören die Gesetzmäßigkeit der Resultate, so der Mangel an vollständiger Gleichförmigkeit der Querschnitte, ferner die ungleichförmige Structur des Holzes, welche bedingt, daß gleichgroße Stücke des Stabes nicht auch akustisch gleichwerthig sind. Trotzdem tritt aus der Tabelle doch deutlich genug folgendes Resultat heraus:

Wenn man mit der Verkleinerung des Querschnittes eines Stabes an einem Ende beginnt und damit successive fortfährt, so steigt der Grundton in die Höhe, erreicht sein Maximum, nachdem man mit der Verkleinerung über $\frac{1}{4}$ der Stablänge hinausgekommen, sinkt dann wieder und erreicht seine ursprüngliche Höhe, wenn man mit der Verkleinerung in der Mitte des Stabes angelangt ist. Setzt man dieselbe fort, so sinkt der Ton, erreicht das Minimum, wenn man $\frac{3}{4}$ der Stablänge überschritten, steigt dann wieder und gelangt zur ursprünglichen Höhe, wenn man mit der Verkleinerung am Ende des Stabes angekommen, dieser also wieder ein Stab von gleichförmigen Querschnitt geworden ist.

Es handelt sich jetzt noch darum, wie die Erhöhung und Vertiefung des Tones von der Größe der vorgenommenen Verkleinerung des Querschnittes abhängig ist. Folgende zwei Versuche geben darüber Aufschluß.

An einem Stabe von 948$^{\text{mm}}$ Länge, 3$^{\text{mm}}$ Breite und 9$^{\text{mm}}$ Höhe wurde auf $\frac{1}{4}$ seiner Länge der Querschnitt um verschiedene Größen verkleinert. In der folgenden Tafel gibt die erste Reihe die Höhen des verkleinerten Querschnittes, die zweite Reihe die Saitenlängen, welche den Tönen des Stabes entsprechen.

9	58
6	54·5
4	52
2	48·5

An einem zweiten Stabe von 1224mm Länge, 6mm Breite und 15mm Höhe wurde auf $\frac{3}{4}$ seiner Länge der Querschnitt um verschiedene Größen verkleinert. Es gibt in der folgenden Tafel wieder die erste Reihe die Höhen des verkleinerten Querschnittes und die zweite Reihe die den Tönen des Stabes entsprechenden Saitenlängen.

15	70
13	71·5
9·3	75
4·7	84·5

Es zeigt sich also, daß die durch Verkleinerung des Querschnittes längs eines bestimmten Stückes des Stabes hervorgerufene Erhöhung oder Vertiefung des Tones um so bedeutender ist, je mehr die Querschnitte der beiden Stücke von einander verschieden sind.

Noch ist zu bemerken, daß ein Stab immer denselben Ton gibt, ob er durch Reiben an dem Stücke, welches den größeren Querschnitt besitzt, oder durch Reiben an dem anderen Stücke zum Tönen gebracht wird.

Aus den mitgetheilten wenigen und rohen Beobachtungen das allgemeine Gesetz abzuleiten, welches dieselben numerisch darstellen würde, erscheint unmöglich. Es ist deßhalb nothwendig, dasselbe auf theoretischem Wege zu suchen und mit der Erfahrung zu vergleichen, was im Folgenden geschehen soll.

Es sei ein homogener elastischer Stab von durchaus gleichem Querschnitte q. Seine Dichte heiße ρ, der Elasticitätscoëfficient E. In diesem Stabe sollen nun longitudinale Verschiebungen eingeleitet werden der Art, daß alle Punkte, welche ursprünglich einem ebenen auf der Längenaxe senkrechter Querschnitte angehörten, auch nach der Verschiebung noch in einem solchen sich befinden. Für alle Punkte eines und desselben Querschnittes bleibt also die Verschiebung dieselbe, sie ändert sich nur von Querschnitt zu Querschnitt. Heißt die Entfernung eines solchen Schnittes im Ruhezustande von einem Anfangspunkt in der Längenaxe x, und die darin herrschende Verschiebung u, so ist u als Funktion von x zu betrachten, außerdem aber auch noch abhängig von der Zeit t.

Aus dem Stabe werde ein Element von der sehr kleinen Länge α in Betracht gezogen. Seine vordere Begrenzung bilde der zur Abscisse x gehörige Querschnitt. Die relative Verschiebung der Theile gegen einander ist daselbst bestimmt durch $\frac{du}{dx}$, diese mit dem Elasticitätscoëfficienten multiplicirt, gibt die auf die Flächeneinheit entfallende Spannung. Die ganze Spannung ist daher

$$qE\frac{du}{dx}.$$

Diese zieht das Element nach rückwärts. Die an der anderen Grenzfläche wirkende zieht dasselbe nach vorwärts. Die Differenz beider liefert die bewegende Kraft. Da die Spannung ebenfalls Funktion von x ist und α so klein genommen werden kann, als man will, so kann man die Spannung für die zweite Grenzfläche aus der für die erste ableiten nach der Taylor'schen Formel, und in der Entwickelung beim ersten Gliede stehen bleiben. Man erhält so

$$qE\frac{du}{dx} + \frac{d}{dx}\left(qE\frac{du}{dx}\right)\alpha.$$

Die Differenz beider ist, weil E und q constant sind

$$Eq\frac{d^2u}{dx^2}\alpha.$$

Diese Kraft ertheilt der Masse $\rho q\alpha$ die Beschleunigung $\frac{d^2u}{dt^2}$, es bleibt also die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{E}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{1}$$

Zu dieser Gleichung kommen noch die Bedingungen für die Enden des Stabes. Ist ein Ende fest, so ist daselbst die Verschiebung u

fortwährend $=0$, ist es frei, so muß daselbst die Spannung, also $\frac{du}{dx}$ fortwährend $=0$ sein.

