Beobachtungen über die Schwingungen gestrichener Saiten.

Von **Clem. Neumann**,

Assistenten der Physik an der Universität zu Prag.

(Mit 2 Tafeln und 12 Holzschnitten.)

Duhamel[1]) hat zuerst versucht eine Theorie der mit dem Bogen gestrichenen Saiten zu begründen, indem er meinte den Einfluß des Bogens auf einen Reibungswiderstand reduciren zu können. Daß diese Theorie als eine unglückliche zu bezeichnen sei, wird wohl kaum bezweifelt werden können, zumal wenn man die sonderbaren Resultate in Augenschein nimmt, zu welchen Duhamel gelangt ist. Unter diesen möge nur erwähnt werden, daß nach seiner Ansicht die Saite nach längerem Streichen gänzlich zur Ruhe kommen muß; freilich eine natürliche Folge des vorausgesetzten Reibungswiderstandes.

In neuerer Zeit hat Helmholtz[2]) die Bewegung der gestrichenen Saiten wieder untersucht. Er beabsichtigte jedoch nicht so sehr die Theorie zu begründen, als vielmehr die wirkliche Bewegung der Saite durch die Beobachtung kennen zu lernen. Die Beobachtungen nun, welche Helmholtz anstellt, genügen für sich allein in der That nicht, um die Saitenbewegung kennen zu lernen; die vollständige Bewegung wird vielmehr aus sehr wenigen Beobachtungen mit Hilfe einer Theorie abgeleitet, die von der idealen Voraussetzung einer unendlich dünnen und unendlich biegsamen Saite ausgeht. Manches hat auch Helmholtz noch als problematisch hingestellt.

Man kann unter solchen Umständen wohl behaupten, daß weder die theoretischen noch die experimentellen Untersuchungen über gestrichene Saiten als abgeschlossen zu betrachten sind. Eine noch-

---

[1]) Duhamel Comptes rendus T. IX, 1839.

[2]) Helmholtz Lehre von den Tonempfindungen, Braunschweig 1863, S. 137.

malige Vornahme des Gegenstandes ist also einigermaßen gerechtfertigt. Die vorliegende Arbeit hat nun den Zweck, zunächst auf ganz experimentellem Wege die Saitenbewegung zu ermitteln und vollständig zu beobachten. Hiebei ergibt sich in den meisten Punkten eine sehr gute Übereinstimmung mit den Helmholtz'schen Sätzen. Die Abweichungen finden in der Richtung statt, in welcher sie erwartet werden müssen, wenn man die idealen Voraussetzungen der Theorie fallen läßt. Manches von Helmholtz als problematisch ausgesprochene konnte vollständig sichergestellt werden. Hoffentlich werden auch die vielen, zum Theil sehr einfachen Methoden nicht ganz ohne Werth sein.

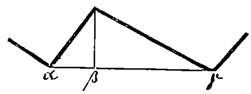
I. Die erste Untersuchungsmethode war die graphische. Die Saite wurde in bekannter Weise mit einem Federchen versehen und schrieb auf der berußten König'schen Phonantographenwalze. Diese Methode, welche genügt, um das Bewegungsgesetz verschiedener Saitenpunkte zu ermitteln, braucht, wie die Resultate zeigen, bei sorgfältiger Anwendung keiner anderen an Feinheit nachzustehen. Sie hat noch den Vortheil, daß alle Resultate einmal gewonnen, schriftlich, unveränderlich und meßbar vorliegen.

Die beiden Tafeln geben eine Auswahl der mannigfaltigen Curven, die man auf diese Weise erhält. Der bloße Anblick lehrt, daß die Theiltöne einer Saite durch den Bogen in den verschiedensten Verhältnissen ausgelöst werden können. Namentlich zu Anfang der Bogenbewegung ändern sich diese Verhältnisse sehr rasch. Man findet oft lange Curvenreihen, die sich fort und fort verändern, bis sich endlich eine constante Schwingungsweise herstellt. Fig. 3 und Fig. 4 auf Tafel I gibt ein Beispiel hiefür.

Unter diesen constanten Schwingungscurven tritt nun am häufigsten die von Helmholtz beschriebene und auf einem anderen Wege beobachtete Zickzackcurve auf (Fig. 16—20 Tafel I und Fig. 10—15 Taf. II). Die Tafel I enthält die Curven einer dünnen Violin A-Saite mit Ausnahme der Fig. 11, die von einer Violin E-Saite herrührt. Die Taf. II gibt die Curven einer dicken mit Drath überzogenen Violin G-Saite. Der Theilungspunkt der Saite, an welchem gestrichen wurde, ist mit *Bg* und jener, an welchem sich die Borste mit dem Federchen befand, mit *Br* und der beigesetzten Zahl bei jeder Figur bemerkt.

Hier sollen nun zunächst die einfachsten Curven, die Zickzackcurven, genauer betrachtet werden. Nach Helmholtz sollen sich nun die Stücke $\alpha\beta$ und $\beta\gamma$ Fig. 1 verhalten wie die beiden Stücke, in welche die Saite durch den beobachteten Punkt getheilt wird. Solche Messungen, welche nach der von Helmholtz angewandten Lissajou'schen Methode wenigstens sehr schwer anzustellen wären, wurden nun an den besten der vorliegenden Zickzackcurven ausgeführt und die Tabelle gibt eine Übersicht über dieselben.

Fig. 1.



Versuche mit einer Violin A-Saite.
(Strichstelle durchgehends in $^1/_7$).

