Einfache Constructionen windschiefer Hyperboloide und Paraboloide mit ihren ebenen Schnitten und Selbstschatten.

Von Prof. **R. Niemtschik** in Graz.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. März 1870.)

1. Die auf der anliegenden Tafel in bloß einer orthogonalen Projection dargestellten Hyperboloide und Paraboloide sind weder der Lage noch der Form nach vollständig bestimmt. Das Resultat einer Aufgabe über diese Flächen kann also auch nur in einer einzigen Projection bestehen, die sich aber durch Anwendung zweckmäßiger Constructionen und mit Berücksichtigung der Eigenschaften, welche den Hyperboloiden und Paraboloden als Flächen zweiter Ordnung zukommen, in einfacher und bestimmter Weise darstellen läßt.

Der wesentliche Vorheil des hier angewandten Verfahrens besteht darin, dass sich die betreffenden Aufgaben allgemeiner als bei Benützung zweier Projectionen, durch welche die dargestellten Objecte vollkommen bestimmt wären, lösen lassen und daß gleichwohl der Übergang von den allgemeinen auf die speciellen Fälle ohne Änderung der Zeichnung mit Leichtigkeit geschehen kann.

Das windschiefe Hyperboloid.

2. Die Geraden AB, CD, EF Fig. 1 bilden die Leitlinien des darzustellenden Hyperboloides.

Die Erzeugenden, welche die Leitlinien AB, CD, EF schneiden, ergeben sich sehr einfach, wenn man durch AB und CD parallele Ebenen ABE, CDF legt und die Durchschnittspunkte E, F der Leitlinie EF mit den Ebenen ABE, CDF bestimmt; denn jede durch EF gelegte Ebene schneidet die Ebenen ABE, CDF in parallelen Geraden, welche beziehungsweise durch E und F gehen, und diese Parallelen schneiden wieder die Leitlinien AB, CD in Punkten, die einer Erzeugenden des Hyperboloides angehören. Hier wurden die Punkte E, F beliebig angenommen.

Legt man etwa durch *EF* und den Punkt 1 der Leitlinie *AB* die Ebene *EF*1, so schneidet sie die Ebenen *ABE* und *CDF* in den Parallelen *E*1, *F*I, die Leitlinie *CD* in dem Punkte I und deßhalb ist die Gerade 1I eine Erzeugende des Hyperboloides. Wäre der Punkt I gegeben, so würde man zuerst $E1 \| F\mathrm{I}$ und dann 1I ziehen.

Die parallel zu *CD* durch die Leitlinie *EF* gelegte Ebene schneidet die Ebene *ABE* in der zu *CD* parallelen Geraden *cEd* und die parallel zu *AB* durch *EF* gelegte Ebene schneidet die Ebene *CDF* in der zu *AB* parallelen Geraden *aFb*.—*ab*, *cd* sind Erzeugende, denn *ab* schneidet *EF* in *F*, *CD* in *a* und *AB* in unendlicher Entfernung; *cd* schneidet aber *EF* in *E*, *AB* in *A* und *CD* in unendlicher Entfernung.

Legt man durch *AB* und *CD* die zu *EF* parallelen Ebenen *ABe* und *CDf*, so schneiden sie sich in einer zu *EF* parallelen Geraden *ef*, welche *AB* in *f*, *CD* in *e* und *EF* in unendlicher Entfernung trifft und deßhalb ebenfalls eine Erzeugende des Hyperboloides ist. Um *ef* zu erhalten, ist $F\alpha \| cd$, $A\alpha \| EF$, $\alpha e \| AB$ und $ef \| EF$ zu ziehen. Es schneiden sich nämlich die Ebenen *FCD*, *cdF* ($\|$*CDf*) in $F\alpha$, *cdf* und die zu *EF* parallele Ebene $AB\alpha$ in $A\alpha$, $AB\alpha$ und *FCD* in αe, folglich *ABe* und *CDf* in *ef*.

Aus dieser Construction folgt: $ae \nparallel F\alpha \nparallel AE$, $Fa \nparallel e\alpha \nparallel fA$ so wie $Fe \nparallel fE$; deßhalb schneiden sich die drei Geraden *Aa*, *Ee* und *Ff* in einem Punkte *O* und ist: $Oa = OA$, $Oe = OE$ sowie $Of = OF$.