In unserem Falle besteht der Stab aus zwei Stücken, für welche E und ρ gleich, nur die Querschnitte verschieden sind. Da q in (1) nicht vorkommt, so gilt diese Gleichung auch für das zweite Stück. Zur Unterscheidung soll aber die Verschiebung im zweiten Stücke mit u' bezeichnet werden, es gilt also für dieses die Gleichung

$$\frac{d^2u'}{dt^2} = \frac{E}{\rho}\frac{d^2u'}{dx^2}. \tag{2}$$

Eine im ersten Stücke eingeleitete Verschiebung bedingt auch eine solche im zweiten Stücke und umgekehrt. Diese Abhängigkeit der u und u' von einander kann charakterisirt werden durch Bedingungen, welchen u und u' dort, wo die beiden Stücke des Stabes zusammenstoßen, genügen müssen. Solcher Bedingungen sind zwei nothwendig. Die Principe der Continuität der Verschiebungen und der Continuität der Spannungen sollen sie liefern. Es sollen also beim Übertritte aus dem einen Stücke des Stabes in das andere erstens die Verschiebungen, zweitens die Spannungen nicht von einem Werthe zu einem um eine endliche Größe verschiedenen sich erheben.

Entspricht dem Endpunkte des ersten und zugleich Anfangspunkte des zweiten Stückes die Abscisse x_1, so ist zu Folge der ersten Bedingung

$$u = u' \quad \text{für} \quad x = x_1 \tag{3}$$

und wenn q den Querschnitt des ersten, q' den Querschnitt des zweiten Stückes bedeutet, zu Folge der zweiten Bedingung

$$q\frac{du}{dx} = q'\frac{du'}{dx} \text{ für } x = x_1. \tag{4}$$

Den Gleichungen (1) und (2) genügen die zwei folgenden particulären Integrale

$$\begin{aligned} u &= \cos\alpha t\,(A\cos\beta x + B\sin\beta x) \\ u' &= \cos\alpha t\,(A'\cos\beta x + B'\sin\beta x) \end{aligned} \tag{5}$$

Darin ist der Kürze wegen

$$\alpha\sqrt{\frac{\rho}{E}}=\beta$$

gesetzt. α, A, B, A', B' sind constante Größen, die so zu bestimmen sind, daß die particulären Integrale den Bedingungen des Problems genügen.

Der Stab sei an beiden Enden frei. Der Anfangspunkt der Abscissen sei am Anfange des ersten Stückes, das Ende des zweiten Stückes habe die Abscisse l. Dann hat man folgende Bedingungen

$$\text{für } x=0 \quad \frac{du}{dx}=0 \tag{6}$$

$$x=x_1 \text{ die Gleichungen (3) und (4)}$$

$$x=l \quad \frac{du'}{dx}=0. \tag{7}$$

Diese Gleichungen müssen für jeden Werth von t erfüllt sein. Sie verwandeln sich nach Substitution der Integrale (5) in

$$\begin{gathered}B=0\\ A\cos\beta x_1+B\sin\beta x_1=A'\cos\beta x_1+B'\sin\beta x_1\\ q\,(A\sin\beta x_1-B\cos\beta x_1)=q'\,(A'\sin\beta x_1-B'\cos\beta x_1)\\ A'\sin\beta l-B'\cos\beta l=0.\end{gathered}$$

Die zweite und dritte dieser Gleichungen geben

$$\begin{aligned}q'A' &= q'A\cos^2\beta x_1+qA\sin^2\beta x_1\\ q'B' &= q'A\sin\beta x_1\cos\beta x_1-qA\sin\beta x_1\cos\beta x_1\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}2q'A' &= (q'+q)\,A+(q'-q)\,A\cos 2\beta x_1\\ 2q'B' &= (q'-q)\,A\sin 2\beta x_1.\end{aligned}$$

Diese zwei Werthe von A' und B' in die vierte der obigen Gleichungen eingeführt geben nach einer einfachen Reduction

$$(q'+q)\sin\beta l+(q'-q)\sin\beta\,(l-2x_1)=0, \tag{8}$$

welche Gleichung zur Bestimmung von β und somit auch von α dient. Sie hat unendlich viele Wurzeln. Jede derselben kann in (5) eingesetzt werden und liefert ein Paar particulärer Integrale, welches mit einer willkürlichen Constanten A noch versehen ist. Es kann aber in (5) $\cos \alpha t$ auch durch $\sin \alpha t$ versetzt werden und es bilden die Summen von allen solchen particulären Integralen die allgemeinen Integrale der Gleichungen (1) und (2), welche allen aufgestellten Bedingungen des Problems genügen.

Die particulären Integrale (5) stellen die Schwingungen dar, welche einen einzelnen bestimmten Ton erzeugen. Die Höhe dieses Tones ist bestimmt durch den Werth von α oder β, der aus der Gleichung (8) gezogen wird. Die Dauer einer Schwingung ist

$$\tau = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\beta} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Je kleiner die aus der Gleichung (8) gezogene Wurzel β, desto tiefer ist demnach der entsprechende Ton.

Hat der Stab durchaus gleichen Querschnitt, so ist $q'-q=0$ und statt der Gleichung (8) bleibt

$$\sin \beta l = 0,$$

deren Wurzeln

$$\beta l = \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$$

den Grundton und die harmonischen Obertöne des Stabes liefern.

Ist q' von q verschieden und zwar q' größer als q, so sind, so lange x_1 kleiner als $\frac{l}{2}$ in (8) die Winkel βl und $\beta\,(l-2x_1)$ positive Winkel. Die Gleichung kann nur befriedigt werden, wenn der größere über 180° hinaus geht. Man hat also in diesem Falle βl größer als π. Der Grundton des Stabes ist also höher, als er früher bei gleichförmigem Querschnitt war. Wird $x_1 = \frac{l}{2}$, so wird $\beta\,(l-2x_1) = 0$ und es bleibt die Gleichung $\mathrm{Sin}\, \beta l = 0$, wie bei dem Stabe mit gleichförmigem Querschnitt. Da βl für $x_1 = 0$ mit π beginnt, dann steigt, bei $x_1 = \frac{l}{2}$ wieder $= \pi$ wird, so liegt inzwischen ein größter Werth desselben.