Borste mit dem Federchen	$\alpha\beta^{mm}$	$\beta\gamma^{mm}$	beobachtet $\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta}$	theoret. $\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta}$	Mittel
$^6/_7$	1·3	8	6·15	6	6·11
	1·4	8·6	6·14		
	1·2	7·4	6·16		
	1·4	8·4	6·00		
$^5/_7$	2·7	6·4	2·37	2·5	2·38
	2·9	7·0	2·41		
	2·3	6·2	2·69		
	2·7	6·0	2·22		
	1·5	3·3	2·20		
	2·5	6·0	2·40		
$^4/_7$	3·8	5·1	1·34	1·33	1·34
	3·8	4·9	1·29		
	3·5	4·7	1·34		
	2·7	3·6	1·33		
	3·2	4·5	1·40		
$^3/_7$	5·3	3·9	0·73	0·75	0·71
	3·5	2·6	0·74		
	4·5	3·2	0·71		
	5	3·3	0·66		
$^2/_7$	6·2	2·8	0·45	0·4	0·43
	6·8	2·8	0·41		
	7·0	2·8	0·40		
	4·9	2·1	0·42		

Das Helmholtz'sche Gesetz findet sich also für dünne Saiten auffallend bestätigt.

Versuche mit einer Violin G-Saite.

(Strichstelle durchgehends in $\frac{1}{7}$).

Borste mit dem Federchen	$\alpha\beta^{mm}$	$\beta\gamma^{mm}$	beobachtet $\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta}$	theoret. $\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta}$	Mittel
$\frac{6}{7}$	2·7	10·5	3·88	6	3·99
	1·8	7·3	4·05		
	2·0	8·0	4·00		
	2·5	9·1	3·64		
	2·1	8·9	4·23		
	2·0	8·1	4·05		
$\frac{5}{7}$	5·0	8·6	1·72	2·5	2·18
	4·6	8·0	1·73		
	3·6	6·0	1·66		
	7·7	16·5	2·14		
	6·2	13·5	2·17		
	3·4	6·0	1·76		
	5·0	9·5	2·90		
$\frac{4}{7}$	8·1	8·9	1·09	1·33	1·16
	7·2	9·0	1·25		
	6·3	7·5	1·19		
	9·7	11·0	1·13		
	7·9	9·3	1·17		
$\frac{3}{7}$	12·0	7·5	0·62	0·75	0·69
	11·8	8·3	0·70		
	9·5	7·2	0·75		
	9·8	7·0	0·71		
	13·2	9·0	0·68		
$\frac{2}{7}$	9·9	4·8	0·48	0·4	0·47
	6·0	3·0	0·50		
	7·0	3·5	0·50		
	12·1	5·3	0·43		
	9·1	4·2	0·46		

Die Schwingungscurven dieser Saiten also, namentlich diejenigen, welche nahe am Ende der Saiten auftreten, zeigen demnach eine auffallende Abweichung vom Helmholtz'schen Gesetz. Es ist dies nicht anders zu erwarten. Die eigenthümliche eckige Form der Curve gründet sich auf das starke Auftreten der höheren Obertöne. Wo diese schwerer entstehen wie bei dicken Saiten, müssen sich die Curven zurunden, was die Taf. II bestätigt. Das Verhältniß $\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta}$ muß sich ferner desto mehr der Einheit nähern, je mehr die höheren Obertöne verschwinden und je mehr der Grundton allein hervortritt. Dies zeigt sich natürlich am besten am Ende der dicken Saite, weil gerade dort für die dünne Saite das Verhältniß $\frac{\beta\gamma}{\alpha\beta}$ sehr von der Einheit abweicht. Die Bewegung der dicken gestrichenen Saite nähert sich also mehr der Bewegung einer in der Mitte gezupften Saite.

Die Beziehung zwischen der Auf- und Absteigezeit, ebenso zwischen der Auf- und Absteigegeschwindigkeit ist durch die obigen Tabellen für jeden Saitenpunkt gegeben. Um die Bewegung genauer zu kennen, muß nun entweder die Amplitude für jeden Saitenpunkt bekannt sein oder man muß für eine der beiden Geschwindigkeiten z. B. für die Absteigegeschwindigkeit das Gesetz ausfindig machen, nach welchem dieselben von einem Ende der Saite gegen das andere variirt. Beides läßt sich nach der graphischen Methode nur sehr unvollkommen erreichen, indem zu diesem Zwecke die Saite mit mehreren Schreibfederchen versehen werden muß, was nicht wohl geschehen kann, ohne die Bewegung der Saite doch etwas zu alteriren.

Ein Versuch zur Bestimmung der Amplituden, wobei die Saite mit fünf Federchen schrieb und auf einem untergelegten berußten Spiegelglasstreifen die Amplituden an den Stellen der Federchen angab, wurde ausgeführt. In der folgenden Tabelle geben die x die Entfernungen der Federchen von dem Ende der Saite an, so daß $x = 12$ die Mitte bezeichnet; die y bedeuten die Amplituden der betreffenden Stellen, und zwar gibt die obere Zahlenreihe die beobachteten Werthe, die untere die berechneten unter der Voraussetzung, daß die Grenze des Schwingungsfeldes ein parabolischer Bogen sei.

x	3	6	8	9	12
y	368	555	604	755	778
	339	582	689	727	778.

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist also nur eine sehr beiläufige, was hier auf Rechnung des Experimentes kommt, weil nach den zu beschreibenden optischen Methoden die Übereinstimmung eine sehr gute ist.

Ist die Bewegung der einzelnen Saitenpunkte ermittelt, so handelt es sich noch darum zu entscheiden, wie diese Bewegungen zusammengehören, d. h. welche Punkte der Schwingungscurven gleichzeitige sind. Diese Frage wurde auf folgende Weise beantwortet: Ober der Saite befindet sich ein berußter Spiegelglasstreifen, in einer Führung, welche eine rasche Verschiebung nach der Länge der Saite erlaubt. Zwei Federchen an verschiedenen mehr oder weniger entfernten Stellen der Saite befestigt schreiben auf dem Streifen, während demselben ein rascher Ruck ertheilt wird. Man bekommt so zwei langgestreckte gleichzeitige Curvenstücke. Durch Messung mit dem Zirkel konnte man sich nun überzeugen, daß bei der Zickzackschwingung immer alle Saitenpunkte gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage hindurch gehen. Dies zeigte sich bei allen Versuchen.