Offenbar ist *O* zugleich der Durchschnittspunkt der Ebenen *ABab*, *CDcd*, *EFef* und steht *O* von je zwei Parallelen *AB*, *ab*; *CD*, *cd*; *EF*, *ef* gleichweit ab. Daraus folgt wieder, dass jede Gerade, welche durch *O* geht und eine von den Leitlinien *AB*, *CD*, *EF* schneidet, auch die zu der geschnittenen Leitlinie parallele Erzeugende *ab*, *cd* oder *ef* schneiden muss und daß die sich ergebenden Schnittpunkte einer solchen Geraden von *O* gleichweit entfernt sind.

Legt man also durch *O* und eine Erzeugende 1I eine Ebene, so schneidet sie die Ebenen *ABF*, *CDE* in den Geraden 1*O*(1) I*O*(I), die Leitlinien *AB*, *CD* in den Punkten 1, I und die Erzeugenden *ab*, *cd* in den Punkten (1), (I).

Weil $O(1) = O1$ und $O(\mathrm{I}) = O\mathrm{I}$ ist; so sind die Dreiecke 1*O*I und (1)*O*(I) congruent, folglich ist $(1)(\mathrm{I}) \nparallel 1\mathrm{I}$. Weil aber 1I die Leitlinie *EF* in *x* schneidet, so muß auch (1)(I) die zu *EF* parallele

Erzeugende ef in (x) schneiden, und zwar liegt (x) zugleich im Durchschnitte der Geraden xO, ef.

Durch diese Betrachtungen gelangt man zu dem Schlusse, daß zu jeder die Leitlinien AB, CD, EF schneidenden Erzeugenden eine parallele Gerade gefunden werden kann, welche wieder die Erzeugenden ab, cd, ef, sowie alle übrigen Geraden des ersten Systemes schneidet, die nämlich AB, CD, EF als Leitlinien haben; ferner daß O der Mittelpunkt des Hyperboloides ist.

Es ist aber selbstverständlich, daß die Erzeugenden des zweiten Systemes (1)(I)...(10)(X). zu welchen auch AB, CD, EF gehören, auf dieselbe Weise wie die Erzeugenden des ersten Systemes construirt werden können, wenn man drei Erzeugende des ersten Systemes, etwa ab, cd, ef als Leitlinien benützt. Z. B. Um die Erzeugende (9)(IX) des zweiten Systemes darzustellen, welche durch den Punkt (9) der Leitlinie ab geht, lege man durch (9) und die Leitlinie ef die Ebene $(9)ef$, welche also die Ebene eab in der Geraden $e(9)$, die Ebene fcd in der zu $e(9)$ parallelen Geraden f(IX) sowie die Leitlinie cd in dem Punkte (IX) schneidet, und ziehe (9)(IX) als die verlangte Erzeugende.

Daß die Erzeugende (9)(IX) jede Erzeugende des ersten Systemes schneidet, constatiren wir durch den Nachweis, daß durch (9)(IX) und eine beliebige Erzeugende des ersten Systemes z. B. 3 III eine Ebene gelegt werden kann.

Weil 3, (IX) und III, (9) Durchschnittspunkte der Geraden 3 III, (9)(IX) mit den parallelen Ebenen ABE und CDF sind; so liegen die Geraden 3 III, (9)(IX) nur dann in einer Ebene, wenn 3(IX) || III(9) ist.

Aus den ähnlichen Dreiecken Af(IX) und $ae(9)$ folgt:

$$A(\mathrm{IX}) \,.\, a(9) = ae \,.\, Af;$$

nun ist $Af = aF$ und $ae = AE$, also auch:

$$A(\mathrm{IX}) \,.\, a(9) = AE \,.\, aF \tag{1}$$

ferner ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $AE3$ und $aF\mathrm{III}$:

$$A3 \,.\, a\mathrm{III} = AE \,.\, aF$$

und wenn für $AE \,.\, aF$ der Werth aus (1) gesetzt wird:

$$A3 \,.\, a\mathrm{III} = A(\mathrm{IX}) \,.\, a(9),$$

oder

$$\frac{A3}{A(\mathrm{IX})} = \frac{a\,(9)}{a\,\mathrm{III}}.$$

Aus dieser Gleichung und dem Umstande, daß $A3 \| a(9)$ sowie $A(\mathrm{IX}) \| a\mathrm{III}$ ist, ergibt sich also:

$$3(\mathrm{IX}) \| \mathrm{III}(9).$$

Demnach liegen die Geraden (9) (IX) und 3 III in einer Ebene, sie schneiden sich also in der That.