Wird endlich x_1 größer als $\frac{l}{2}$, so wird $\beta\,(l-2x_1)$ negativ und es müssen dann, damit (8) befriedigt wird, die Winkel βl und $\beta(2x_1-l)$ kleiner sein als 180° Der Grundton des Stabes wird also tiefer. Er erhält wieder die ursprüngliche Höhe, wenn $x_1 = l$ ist.

Ich habe für den speciellen Fall, daß $q' = 2q$, für welchen die Gleichung (8) übergeht in

$$3 \sin \beta l + \sin \beta (l - 2x_1) = 0,$$

die Werthe von βl berechnet für

$$x_1 = \frac{l}{16},\ 2\frac{l}{16},\ 3\frac{l}{16} \text{ u. s. w.}$$

Sie sind in der zweiten Colonne der folgenden Tafel enthalten. Die erste enthält die Anzahl der $\frac{l}{16}$, welcher x_1 gleich ist. Die dritte Colonne enthält die Zahlen, mit denen die dem Grundtone des Stabes von gleichförmigem Querschnitt entsprechende Seitenlänge multiplicirt werden muß, damit man die dem neuen Tone entsprechende Seitenlänge erhält. Die folgenden Colonnen enthalten die Producte dieser Zahlen in 90, 83, 78 und 70 enthalten also die Berechnung der oben mitgetheilten Versuche. Die Vergleichung dieser Producte mit den Daten des Versuches zeigt, daß die Theorie in hinreichender Übereinstimmung mit der Erfahrung steht.

0	180°00	1·0000	90·0	83·0	78·0	70·0
1	185·75	0·9690	87·2	80·4	75 6	
2	191·41	0·9404	84·6	78·1	73·3	65·8
3	196·29	0·9170	82·5	76.1	71	
4	199·19	0·9037	81·3	75·0	70·5	63·3
5	198·76	0·9054	81·5	75·1	70·6	
6	194·48	0·9255	83·3	76·8	72·2	64·8
7	187·62	0·9595	86·4	79·6	74·8	
8	180·00	1 0000	90·0	83·0	78·0	70·0
9	172·95	1·0408	93·7	86·4	81·2	
10	167·16	1·0768	96·9	89·4	84·0	75·4
11	163·03	1·1041	99·4	91·6	86·1	
12	160·81	1 1193	100·7	92·9	87·3	78·3
13	160·87	1·1189	100·7	92·9	87·3	
14	163·73	1·0994	98·9	91·3	85·7	76·9
15	170·06	1·0584	95·3	87·8	82·5	
16	180·00	1·0000	90·0	83·0	78·0	70·0

Die Gleichung (8) läßt sich leicht auflösen für die beiden Fälle, in welchen x_1 entweder $\frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$ der ganzen Stablänge beträgt. Sie verwandelt sich dann in

$$(q'+q)\sin\beta l \pm (q'-q)\sin\frac{\beta l}{2} = 0.$$

Löst man $\sin\beta l$ in $2\sin\frac{\beta l}{2}\cos\frac{\beta l}{2}$ auf, so liefern die Wurzeln von

$$\sin\frac{\beta l}{2} = 0$$

die geraden Obertöne. Den Grundton liefert die kleinste Wurzel der nach Division durch $\sin\frac{\beta l}{2}$ übrig bleibenden Gleichung

$$2(q'+q)\cos\frac{\beta l}{2} \pm (q'-q) = 0.$$

Diese Gleichung kann nun verwendet werden zur Berechnung der oben mitgetheilten Versuche, in denen $x_1 = \frac{l}{4}$ und dann $x_1 = \frac{3l}{4}$ war. Die folgenden zwei Tabellen enthalten die Daten der Rechnung und die Resultate derselben

q	q'	$\cos\frac{\beta l}{2}$	βl	$\frac{180}{\beta l}$
6	9	0·1	191°48	0·94
4	9	0·19231	202 18	0·89
2	9	0·31818	217 11	0·83

13	15	0·03571	175 90	1·023
9·3	15	0·11728	166 52	1·081
4·7	15	0·26396	149 38	1·205

Multiplicirt man die in der letzten Colonne stehenden Zahlen mit 58 und 70, den Saitenlängen, welche den ursprünglichen Tönen entsprechen, so erhält man die Werthe

54·5	51·6	48·2
71·6	75·6	84·3

welche mit den beobachteten in guter Übereinstimmung stehen.

Um die Strecken zu finden, über welche die Verkleinerung des Querschnittes ausgedehnt werden muß, damit die Tonänderung ein Maximum wird, hat man in der Gleichung (8) βl als die dependente, x_1 als die independente Variable zu betrachten. Differenzirt man die Gleichung nach x_1, so folgt

$$(q'+q)\cos\beta l\,\frac{d(\beta l)}{dx_1}+(q'-q)\cos\beta(l-2x_1)\left[\left(1-\frac{2x_1}{l}\right)\frac{d(\beta l)}{dx_1}-2\beta\right]=0.$$

Setzt man

$$\frac{d(\beta l)}{dx_1}=0,$$

so bleibt noch

$$\cos\beta(l-2x_1)=0.$$

für die erste Wurzel hat man

$$\beta(l-2x_1)=\pm\frac{\pi}{2} \qquad (a)$$

und die Gleichung (8) gibt nunmehr

$$\sin\beta l=\mp\frac{q'-q}{q'+q} \qquad (b)$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung zuerst βl, so gibt die Gleichung (a) dann x_1. Das den oberen Zeichen entsprechende gehört zum Maximum, das den unteren Zeichen entsprechende zum Minimum der Tonhöhe.