Es hat nun keine Schwierigkeit mehr bloß auf Grund der ausgeführten Experimente sich von der Bewegung der Saite eine Vorstellung zu machen. Denken wir uns die Saite horizontal von rechts nach links verlaufend, und während ihre Punkte vertical auf- und abschwingen, bewegen wir die Saite senkrecht zu ihrer eigenen Richtung horizontal gleichförmig fort. Dann beschreibt die Saite eine Fläche. Die ebenen Verticalschnitte dieser Fläche parallel zur Saitenrichtung geben die aufeinanderfolgenden Formen der Saite, die ebenen Verticalschnitte senkrecht zur Saitenrichtung sind unsere Curven. Die letzteren lassen sich nun auf Grund der obigen Angaben leicht construiren, aus Carton ausschneiden und so anordnen, daß man eine ganz deutliche Vorstellung von der erwähnten Fläche, als von den Formen und Bewegungen der Saite erhält. Bei der dünnen Saite ist die Bewegung ganz die von Helmholtz beschriebene, bei der dicken weicht sie in dem oben angegebenen Sinne ab.

Die Kräuselungen der Schwingungsfiguren lassen sich auf graphischem Wege ebenfalls beobachten; Fig. 7, Taf. I ist ein besonders hübsches Beispiel dafür. Daß die Theiltöne der Saite in sehr mannigfaltigen Verhältnissen ausgelöst werden können, wurde bereits erwähnt. Eine besonders merkwürdige Schwingungsweise ist aber folgende. Die Saite theilt sich in zwei, auch drei Theile, von welchen jeder wie eine für sich gestrichene Saite Zickzackschwingungen ausführt, und die Bewegung kann sich mit den Zickzackschwingungen, welche die Saite als Ganzes macht, combiniren. Beispiele Taf. I, Fig. 2, 13, 15 u. s. w. Wenn man die Nebenzacken mustert, findet man, daß sie dieselben Verhältnisse zeigen, welche oben für die Hauptzacken gemessen wurden. Besonders auffallend sieht man dies auf Taf. II, Fig. 7—9. Diese complicirten Erscheinungen sollen bei einer anderen Gelegenheit besprochen werden.

II. Da in manchen Fragen die Anwendung der graphischen Methode Schwierigkeiten bot, wurden auch mehrere optische Methoden versucht.

Schon der bloße Anblick zeigt einen wesentlichen Unterschied zwischen den Schwingungen der gezupften und der gestrichenen Saite. Eine weiße Saite auf schwarzem Grund zeigt gestrichen, wenn keine Abtheilung auftritt, ein ganz gleichmäßiges helles Schwingungsfeld. Dieselbe Saite gezupft gibt ein in der Mitte dunkleres Schwingungsfeld mit einem starken helleren Rand. Die Interpretation dieser Erscheinung ist nach den bereits bekannten Thatsachen selbstverständlich. Streicht man die Saite, so zeigt sie das gleichmäßige Feld, das aber sofort einen helleren Rand erhält, wenn man den Bogen abhebt.

Man bringe ein Stäubchen Flittergold auf eine geschwärzte Saite vor einem schwarzen Grund und setze in der Nähe des Stäubchens einen Spiegel senkrecht zur Saite, den man nach der Länge der Saite rasch hin und her bewegt. Sofort löst sich beim Streichen das Goldstäubchen in dem Spiegel in eine helle Zickzacklinie auf, die sich augenblicklich zurundet, wie man den Bogen abhebt. Man benöthigt nicht einmal einen Spiegel. Wenn man mit dem Finger an der Saite hinfährt (ohne sie zu berühren), während man ihn mit dem Auge fixirt, erhält man die Curven direct auf der Netzhaut. Es hat keine Schwierigkeit auf diese einfache Weise sehr viele Details der Erscheinung zu beobachten.

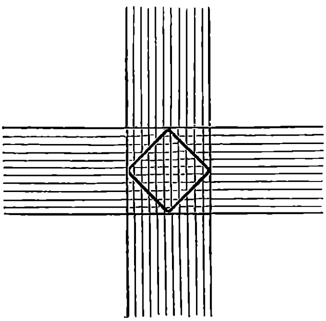
Ein von Prof. Mach [1]) angegebenes Verfahren eignet sich mehr für anhaltende Beobachtungen. Dies ist eine Modification der Lissajou'schen Methode. Ober einem schwarzen Grunde wird eine weiße Saite gespannt und quer über dieselbe etwas höher eine schwarze

---

[1]) Mach Pogg, Ann. Band 134, Seite 311.

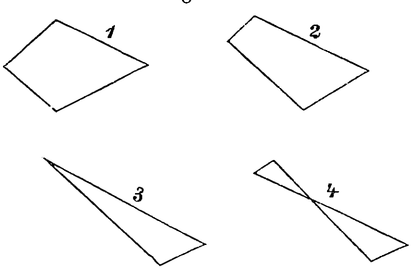
zunächst so, daß die Saiten zu einander senkrecht stehen und beide Mittelpunkte übereinanderfallen. Streicht man beide Saiten gleichzeitig bis zu gleichen Amplituden, so erhält man ein quadratisches Überkreuzungsfeld, und in diesem ein scharfes schwarzes Rechteck, welches sich, wenn die Saiten gut gleichgestimmt sind, nur langsam verändert, abwechselnd bis zu einem Quadrat anschwillt und bis zu einer Linie einschrumpft. Fig. 2 gibt eine Vorstellung von der Erscheinung. Der Mittelpunkt der Saite geht also mit constanter Geschwindigkeit durch das ganze Schwingungsfeld, und zwar ist für denselben die Auf- und Absteigegeschwindigkeit gleich.