Auf gleiche Weise findet man, daß $1(\mathrm{IX}) \| \mathrm{I}(9)$, $2(\mathrm{IX}) \| \mathrm{II}(9) \ldots$ ist. Weil die Erzeugende (9) (IX) beliebig gewählt wurde, so kann aus dem vorstehenden Beweis gefolgert werden, daß jede Erzeugende des zweiten Systemes alle Erzeugenden des ersten Systemes schneidet und daraus folgt wieder, daß jede Erzeugende des ersten Systemes alle Erzeugenden des zweiten Systemes trifft, daß also das Hyperboloid auf zweifache Weise durch die Bewegung einer Geraden erzeugt werden kann.

Wählt man in ab einen Punkt (10), der in vorliegender Figur zugleich in einer Erzeugenden 1I des ersten Systemes liegt, und zieht $f(\mathrm{X}) \| e(10)$; so ist (10) (X) eine Erzeugende des zweiten Systemes.

Wir wollen nun nachweisen, daß auch der Punkt (X) in der Projection der Erzeugenden 1I liegt, daß also die Erzeugenden 1I und (10) (X) sich decken.

In den Dreiecken $AE1$ und $aF\mathrm{I}$ ist:

$$A1 \,.\, a\mathrm{I} = AE \,.\, aF = ae \,.\, Af \tag{2}$$

und in den Dreiecken $A(\mathrm{X})f$ und $ae(10)$ ist:

$$A(\mathrm{X}) = \frac{ae \,.\, Af}{a(10)},$$

woraus durch Substitution des Werthes von $Af \,.\, ae$ aus (2) sich ergibt:

$$A(\mathrm{X}) = \frac{A1 \,.\, a\mathrm{I}}{a(10)}.$$

Bezeichnen wir vorläufig mit z den Durchschnittspunkt der Geraden $1(10)\mathrm{I}$; cd; so folgt aus den Dreiecken $Az1$ und $a(10)\mathrm{I}$

$$Az = \frac{A1 \,.\, a\mathrm{I}}{a(10)},$$

das ist aber der zuvor für $A(X)$ gefundene Werth, weßhalb also die Geraden 1(10)I und *cd* sich in dem Punkte (X) schneiden.

Daraus kann nun geschlossen werden, daß jede in der Fig. 1 dargestellte Gerade des Hyperboloides eigentlich die Projection zweier Erzeugenden bildet, von denen eine, 1I, dem ersten, die andere, (10)(X), dem zweiten Systeme angehört.

Soll aber durch einen beliebigen Punkt *p* Fig. 2 der Erzeugenden 5V die Erzeugende (9)(IX) gezogen werden, so kann man durch *p* und *ab* die Ebene *pab* legen; diese Ebene schneidet die Ebene *EF*5V in der Geraden *Fpw*, die Ebene *ABE* in der zu *ab* Parallelen *w*(IX) und die Erzeugende *cd* in dem Punkte (IX), weßhalb also *p*(IX) die verlangte Erzeugende bildet.

Die durch den Punkt *p* und die Erzeugende 2II gelegte Ebene *p*2II schneidet die Ebene *ABE* in der Geraden 2(IX) und die Ebene *CDF* in der Geraden II(9), $\|$ 2(IX). Die Richtung der Tracen 2(IX), II(9) ergibt sich durch *pq*, wenn $pr \| 5E$ und $rq \| E2$ gezogen wird; denn *pr*, *rq* bilden die Durchschnitte der zu *ABE* parallelen Ebene *pqr* mit den Ebenen *EF*5V und *EF*2II.

Zieht man $pu \| EF$, $pv \| 2\mathrm{II}$ und $uv \| F\mathrm{II}$; so bildet *v* den Durchschnittspunkt der zu 2II Parallelen *pv* mit der Ebene *FCD*; daher liegt *v* ebenfalls in der Trace II(9) der Ebene *p*2II und mithin kann (9) als Durchschnittspunkt der Geraden *ab*, *v*H dargestellt werden.

Wenn die Punkte (9), (IX) nicht zu benützen sind, kann man den Durchschnittspunkt *t* der Ebene *p*2II mit einer Erzeugenden 3III construiren und dann *tp* ziehen. $2x \| \mathrm{II}v$.

Wäre hingegen (9)(IX) gegeben und die Erzeugende *p*V darzustellen, so könnte man durch (9)(IX) die zu *EF* parallele Ebene (9)(IX)*z* legen, welche also die Ebene *FCD* in der Geraden (9)*z* schneidet. $(\mathrm{IX})z \#EF$, $pu \| EF$. Die Ebene *pEF* schneidet wieder die Ebenen *FCD* und *ABE* in den parallelen Geraden *Fu*V und *E*5, folglich die Erzeugenden *AB*, *CD* in den Punkten 5, V.