Z. B. Ist $q'=2q$, so folgt aus

$$\sin\beta l=\mp\frac{1}{3}$$

das Maximum $\beta l=199^\circ 47$

„ Minimum $\beta l=160^\circ 53$

und es gehört zu dem ersteren $x_1=0\cdot 274\,l$

letzteren $x_1=0\cdot 780\,l$.

Wie auch die beiden Querschnitte q und q' beschaffen sein mögen, die Größen der dem Maximum und Minimum der Tonhöhe entsprechenden x_1 sind zwischen bestimmten Grenzen eingeschlossen, welche gefunden werden, wenn man folgende zwei extreme Fälle untersucht.

1. Es sei q sehr wenig von q' verschieden, so wird βl in (b) nur um eine sehr kleine Zahl von π differiren. Setzt man geradezu π für βl in (a) ein, so erhält man

$$x_1 = \frac{l}{4} \text{ für das Maximum,}$$

$$x_1 = \frac{3l}{4} \qquad \text{Minimum.}$$

2. Es sei q sehr klein gegen q', so folgt aus (b) βl nahezu $\frac{3\pi}{2}$ oder $\frac{\pi}{2}$. Setzt man diese Werthe in a ein, so erhält man

$$x_1 = \frac{l}{3} \text{ für das Maximum,}$$

$$x_1 = l \qquad \text{Minimum.}$$

Soll also das Maximum der Tonhöhe erreicht werden, so muß die Verkleinerung des Querschnittes bis über $\frac{1}{4}$ der Stablänge ausgedehnt werden und zwar um so weiter, je bedeutender die Verkleinerung ist, nie aber wird diese über $\frac{1}{3}$ der Stablänge hinausreichen.

Soll das Minimum der Tonhöhe erreicht werden, so muß die Verkleinerung bis über $\frac{3}{4}$ der Stablänge erstreckt werden und zwar um so mehr, je bedeutender die vorgenommene Verkleinerung ist.

Es bleibt noch übrig, die Lage des Knotenpunktes zu bestimmen. Ich will mich darauf beschränken, das leicht zu erschließende Resultat herzustellen. Der Knotenpunkt liegt immer in dem längeren Stücke des Stabes von seinem freien Ende entfernt um eine Größe, welche gleich ist der halben Länge, welche der Stab von gleichförmigem Querschnitt haben müßte, um den jeweiligen Ton des zusammengesetzten Stabes zu geben.

An diese dem Grundtone des Stabes gewidmeten Betrachtungen sollten nun auch solche über die Obertöne geknüpft werden. Da jedoch diese bei den angestellten Versuchen nur in wenigen Fällen bestimmt wurden, auch nur in wenigen Fällen mit Leichtigkeit den Stäben entlockt werden konnten, so begnüge ich mich hier mit einer einzigen Bemerkung.

Die Obertöne sind bei einem Stabe, der aus zwei Stücken von ungleichem Querschnitt besteht, zum Grundton nicht harmonisch. In speciellen Fällen können bestimmte Reihen harmonisch unter einander werden, jene nämlich, für welche an der Trennungsstelle der beiden Stabstücke ein Knotenpunkt sich befindet. z. B. der zweite, vierte Ton, überhaupt alle geraden Töne werden harmonisch und von derselben Höhe, welche sie in dem Stabe von durchaus gleichem Querschnitt hätten, wenn $x_1 = \frac{l}{4}$ oder $x_1 = \frac{3l}{4}$ wird. Es hat dann die Gleichung (8) den Factor $\sin \frac{\beta l}{2}$, welcher die Wurzeln

$$\beta l = 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi.$$

liefert. Diese repräsentiren die aufeinander folgenden Octaven des Grundtons, welchen der Stab bei gleichförmigem Querschnitt gibt. Die Erfahrung bestätigte diese theoretische Folgerung, so weit als sie zu Rathe gezogen werden konnte.

Es bleibt der analytischen Vollständigkeit wegen noch übrig zu zeigen, wie aus den particulären Integralen das allgemeine dargestellt werden kann der Art, daß es auch den gegebenen Anfangszuständen des Stabes entspricht.

Wenn man in der zweiten der Gleichungen (5) noch die aus den Grenzbedingungen abgeleiteten Werthe von A' und B' substituirt, so erhält man

$$u = A \cos \alpha t \cos \beta x$$
$$u' = A \cos \alpha t . \frac{1}{2q'} [(q'+q) \cos \beta x + (q'-q) \cos \beta (x - 2x_1)].$$

Es sollen die Factoren von $A \cos \alpha t$ in diesen zwei Gleichungen der Kürze wegen mit U und U' bezeichnet werden. Man kann aber $A \cos \alpha t$ auch durch $C \sin \alpha t$ ersetzen, unter C ebenfalls eine Constante verstanden. Dann sind auch

$$u = (A \cos \alpha t + C \sin \alpha t)\, U$$
$$u' = (A \cos \alpha t + C \sin \alpha t)\, U'$$

particuläre Integrale. Bezeichnet man die verschiedenen Wurzeln der Gleichung (8) mit β_1, β_2, $\beta_3 \ldots$ und versieht mit den gleichen

Indices auch die zugehörigen Größen A, C, α, U, U', so sind die allgemeinen Integrale darstellbar durch

$$u = \Sigma\,(A_n \cos\alpha_n t + C_n \sin\alpha_n t)\; U_n$$
$$u' = \Sigma\,(A_n \cos\alpha_n t + C_n \sin\alpha_n t)\; U'_n,$$

worin die Summation sich über die allen Wurzeln der Gleichung (8) entsprechenden Ausdrücke erstreckt.