Fig. 2.



Bringt man den Mittelpunkt der schwarzen Saite über einen Punkt der weißen, welcher dem Ende näher liegt, so erhält man eine merkwürdige Reihe von Schwingungsfiguren. Die Schwingungsfigur ist ein allgemeines geradliniges Viereck, welches sich langsam ändert. Der Schnittpunkt eines Gegenseitenpaares kann ein äußerer oder innerer sein oder auch in eine der beiden andern Seiten fallen. Es treten also unter diesen Schwingungsfiguren auch Dreiecke und Achtervierecke auf. Fig. 3 gibt eine solche Figur in verschiedenen Phasen und in einer Ordnung, in welcher sich dieselben wirklich zeigen können. Die Figur macht den Eindruck eines räumlichen (nicht ebenen), sich langsam ändernden, in Drehung begriffenen Viereckes. In der That kann ein räumliches Viereck sich perspectivisch in den Formen Fig. 3 zeigen. Alle hier auftretenden Figuren lassen sich leicht auf folgende Art nachahmen: Man knicke ein Stück Flor, so daß die beiden Flächen etwa 90° mit einander einschließen und stelle es etwa mit der Kante nach rechts so vor sich hin, daß

Fig. 3.



man die eine Fläche durch die andere durchsieht. Nun wirft man von einem Zickzackdrath mit verticaler Ebene, welcher rechts von dem Florstück aufgestellt ist und von vorn nach hinten verläuft durch ein etwas entferntes Licht auf den Flor einen Schatten. Verschiebt man den Drath langsam von vorn nach hinten, so bilden sich für ein beobachtendes Auge alle Schwingungsfiguren auf dem Flor.

Da nun die Bewegung des Mittelpunktes der schwarzen Saite bereits aus dem früher erwähnten Versuche bekannt ist, so läßt sich aus den Formen Fig. 3 sofort die Bewegung jedes anderen Punktes der weißen Saite ermitteln. Gesetzt die Anordnung des Versuches sei durch Fig. 4 dargestellt, die weiße Saite sei eine Spur höher als die schwarze und die Schwingungsfiguren präsentirten sich in der Form und Ordnung der Fig. 3, so können wir hieraus den Schluß ziehen, daß die Bewegung des weißen Saitenpunktes durch die Fig. 5 dargestellte von links nach rechts zu lesende Curve gegeben sei. Die Aufsteigegeschwindigkeit wäre also größer als die Absteigegeschwindigkeit. So läßt sich die Bewegung jedes Saitenpunktes untersuchen. Natürlich stimmen die Resultate vollständig mit den früher gegebenen Curven.

Fig. 4.

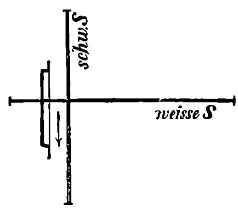
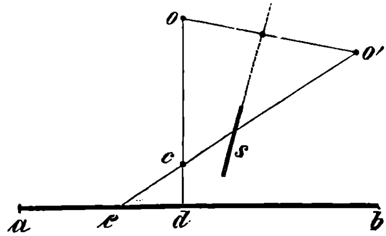


Fig 5.

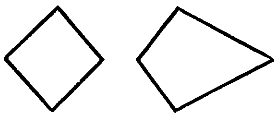
Um die Zusammengehörigkeit der Schwingungsfiguren verschiedener Saitenpunkte zu ermitteln, wurde die Aufstellung Fig. 6 benützt. In derselben bedeutet *ab* die weiße Saite, *c* den Mittelpunkt der quer darüber gespannten schwarzen Saite, *o* das Auge des Beobachters und *s* ein Spiegelchen. Der Beobachter projicirt nun den Punkt *c* einmal direct auf den Saitenpunkt *d* und dann vermöge des Spiegels auf den Punkt *e*, weil er sich so verhält, als wenn er mit dem Spiegelbild seines Auges von *o'* aus sehen würde. Auf diese Weise sieht man denselben schwarzen Saitenpunkt mit zwei

Fig. 6.



verschiedenen weißen Saitenpunkten combinirt und erhält ganz nahe aneinander zwei Curven, die man bei langsamer Bewegung leicht vergleichen kann. Denkt man sich die weiße Saite horizontal, die schwarze vertical, so werden beide Curven immer gleichzeitig horizontal symmetrisch, wie Fig. 7, woraus sich ergibt, daß alle Punkte der weißen Saite gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage hindurchgehen.

Fig. 7.

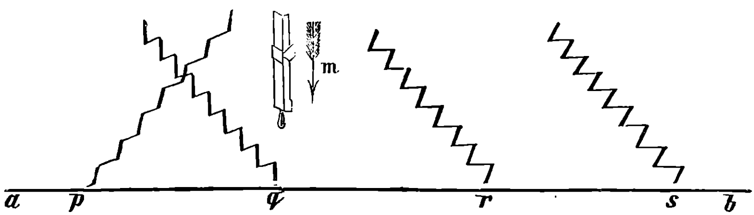


Es läßt sich erwarten, daß zwischen der Bewegung des Bogens und der Bewegung der gestrichenen Saite ein Zusammenhang besteht. Helmholtz hat auch die Vermuthung ausgesprochen, daß die Saitengeschwindigkeit im Sinne der Bogenbewegung unter dem Bogen der Bogengeschwindigkeit gleich sei. Die rationellste Art diesen Zusammenhang zu untersuchen ist offenbar die, mit dem Bogen irgend ein Ding fest zu verbinden, dessen Bewegung sich mit der Saitenbewegung auf sichtbare Weise combinirt.