Aus der Lage der Erzeugenden in Fig. 1, welche Tangenten der Contour des Hyperboloides sind, geht hervor, daß in diesem Falle die Contour eine Hyperbel ist, welche *O* als Mittelpunkt und die durch *O* gezogenen Erzeugenden als Asymptoten hat.

Weil die Leitlinien *AB*, *CD*, *EF* und die Punkte *E*, *F* unvollkommen bestimmt sind, so entspricht die dargestellte Projection unendlich vielen Hyperboloiden. Würde man aber die Lage der Leitlinien etwa durch die Tracen der Ebenen *ABE* und *CDF* und durch eine bestimmte Neigung dieser Ebenen gegen die Zeichnungsfläche feststellen, dann würde dieselbe Projection einem vollkommen bestimmten Hyperboloide entsprechen.

Wir wollen jedoch auch die übrigen Aufgaben ganz allgemein behandeln und lassen deßhalb in den Figuren 3, 4, 5, 6 die Leitlinien *AB*, *CD*, *EF* des Hyperboloides in derselben Lage wie in den Fig. 1, 2.

3. Construction des elliptischen Durchschnittes I(I)2(2) des Hyperboloides *ABCDEF* Fig. 3 mit der Ebene *MNO*, welche durch den Mittelpunkt *O* der Fläche und die in der Ebene *FCD* befindliche Gerade *MN* bestimmt ist.

Die Trace *MN* und die Erzeugenden *CD*, *ab* treffen sich in den Punkten I, (2), welche also dem fraglichen Durchschnitte angehören und weil dessen Mittelpunkt *O* ist, so ergeben sich zwei andere Punkte desselben, wenn I*O* bis (I) in *cd* und (2)*O* bis 2 in *AB* verlängert, oder *O*(I) = *O*I und *O*2 = *O*(2) gemacht wird. I(I), 2(2) sind nicht conjungirte Durchmesser; I(2) und 2(I) sind aber parallele Sehnen, weil sie nämlich in den Durchschnitten der Ebene *MNO* mit den parallelen Ebenen *ABE* und *CDF* liegen.

Wird die Erzeugende I1, dann 1*t*||*CD* sowie *t*I gezogen, so bildet 1*t* die Durchschnittslinie der Ebene *MNO* mit der durch die Erzeugenden *CD*, 1I gelegten, das Hyperboloid im Punkte I berührenden Ebene *C*1I, weßhalb also *t*I die dem Punkte I entsprechende Tangente der Schnittcurve ist.

Aus der Lage der Punkte 2, (2) gegen die parallelen Tangenten *t*I und *T*(I) ist zu entnehmen, daß die Schnittcurve I(I)2(2) eine Ellipse ist, welche also durch die beiden Durchmesser I(I), 2(2) und die Tangente *t*I vollkommen bestimmt ist.

Fielen die Tangente *t*I und die Erzeugende 1I zusammen, dann würden zwei parallele Erzeugende den Durchschnitt bilden.

Würden die Punkte 2, (2) außerhalb der parallelen Tangenten *t*I, *T*(I) fallen, dann wäre der Durchschnitt eine Hyperbel.

Um den Fall, wo eine nicht durch den Flächen-Mittelpunkt *O* gelegte Ebene das Hyperboloid nach einer Ellipse schneidet, nicht separat zeichnen zu müssen, nehmen wir an, daß diese Ebene durch die Geraden *MN* (in *CDF*) und *tn* (in *ABE*) gegeben ist. Dann ergeben sich wieder die Durchschnitte I, (II) von *MN*, *CD*, *ab* und 3, (4) von *tn*, *AB*, *cd* als Punkte der fraglichen Ellipse; und weil I (II), 3 (4) parallele Sehnen bilden, so kann durch deren Mittelpunkte ein Durchmesser *D* gezogen werden. Die Lage eines zweiten Durchmessers (*D*) kann man aber durch den Mittelpunkt der Sehne I3 und den Durchschnittspunkt der Tangenten *t*I und (*t*)3 bestimmen. Im Durchschnitte von *D*, (*D*) liegt der Mittelpunkt der Ellipse und dann kann diese wieder ohne weitere Rücksicht auf das Hyperboloid gezeichnet werden. Daß jeder elliptische Schnitt die (hyperbolischen) Contouren des Hyperboloides berühren muß, ist selbstverständlich.