Der Anfangszustand des Stabes sei nun gegeben in folgender Weise: Es ist für $t = 0$

$$\left.\begin{aligned} u &= f(x) \\ \frac{du}{dt} &= F(x) \end{aligned}\right\} \text{von } x = 0 \text{ bis } x = x_1,$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \varphi(x) \\ \frac{du'}{dt} &= \Phi(x) \end{aligned}\right\} \text{von } x = x_1 \text{ bis } x = l.$$

Man hat demnach

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1 U_1 + A_2 U_2 + \qquad && \text{von } x = 0 \quad \text{bis } x = x_1, \\ \varphi(x) &= A_1 U'_1 + A_2 U'_2 + && \phantom{\text{von }} x = x_1 \qquad x = l. \end{aligned}$$

Aus diesen zwei Gleichungen müssen die Coëfficienten A bestimmt werden. Zwei ähnliche Gleichungen sind dann für die Coëfficienten C gegeben. Da die Bestimmungsweise für beide dieselbe ist, so genügt es, sie an den zwei aufgeschriebenen Gleichungen zu zeigen.

Zur Bestimmung eines beliebigen der Coëfficienten A dient nun folgende Regel:

Will man den Coëfficienten A_n, so multiplicire man die erste Gleichung mit $qU_n dx$, die zweite mit $q' U'_n dx$, integrire alle Glieder der ersten von 0 bis x_1, alle Glieder der zweiten von x_1 bis l. Addirt man dann die beiden resultirenden Gleichungen, so bleibt

$$q\int_0^{x_1} f(x) U dx + q'\int_{x_1}^{l} \varphi(x)\, U' dx = A_n \left[q\int_0^{x_1} U_n U_n dx + q'\int_{x_1}^{l} U'_n U'_n dx \right]$$

als Bestimmungsgleichung für A_n übrig. Die Coëfficienten aller übrigen Coëfficienten A sind nämlich von der Form

$$q\int_0^{x_1} U_m U_n\, dx + q'\int_{x_1}^{l} U'_m U'_n\, dx.$$

Jeder solche Ausdruck ist aber identisch $= 0$, sobald m und n zwei verschiedene Zahlen sind und nur von Null verschieden, wenn m und n gleich sind.

Der Beweis dieses Satzes kann nach der in ähnlichen Fällen öfters zur Anwendung kommenden Methode geführt werden. Jedes der U genügt nämlich der Differentialgleichung

$$\frac{d^2U}{dx^2} = -\beta^2 U,$$

worin U und β gleichzeitig mit demselben Index zu versehen sind. Man kann daher schreiben

$$\beta_m^2 \int_0^{x_1} U_m U_n dx = -\int_0^{x_1} U_n \frac{d^2U_m}{dx^2} dx.$$

Wendet man auf die zweite Seite dieser Gleichung zweimal die Methode der theilweisen Integration an, so erhält man

$$\beta_m^2 \int_0^{x_1} U_m U_n dx = \left[-U_n \frac{dU_m}{dx} + U_m \frac{dU_n}{dx}\right]_0^{x_1} - \int_0^{x_1} U_m \frac{d^2U_n}{dx^2} dx,$$

oder wenn man $\frac{d^2U_n}{dx^2}$ durch $\beta_n^2 U$ ersetzt, ferner berücksichtigt, daß für $x = 0$ sowohl U_m als $U_n = 0$ ist wegen der Bedingung (6), so bleibt

$$(\beta_m^2 - \beta_n^2) \int_0^{x_1} U_m U_n dx = \left[-U_n \frac{dU_m}{dx} + U_m \frac{dU_n}{dx}\right]_{x=x_1}.$$

Auf dieselbe Weise findet man auch

$$(\beta_m^2 - \beta_n^2) \int_{x_1}^{l} U'_m U'_n dx = \left[U'_n \frac{dU'_m}{dx} - U'_m \frac{dU'_n}{dx}\right]_{x=x_1}.$$

Multiplicirt man die erstere dieser Gleichungen mit q, die zweite mit q' und bemerkt, daß für $x = x_1$

$$U_m = U'_m, \quad U_n = U'_n, \quad q \frac{dU_m}{dx} = q' \frac{dU'_m}{dx}, \quad q \frac{dU_n}{dx} = q' \frac{dU'}{dx}$$

wegen der Bedingungen (3) und (4), so bleibt

$$(\beta_m^2 - \beta_n^2)\left[q \int_0^{x_1} U_m U_n dx + q' \int_{x_1}^{l} U'_m U'_n dx\right] = 0,$$

welche Gleichung den zu beweisenden Satz enthält.

Aus den mitgetheilten Versuchen und Rechnungen folgt, daß die Schwingungen, welche in einem Stücke eines zusammengesetzten Stabes entstehen, nicht ungestört in das zweite sich fortpflanzen können. Obwohl die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in beiden Stäben dieselbe ist, so erleiden sie doch beim Übergange aus dem einen Stücke in das andere eine Reflexion. Um das Verhältniß zu finden, nach welchem aus der einfallenden Welle die reflectirte und die durchgelassene sich bilden, kann man die Wellenbewegung darstellen durch folgende particuläre Integrale

$$u = a \sin\alpha\,(x - ct) + a_1 \sin\alpha\,(x + ct)$$
$$u' = a' \sin\alpha\,(x - ct).$$

Die beiden Glieder in u bedeuten zwei Wellenzüge. Der erste, dem die Amplitude a zukommt, schreitet in der Richtung der positiven x fort, er sei der einfallende. Der zweite mit der Amplitude a_1 schreitet in entgegengesetzter Richtung in demselben Medium fort, er ist der reflectirte. u' bedeutet den in das zweite Stück eingetretenen Zug. Die Größe c ist die gemeinschaftliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen.

Damit obige Integrale den Bedingungsgleichungen an der Trennungsfläche, in welche wir den Anfangspunkt von x setzen, nämlich den Gleichungen

$$u = u',\quad q\frac{du}{dx} = q'\frac{du'}{dx} \text{ für } x = 0$$

genügen, müssen zwischen a, a_1 und a' die Relationen

$$a - a_1 = a'$$
$$q(a + a_1) = q'a',$$

woraus die Intensitätsformeln

$$\frac{a_1}{a} = \frac{q' - q}{q' + q},\quad \frac{a'}{a} = \frac{2q}{q' + q}$$

folgen. Sie haben dieselbe Form, welche die Fresnel'schen Reflexionsformeln für den Fall senkrecht einfallender Lichtstrahlen annehmen, nur tritt an die Stelle des Brechungsquotienten das Verhältniß der beiden Querschnitte so, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des Lichtes in den beiden Medien durch die reciproken Werthe der Querschnitte der beiden Stabstücke vertreten erscheinen.