Es wurde zunächst der Bogen mit zwei verticalen Spiegelchen versehen, welche gegen den Bogen selbst um etwa 45° geneigt zu beiden Seiten desselben flügelförmig angebracht waren. Die Saite war geschwärzt mit durch Linsen stark beleuchteten Flittergoldstückchen versehen und über einen schwarzen Grund gespannt. Beim Streichen wurden die glänzenden Punkte im Spiegel als Zickzackcurven von eigenthümlicher Form und Lage sichtbar.

Die Fig. 8 gibt eine Übersicht über die Curven, die man erhält. Es bedeute *ab* die Saite. Die Bewegung des Spiegelbogens ist durch

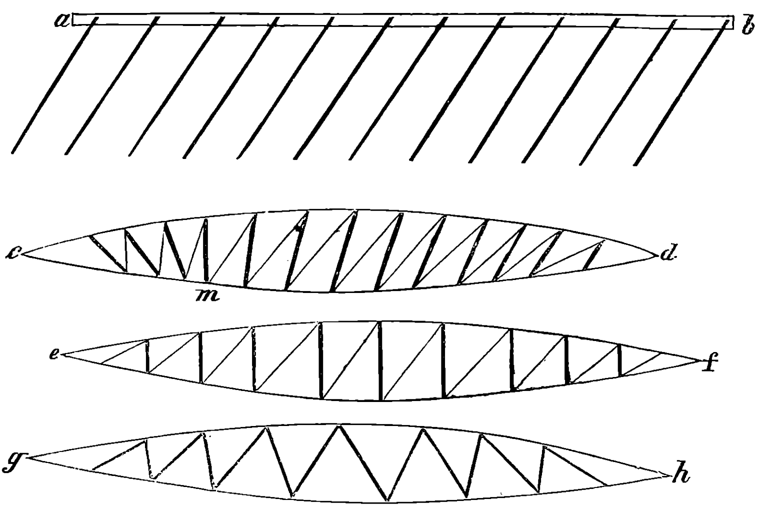
Fig. 8.



m angedeutet; derselbe greife näher am Ende *a* als *b*, etwa nahe bei *g* an. Die Curven von den hellen Punkten *p*, *q*, *r*, *s*, welche man in der angegebenen Lage in den Spiegeln erblickt, zeigen dann sofort, daß unter dem Bogen die Absteigegeschwindigkeit der Bogengeschwindigkeit gleich ist, denn nur in diesem Falle können Curventheile dem Bogen parallel und zur Saite senkrecht werden. Rechts vom Bogen ist die Absteigegeschwindigkeit größer, links kleiner als die Bogengeschwindigkeit. In Fig. 8 sind bloß die wichtigen Momente berücksichtigt.

Das Experiment läßt sich noch in anderer Weise ausführen. Eine Holzleiste Fig. 9 wird mit einer Anzahl schwarzer Seitendräthe versehen

Fig. 9.



welche durch Reibung unter einem beliebigen Winkel gegen die Leiste eingestellt werden können. Schraubt man diese Leiste quer über den Fiedelbogen und führt denselben über eine weiße Saite auf einem schwarzen Monochord, so zeigt sich das Schwingungsfeld der Saite *cd* von Zickzacklinien durchzogen. Es sei mit dem Bogen bei *m* absteigend gestrichen worden. Die dicken Striche entsprechen der absteigenden Bewegung der Saite. Man sieht hier mit einem Blick, wie die Absteigegeschwindigkeit von *c* gegen *d* hin wächst und gerade bei *m* der Bogengeschwindigkeit gleich wird. In Fig. 9 sind wieder bloß die wichtigsten Momente berücksichtigt [1]).

---

[1]) Es sei die Geschwindigkeit einer Saitenstelle im Sinne der Bogenbewegung v und positiv, es sei der Winkel der Dräthe mit der Bogenrichtung α und der in demselben Sinne gezählte Winkel des Striches, der auf der Saite erscheint β, ferner die Geschwindigkeit des Bogens c; so besteht die Gleichung $\operatorname{tg}\beta = \frac{v-c}{v} \operatorname{tg}\alpha$,

Zur Ermittlung des Gesetzes, nach welchem die Absteigegeschwindigkeit von c gegen d hin zunimmt dient folgender Versuch: Der Stab ab wird mit dem Ende a bei c drehbar befestigt, so daß ihn der bei m angreifende Bogen mit Hilfe eines Stiftes mitnimmt und ihm eine Hebelbewegung ertheilt. Die Geschwindigkeit, mit welcher nun die Dräthe über die Saite weggehen ist bei m wieder gleich der Bogengeschwindigkeit und ist übrigens proportional der Entfernung von c. Die Saite bietet bei diesem Versuch den Anblick ef. Die absteigende Bewegung gibt überall die zur Bogenrichtung parallelen Curvenstücke. Die Absteigegeschwindigkeit wächst also proportional der Entfernung des Saitenpunktes von dem Endpunkte e.

Man stelle nun die Dräthe alle senkrecht gegen ab und fahre, während man die Saite streicht mit ab nach der Länge der Saite hin. Dann bietet sie den Anblick gh. Dieser lehrt, weil die Figur vollkommen symmetrisch ist, daß die Aufsteigegeschwindigkeit nach demselben Gesetz von h gegen g wächst, wie die Absteigegeschwindigkeit von g gegen h. An der zur Bogenstelle symmetrischen ist also die Aufsteigegeschwindigkeit gleich der Bogengeschwindigkeit.

Die Strichstelle sei von dem näheren Ende der Saite um das Stück λ entfernt, die Entfernung eines beliebigen Saitenpunktes von demselben Ende heiße x, die absteigende Bogengeschwindigkeit k, die Saitenlänge l, die Absteigegeschwindigkeit eines beliebigen Saitenpunktes heiße v und die Aufsteigegeschwindigkeit w. Dann haben wir dem Obigen zufolge:

$$v = \frac{k}{\lambda} x \text{ und } w = \frac{k}{\lambda}(l-x)$$

daraus folgt $v + w = \frac{kl}{\lambda}$, constant für jeden Punkt.

Es sei die Absteigezeit τ und die Aufsteigezeit σ, dann muß offenbar

$$v\tau = w\sigma \text{ und } \sigma = \tau \frac{x}{l-x}$$

ferner weil $\tau + \sigma = T$, wobei T die ganze Schwingungsdauer bedeutet

$$\tau = T\frac{l-x}{l}.$$

---

welche die Neigung der Striche angibt, wenn v, c, α und die Geschwindigkeit v, wenn β, α, e gegeben ist.

Die Amplitude y eines beliebigen Saitenpunktes ist demnach

$$y = v\tau = \frac{kT}{\lambda l}\, x(l-x).$$

Nennen wir die Amplitude des Saitenmittelpunktes a, so ist

$$a = \frac{kT}{\lambda l}\ \frac{l^2}{4} = \frac{kTl}{4\lambda}$$

weßhalb man auch schreiben kann

$$y = \frac{4a}{l^2}\, x\,(l-x).$$

Die Grenze des Schwingungsfeldes ist also ein parabolischer Bogen.

Die Gleichung $a = \frac{kTl}{4\lambda}$ enthält Gesetze für das Ansprechen der Saite. Je mehr man sich dem Ende der Saite nähert, je rascher man streicht, je tiefer und länger die Saite ist, in desto größerer Amplitude spricht sie an. Diese Regel gilt offenbar auch für das Ansprechen der Obertöne, die also am leichtesten erklingen, wenn man in der Nähe ihres Knotens streicht, während bei gezupften Saiten die Obertöne am besten im Schwingungsbauch sich hervorrufen lassen. Beide Gesetze stimmen sehr gut mit der Erfahrung, wie man sich leicht überzeugt, wenn man fünf Saiten etwa auf dem Monochord aufspannt und sie auf die ersten Obertöne einer dicken Saite stimmt. Die Saiten tragen Papierreiter, welche das stärkere oder das schwächere Vorhandensein eines Obertones bei verschiedenen Strichstellen angeben. Auch theilt sich die Saite selbst in zwei oder drei Theile, wenn man nahe den betreffenden Knoten die Saite streicht. Sehr nahe am Ende erhält das Gesetz keine Bestätigung mehr.

In der Mitte gestrichen spricht die Saite gar nicht mehr an, offenbar weil es für diesen Fall nicht bestimmt ist, nach welcher Richtung die Aufsteige- oder Absteigegeschwindigkeiten wachsen sollen.

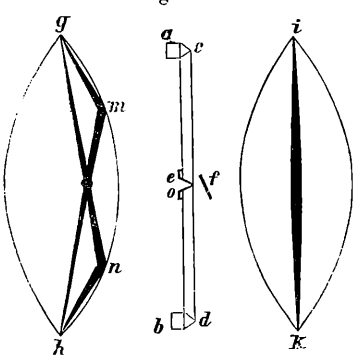
Wir sind nun auf ganz experimentellem Wege zu den Helmholtz'schen Sätzen gelangt und haben dieselben etwas reichhaltiger wiedergefunden. Es erübrigt nur noch zu zeigen, daß man nicht nur einzelne Punkte der Saite, sondern ganze Lagen derselben und den Verlauf der Bewegung direct beobachten könne.

Man spanne eine mit Drath übersponnene Saite über einen weißen Grund, verbinde den Steg mit der äußeren Belegung einer Leydnerflasche, die mit der Influenzmaschine verbunden ist und stelle einen mit der inneren Belegung verbundenen isolirten Knopf irgendwo in passender Entfernung von der Grenze des Schwingungsfeldes auf. Sobald beim Streichen die Saite dem Knopf nahe kommt, findet eine Entladung durch dieselbe statt, und man sieht im dunklen Zimmer die betreffende Form und Lage der Saite ganz deutlich. Durch Verstellung des Knopfes kann man alle Formen der Saite zur Anschauung bringen. Die Saite zeigt immer eine etwas zugerundete Ecke.

Die folgenden Beobachtungsweisen sind besondere Vereinfachungen und Modificationen des von Plateau und Doppler angegebenen Principes der stroboskopischen Scheiben. Dasselbe wurde bereits von J. Müller und in neuester Zeit wieder von A. Töpler für die Akustik verwendet.

Ein Holzrahmen, Fig. 10, durch *ab* im Durchschnitte dargestellt, ist mit glanzlosem schwarzen Papier überspannt und trägt auf zwei niederen Stegen eine weiße verticale Saite *cd*. Das Papier ist bei *e* durchbrochen und die Öffnung mit einem Stück horizontal verschiebbarer schwarzer Pappe verschlossen. Dieses Pappestück trägt eine kleine trichterförmige Öffnung, deren engeres Ende der daselbst geschwärzten Saite zugekehrt ist, ganz nahe an dieselbe herantritt und gerade durch die Saite vollständig verschlossen werden kann.

Fig. 10.

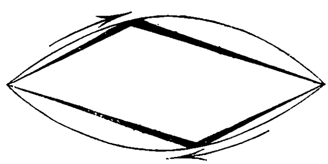


Gegenüber der Trichteröffnung *e* befindet sich ein geneigtes Spiegelchen *f*, durch welches man einen sehr großen Theil der Saite in perspectivisch sehr verkürzter Ansicht erblickt, wenn man das Auge nach *o* ganz nahe an die Öffnung bringt. Streicht man nun beim Durchsehen die Saite, so sieht man ihr helles Schwingungsfeld auf schwarzem Grund und auf demselben schwarz ausgespart die Lagen und Formen der Saite, welche dieselbe hat, während sie momentan die Trichteröffnung verschließt. Durch Verschieben der Öffnung kann man mannigfaltige Lagen der Saite zur Ansicht bekommen, deren sich bei jeder Lage der Öffnung im Allgemeinen immer zwei zugleich präsentiren.