II. Über Stäbe, welche aus drei Stücken bestehen.

Nachdem die beiden Principe, das der Continuität der Verschiebungen und das der Continuität der Spannungen, sich in dem eben betrachteten Falle zur Erklärung der Erscheinungen als geeignet erwiesen, kann man annehmen, daß sie sich auch in dem allgemeineren Falle, in welchem die den Stab zusammensetzenden Stücke von verschiedener materieller Beschaffenheit sind, bewähren werden. Ich will nun auf Grundlage derselben den Fall berechnen, daß ein Stab aus drei heterogenen Stücken zusammengesetzt ist. Dieser Fall schließt auch den, daß der Stab aus zwei Stücken besteht, und noch andere als specielle Fälle in sich.

Elasticitätscoëfficient und Dichte sollen für das erste Stück mit E und ρ, für das zweite mit E' und ρ', für das dritte mit E'' und ρ'' bezeichnet werden. Die Verschiebungen in den drei Stäben seien u, u', u''. Diese genügen also den Differentialgleichungen

$$(9)\qquad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{E}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2},\quad \frac{d^2u'}{dt^2} = \frac{E'}{\rho'}\frac{d^2u'}{dx^2},\quad \frac{d^2u''}{dt^2} = \frac{E''}{\rho''}\frac{d^2u''}{dx^2}.$$

Soll der ganze Stab nur einerlei Schwingungen machen, so müssen für die Verschiebungen particuläre Integrale gesetzt werden, in welchen die periodischen Functionen der Zeit t dieses t mit einem und demselben Factor multiplicirt enthalten, also etwa die Integrale

$$(10)\qquad u = U\cos\alpha t,\quad u' = U'\cos\alpha t,\quad u'' = U''\cos\alpha t.$$

Die Größen U, U', U'' müssen dann den Gleichungen

$$(11)\qquad \frac{d^2U}{dx^2} = -\frac{\rho\alpha^2}{E}U,\quad \frac{d^2U'}{dx^2} = -\frac{\rho'\alpha^2}{E'}U',\quad \frac{d^2U''}{dx^2} = -\frac{\rho''\alpha^2}{E''}U''$$

genügen, oder wenn man der Kürze wegen

$$(12)\qquad \frac{\rho\alpha^2}{E} = \beta^2,\quad \frac{\rho'\alpha^2}{E'} = \beta'^2,\quad \frac{\rho''\alpha^2}{E''} = \beta''^2$$

setzt, den Gleichungen

$$(13)\qquad \frac{d^2U}{dx^2} = -\beta^2U,\quad \frac{d^2U'}{dx^2} = -\beta'^2U',\quad \frac{d^2U''}{dx^2} = -\beta''^2U''.$$

Man kann also schreiben

$$\begin{aligned} U &= A \cos\beta x + B \sin\beta x \\ U' &= A' \cos\beta' x + B' \sin\beta' x \\ U'' &= A'' \cos\beta'' x + B'' \sin\beta'' x. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Größen U, U', U'' müssen aber an den Grenzen der Stücke, zu welchen sie gehören, bestimmten Bedingungen genügen. Es soll nun das erste Stück reichen von $x = 0$ bis $x = x_1$; das zweite von $x = x_1$ bis $x = x_2$; das dritte von $x = x_2$ bis $x = l$.

Ist der Stab an beiden Enden frei, so hat man zunächst

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= 0 \text{ für } x = 0, \\ \frac{dU''}{dx} &= 0 \qquad x = l. \end{aligned} \tag{15}$$

Die erste Bedingung fordert das Verschwinden von B. Die zweite wird erfüllt, wenn man für U'' die Form

$$U'' = A'' \cos\beta''(l - x_2)$$

wählt.

Haben die drei Stücke die Querschnitte q, q', q'', so hat man ferners noch die Bedingungen

$$\begin{aligned} U = U', \quad qE\frac{dU}{dx} &= q'E'\frac{dU'}{dx} \text{ für } x = x_1 \\ U' = U'', \quad q'E'\frac{dU'}{dx} &= q''E''\frac{dU''}{dx} \quad \text{„} \quad x = x_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Diese Bedingungen gestatten die Bestimmung der Constanten A', B', A'' durch A und liefern außerdem noch eine Gleichung für α. Die langen Formeln der Zwischenrechnung übergehend, setze ich nur diese Gleichung hieher. Sie ist

$$\left.\begin{aligned} & qE\beta q'E'\beta' \sin\beta x_1 \cos\beta'(x_2 - x_1) \cos\beta''(l - x_2) \\ + \; & q'E'\beta' q'E'\beta' \cos\beta x_1 \sin\beta'(x_2 - x_1) \cos\beta''(l - x_2) \\ - \; & qE\beta q''E''\beta'' \sin\beta x_1 \sin\beta'(x_2 - x_1) \sin\beta''(l - x_2) \\ + \; & q'E'\beta' q''E''\beta'' \cos\beta x_1 \cos\beta'(x_2 - x_1) \sin\beta''(l - x_2) \end{aligned}\right\} = 0 \tag{17}$$

Diese Formel soll zunächst für einen speciellen Fall besonders betrachtet werden.

Bestehen alle drei Stücke aus demselben Materiale und sind nur in ihren Querschnitten verschieden, so hat man

$$E = E' = E'', \quad \beta = \beta' = \beta''.$$

Die Auflösung der Gleichung ist leicht, wenn

$$x_1 = \frac{l}{4}, \quad x_2 = \frac{3l}{4}.$$

Es tritt dann in allen Gliedern der Factor $\sin\frac{\beta l}{2}$ auf. Die Werthe von β, für welche dieser Factor Null wird, entsprechen den geraden Tönen des Stabes, welche somit sämmtlich harmonisch sind zu dem Grundtone, den der Stab von derselben Länge und gleichförmigem Querschnitt gibt.

Für die übrigen Töne erhält man dann noch die Gleichung

$$\cos\frac{\beta l}{2} = \frac{qq''-q'q'}{(q+q')(q'+q'')}.$$

Ähnlich verhält es sich mit dem Falle, in welchem $x_1 = \frac{l}{4}$, $x_2 = \frac{l}{2}$ ist. Für die geraden Töne erhält man ebenfalls die Gleichung

$$\sin\frac{\beta l}{2} = 0$$

und für die ungeraden

$$\cos\frac{\beta l}{2} = \frac{(q-q')\,q''}{(q+q')(q'+q'')}.$$

Ich habe mit zwei Stäben hieher gehörige Versuche gemacht. Die folgenden Tabellen enthalten die gewonnenen Resultate.

Erster Stab. $q=1,\ q'=2,\ q''=1$

x_1	x_2	l
0	8	89
1	8	84·5
1	7	79
2	7	77
2	6	75
3	6	79
4	6	84·5
4	5	86·5
8	8	90

Zweiter Stab. $q=2,\ q'=1,\ q''=2$

x_1	x_2	l
8	8	52
4	5	58
4	6	60
3	6	64
2	6	65
0	6	57
0	8	52

Die Zahlen in den Colonnen x_1 und x_2 bedeuten die Achtel der ganzen Stablänge. Die Zahlen in den Colonnen l bedeuten die Längen der Saiten, welche mit dem Stabe im Einklange sind.

Berechnet man die Fälle (2, 6) und (4, 6) nach den obigen Formeln, so erhält man für den ersten Stab

$$\frac{\beta l}{2} = 109°28'16'' \quad \text{und} \quad 96°22'46''$$

Für den zweiten Stab

$$\frac{\beta l}{2} = 70°33'42'' \quad \text{und} \quad 77°9'38''$$

Daraus ergeben sich

0·822	0·934
1·275	1·166

als die Factoren, mit denen die ursprüngliche Saitenlänge multiplicirt werden muß, daß sie den in diesen Fällen zu gebenden Tönen entspricht. Man erhält für den ersten Stab 74 und 84·1, für den zweiten 65·9 und 60·3, welche Zahlen mit den beobachteten Werthen in hinreichender Übereinstimmung sich befinden.

III. Über belastete Stäbe.

Ein an einem Querschnitte mit einer endlichen Masse belasteter Stab kann als specieller Fall eines aus drei Stücken bestehenden Stabes betrachtet werden. Das erste und das dritte Stück werden in diesem Falle als vollkommen gleichartig in die Rechnung zu ziehen sein. Das mittlere Stück entsprechend dem belasteten Querschnitte wird man unendlich kurz und mit einer solchen Dichte versehen annehmen, daß das Product aus seinem Volumen in diese Dichte seine nebst der angehängten Masse gibt.

Wenn diese Masse wirklich nur an einem Querschnitte, nicht an einem endlichen Stücke des Stabes angebracht ist, allerdings ein idealer Fall, so gibt es in ihr keine Dehnungen und Verkürzungen, welche die Spannung in diesem Querschnitte ändern könnten. Man hat also in den Bedingungsgleichungen, welche aus dem Princip der Continuität der Spannungen fließen.

$$q = q' = q'' \quad \text{und} \quad E = E' = E''$$

zu setzen.

Ferner wird

$$x_2 - x_1 = \Delta$$

eine Größe sein, die so klein genommen werden kann, als man will. Man wird daher in der allgemeinen Gleichung für α die Sinus der Bogen $\beta\Delta$, $\beta'\Delta$ durch diese Bögen, die Cosinus derselben aber durch die Einheit ersetzen. Man erhält auf diese Weise folgende Gleichung:

$$\beta \sin \beta l + (\beta'^2 - \beta^2)\, \Delta \cos \beta x_1 \cos \beta\, (l - x_1) = 0.$$

Ersetzt man darin β'^2 und β^2 durch $\frac{\rho'}{E}$ und $\frac{\rho}{E}$, multiplicirt ferner die ganze Gleichung mit q, so erhält man

$$\rho q l . \frac{\sin \beta l}{\beta l} + q\,(\rho' - \rho)\, \Delta \cos \beta x_1 \cos \beta\, (l - x_1) = 0.$$

Nun ist $q(\rho' - \rho)\Delta$ offenbar nichts anderes als die belastende Masse, $\rho q l$ die Masse des Stabes. Bezeichnet man erstere mit m, letztere mit M, so kann man die vorstehende Gleichung auch schreiben

$$(18) \qquad \sin \beta l + \frac{m}{M} \beta l \cos \beta x_1 \cos \beta\, (l - x_1) = 0.$$

Diese Gleichung gilt zunächst, wenn die Masse m an einem einzelnen Querschnitt angebracht ist. Sie wird aber näherungsweise noch gelten, wenn Δ zwar einen endlichen, wie es in der Natur immer der Fall sein wird, aber sehr kleinen Werth hat, sobald die Masse m nur als Ganzes mit dem Stabe sich bewegt, nicht aber schwingende Bewegungen in ihr selbst entstehen. Ist aber letzteres der Fall, so gilt die Gleichung nicht mehr. Dieser Fall tritt z. B. auch bei sehr kleinem Δ ein, wenn man den Stab durch ein durchbohrtes Plättchen schiebt. Wird der Stab zum Tönen gebracht, so kommt das Plättchen in transversale Eigenschwingungen und diese können, wie Versuche gezeigt haben, bewirken, daß statt einer Vertiefung des Tones, welche durch Belastung herbeigeführt wird, eine Tonerhöhung eintritt. Dasselbe kann auch geschehen, wenn man ein solches Plättchen an das Ende eines Stabes anklebt.