In Fig. 10 stellt *ik* den Durchgang durch die Gleichgewichtslage vor, *gh* zeigt zwei andere Formen. Bei den Ecken *m* und *n* erscheinen die schwarzen Streifen wie natürlich etwas breiter und schwächer, so daß man sie nur mit einiger Aufmerksamkeit beobachten kann. Die Saite übernimmt hier also das Geschäft der stroboskopischen Scheibe selbst und kann es natürlich sehr exact besorgen.

Wir nehmen nun von dem Monochord Fig. 10 den Spiegel *f* weg, stellen die Öffnung *e* auf die Gleichgewichtslage der Saite ein und bringen ein zweites ähnliches Monochord mit einer nahe gleichgestimmten Saite in eine solche Lage, daß wir durch *e* dessen Saite sehr verkürzt sehen und überblicken können. Beim gleichzeitigen Streichen beider Saiten erscheint nun vollständig die von Helmholtz erschlossene Bewegung. Man erblickt auf dem weißen Schwingungsfeld ein schwarz ausgespartes Parallelogramm mit etwas zugerundeten und schwächeren Ecken, welche immer in demselben Sinne langsam die Grenzen des Schwingungsfeldes durchlaufen.

Fig. 11.

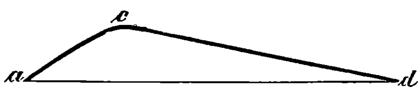


Es wurden auch mit einem großen Ruhmkorff'schen Apparate Versuche angestellt. Es wurde eine Leydnerflasche und als Unterbrecher eine Unterbrechungsstimmgabel von 256 halben Schwingungen eingeschaltet. Bei dem Lichte dieser Entladung wurde eine auf die Gabel gestimmte gestrichene Saite beobachtet. Bei dieser großen Funkenzahl konnte jedoch nur eine geringe Lichtstärke erreicht werden und deßhalb wurden die Versuche aufgegeben, obwohl sie die erwarteten Erscheinungen zur Noth zeigten.

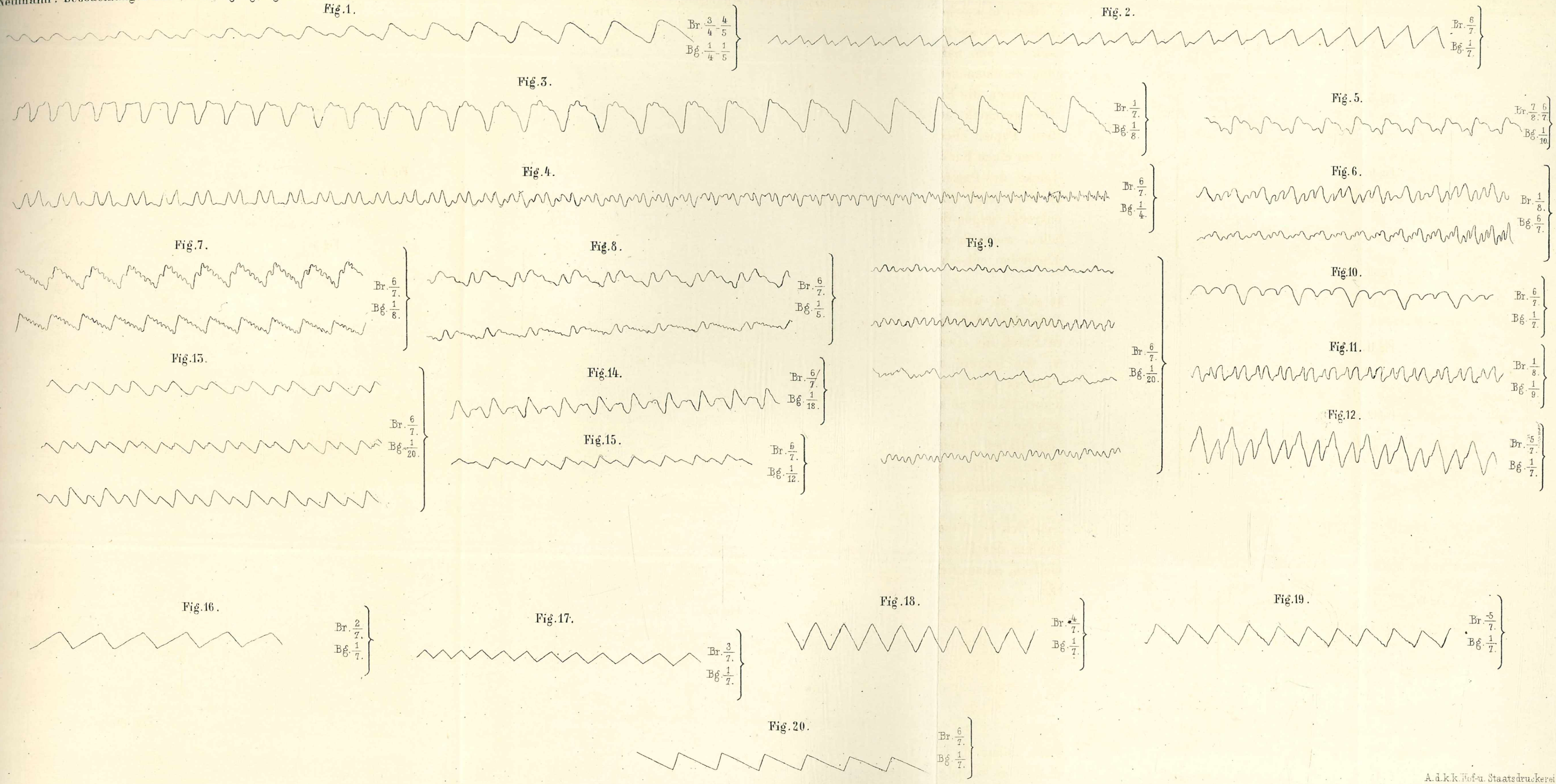
Sehr eclatant und für ein ganzes Auditorium sichtbar kann man jedoch die Vorgänge darstellen mit Hilfe eines Apparates, den Prof. Mach später ausführlich beschreiben wird. Eine Unterbrechungsgabel ist so eingerichtet, daß sie jedesmal beim Durchgang durch die Gleichgewichtslage momentan eine feine Spalte öffnet, in welcher sich der Brennpunkt einer großen Sammellinse befindet, auf welche Sonnenlicht fällt. Im verfinsterten Zimmer sieht man nun eine nahe gleichgestimmte Saite langsam ihre ganze Bewegung durchmachen. Um jedoch die Formen gut beurtheilen zu können, müssen die Excursionen derselben künstlich vergrößert werden. Dies geschieht auf folgende Art. Als Monochord dient ein mit weißem Papier überspannter Rahmen. Die Saite befindet sich nahe an dem einen Rande auf sehr niederen Stegen und wird durch eine Lücke des Papiers senkrecht gegen die Papierfläche gestrichen. Das Monochord wird nun so gestellt, daß die Lichtstrahlen zwar senkrecht gegen die Saite aber sehr schief gegen die Papierfläche auffallen, wodurch ein Schatten der Saite mit ungemein vergrößerter Excursion entsteht, welchen man beobachtet.