Ein Stab von 16·68 Gramm. Gewicht wurde an seinem Ende belastet mit einem kugelförmigen Gemenge aus Wachs und Schnitzchen von Zinnfolie. Zwei Versuche wurden gemacht:

Belastung	2·47 Gramm.,	Seitenlänge	67
	3·28		70.

Der unbelastete Stab gab einen Ton gleich dem einer Saite von der Länge 60.

Für den Fall eines am Ende belasteten Stabes hat man in der Gleichung (18) $x_1 = l$ zu setzen. Sie geht dann über in

$$\operatorname{tang} \beta l + \frac{m}{M} \beta l = 0.$$

Für die beiden angeführten Fälle hat der Bruch $\frac{m}{M}$ die Werthe

$$0 \cdot 148 \quad \text{und} \quad 0 \cdot 199.$$

Die genäherten Werthe der ersten Wurzeln βl sind für diese zwei Fälle

$$158^\circ \quad \text{und} \quad 152^\circ 3.$$

Dividirt man durch diese beiden Zahlen 180°, so erhält man die Quotienten $1 \cdot 14$ und $1 \cdot 18$. Diese mit 60 multiplicirt geben

$$68 \cdot 4 \quad \text{und} \quad 70 \cdot 8,$$

welche zwei gerechneten Saitenlängen nur wenig größer als die beobachteten sind.

Ich füge nun noch zur Vervollständigung der obigen analytischen Entwickelungen den Lehrsatz hinzu, dessen Anwendung die Herstellung des allgemeinen den Anfangszuständen eines aus drei Stücken bestehenden Stabes entsprechenden Integrales aus den particulären Integralen ermöglicht.

Es ist schon oben bemerkt worden, daß die Bedingungsgleichungen (15) und (16) gestatten, alle in den Formeln (14) enthaltenen Constanten A, B durch eine einzige auszudrücken, etwa durch A. Diese erscheint dann in allen Gliedern, aus welchen U, U', U'' bestehen, als Factor. Es sollen die von diesem Factor befreiten Werthe von U, U', U'' im Folgenden durch diese nämlichen Buchstaben bezeichnet werden. Auch diese neuen Größen U genügen den Differentialgleichungen (11). In diesen Gleichungen ist α eine Wurzel der Gleichung (17). Es sei α_1 eine zweite Wurzel dieser Gleichung, so hat man für diese analog den Gleichungen (11) drei Gleichungen mit dem Parameter α_1. Die zugehörigen Werthe von U, U', U'' sollen durch dieselben Buchstaben mit dem angehängten Index 1 bezeichnet werden. Man findet nun leicht nach dem im ersten Abschnitte befolgten Verfahren

$$\rho(\alpha_1^2-\alpha^2)\int_0^{x_1} UU_1 \quad dx = E \left\{U_1 \frac{dU}{dx} - U \frac{dU_1}{dx}\right\}_0^{x_1}$$

$$\rho'(\alpha_1^2-\alpha^2)\int_{x_1}^{x_2} U'U_1' \; dx = E' \left\{U_1' \frac{dU'}{dx} - U' \frac{dU_1'}{dx}\right\}_{x_1}^{x_2}$$

$$\rho''(\alpha \;-\alpha^2)\int_{x_2}^{l} U''U_1'' dx = E'' \left\{U_1'' \frac{dU''}{dx} - U'' \frac{dU_1''}{dx}\right\}_{x_2}^{l}.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit q, die zweite mit q', die dritte mit q'' und addirt die Resultate, so erhält man auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wegen der Bedingungen (15) und (16) Null. Auf der ersten Seite ist der Voraussetzung nach $\alpha_1^2-\alpha^2$ von Null verschieden, es bleibt also

$$(19) \qquad q\rho\int_0^{x_1} UU_1 dx + q'\rho'\int_{x_1}^{x_2} U'U_1' dx + q''\rho''\int_{x_2}^{l} U''U_1'' dx = 0.$$

Dies ist der angezogene Lehrsatz. Seine Anwendung zur Bestimmung der Constanten bedarf nach dem im ersten Abschnitte Gesagten keiner Erklärung mehr.

Nur ist über die Specialisirung dieses Satzes für den Fall eines belasteten Stabes noch etwas zu bemerken. Für einen solchen Stab ist, wie oben bemerkt worden, $q=q'=q''$ und $x_2-x_1=\Delta$ zu setzen, unter Δ eine sehr kleine Länge verstanden. Dann kann man

$$\int_{x_1}^{x_2} U' \; U_1' \, dx = U'U_1'\Delta$$

$$\int_{x_2}^{l} U''U_1'' dx = \int_{x_1}^{l} U''U_1'' dx - U''U_1''\Delta$$

setzen, worin die mit Δ multiplicirten U', U'' die nach Substitution von x_1 für x erhaltenen speciellen Werthe dieser Größen bedeuten, welche zusammenfallen mit den für dieses specielle x geltenden Werthen von U. Man kann also statt des Trinoms in (19) schreiben

$$q\rho\int_0^{x_1} UU_1dx+q\rho\int_{x_1}^{l} U''U_1''dx+q(\rho'-\rho)\Delta U'U_1'.$$

Darin kann wieder $q(\rho'-\rho)\Delta$ durch die belastende Masse m ersetzt werden und es bleibt statt der Gleichung (19) die Folgende:

$$q\rho\int_0^{x_1} UU_1dx+q\rho\int_{x_1}^{l} U''U_1''dx+mU'U_1'=0, \tag{20}$$

worin U' und U_1' die Werthe bedeuten, welche U und U_1 oder U'', U_1'' annehmen, sobald in den allgemeinen Ausdrücken für dieselben an die Stelle von x der specielle Werth x_1 gesetzt wird.