Die Saite zeigt eine etwas zugerundete Ecke *acb*, an welcher man bei dieser Art der Vergrößerung meist deutlich sieht, daß das kürzere Stück *ac* etwas concav, das längere *cb* etwas convex gegen die Gleichgewichtslage *ab* zu sei. Auch hier ist die Umkehrung des Versuches instructiv. Richtet man die Gabel so ein, daß sie die Lichtspalte momentan schließt, statt sie zu öffnen, so erhält man die Erscheinung Fig. 10 aber für ein ganzes Auditorium sichtbar.

Fig. 12.



Schließlich bleibt mir noch zu erwähnen, das ich bei dieser Untersuchung, welche im physikalischen Laboratorium der Prager Universität ausgeführt ist, von H. Prof. Mach vielfach, namentlich durch Angabe optischer Methoden unterstützt wurde.



A. d. k. k. Hof-u. Staatsdruckerei.

Fig. 1.

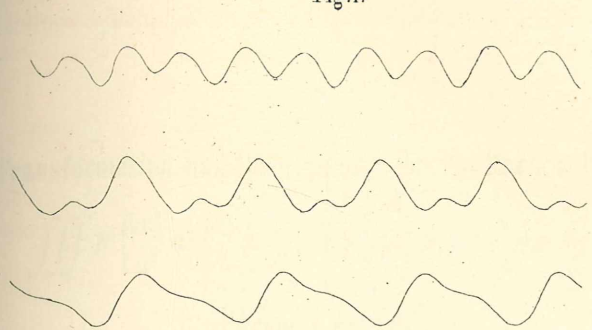


Fig. 2.

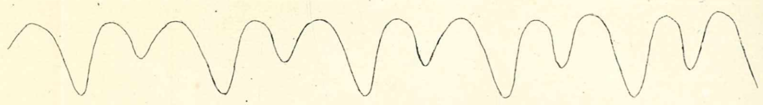


Fig. 3.

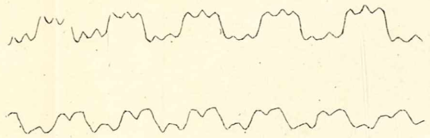


Fig. 4.

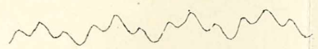


Fig. 5.

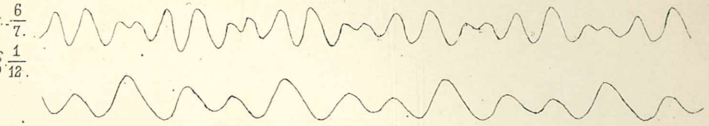


Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

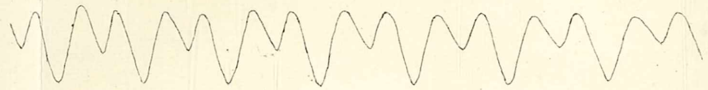


Fig. 9.

Fig. 10.

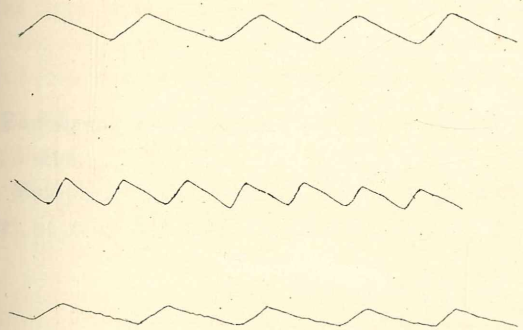


Fig. 12.

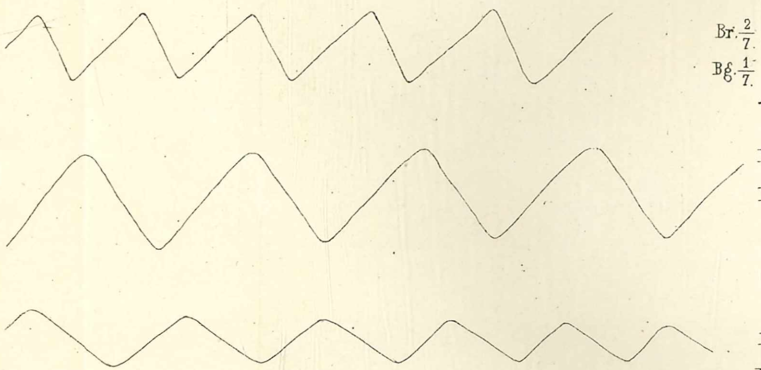


Fig. 15.