4. Construction des parabolischen Durchschnittes σI(IX) Fig. 4 des Hyperboloides *ABCDEF* mit der Ebene *MNmn*, welche mit der Ebene *abAB* der Erzeugenden *ab*, *AB* parallel ist und die Ebenen *ABE*, *CDF* in den Geraden *MN*, *mn* schneidet. $MN \| mn \| AB$.

Der Abstand der Tracen *MN*, *mn* ist also gleich jenem der Erzeugenden *ab*, *AB*. Die gemeinschaftlichen Punkte I von *MN*, *CD* und (IX) von *mn*, *cd* gehören der fraglichen Parabel an, deren Axe *Sz* mit *AB* parallel ist.

Um den Parabel-Scheitel *S* zu finden, ziehen wir die Erzeugenden I1 und (IX)(9), legen durch 1I, *CD* sowie durch (9)(IX), *cd* die Ebenen 1*CD* und (9)*cd*, welche das Hyperboloid beziehungsweise in I und (IX) berühren. Die Ebene 1*CD* schneidet die Ebene *ABE* in der zu *CD* Parallelen 1*t*, folglich die Ebene *MNm* in der Geraden I*t*, welche also in I die Parabel berührt; die Ebene (9)*cd* schneidet wieder die Ebene *CDF* in der zu *cd* Parallelen (9)*M*, folglich die Ebene *MNm* in der Geraden *M*(IX), welche ebenfalls Tangente der Parabel ist.

Die Tangenten *t*I, *M*IX treffen sich in dem Punkte *T*, welcher auch aus dem Durchschnitte der Tangente *t*I mit dem durch den Mittelpunkt *u* der Sehne IIX gezogenen Parabel-Diameter erhalten werden kann.

Nun errichten wir I$p \perp mn$ (IX)$N \perp MN$, halbiren die Strecke *pt* in *q* sowie I*N* in *r* und ziehen die Geraden *q*I, (IX)*r* bis sie sich in dem Parabel-Scheitel *S* schneiden. $Sz(\|AB)$ ist die Parabel-Axe.

5. Construction des hyperbolischen Schnittes $gzO(z)$ Fig. 3 des Hyperboloides *ABCDEF* mit der zu den sich schneidenden Erzeugenden *AB, cd* (und *CD, ab*) parallelen Diametralebene *zO(z)*.

Die Hyperbel *gzOz* hat den Mittelpunkt *O* und mit *AB, cd* parallele Asymptoten *Oz, O(z)*. Man braucht also nur den Durchschnittspunkt *g* einer Erzeugenden 1I mit der Ebene *zO(z)* zu bestimmen und kann dann mit Benützung der Asymptoten und des Punktes *g* die Scheitel sowie beliebige Punkte der Hyperbel construiren.

Weil aber die Ebene *zO(z)* von den Ebenen *ABE* und *CDF* gleichweit absteht, so schneidet sie die Erzeugenden 1I...(1)(I) in den Mittelpunkten *g...(g)* der durch die Ebenen *ABE, CDF* abgeschnittenen Strecken 1I...(1)(I), weßhalb beliebige Hyperbel-Punkte auch einfach durch Halbiren solcher Strecken dargestellt werden können.

Der Durchschnitt des Hyperboloides mit einer zu zwei sich schneidenden Erzeugenden *AB, cd* parallelen, sonst aber beliebigen Ebene *E* ist eine Hyperbel, deren Asymptoten mit *AB, cd* parallel sind. Die Ebene *E* theilt die von den Ebenen *ABE* und *CDF* abgeschnittenen Strecken 1I, 2II .. (1)(I), (2)(II) .. wieder in proportionale Stücke. Wenn also etwa *g, h* die Durchschnittspunkte der Erzeugenden 1I, 2II mit der Ebene *E* bezeichnen, so ist: $1g : g\mathrm{I} = 2h : h\mathrm{II}$ u. s. w. Der Hyperbel-Mittelpunkt *o* liegt im Durchschnitte der Geraden *AOo* mit der Ebene *E*, wenn nämlich *A* den gemeinschaftlichen Punkt von *AB, cd* bezeichnet.

6. Construction der Berührungslinie 1II(III) des Hyperboloides *ABCDEF* Fig. 5 mit einer dasselbe umhüllenden Kegelfläche, deren Scheitel λ ist. λ liegt in der Geraden λlL, welche die Ebene *ABE* in dem Punkte *l* und *CDF* in *L* trifft.

Bekanntlich ist die fragliche Berührungslinie von der zweiten Ordnung; deßhalb ergibt sie sich einfach als Durchschnittslinie des Hyperboloides mit einer Ebene, deren Lage mittelst der Berührungspunkte dreier durch den Punkt λ gelegten Tangenten oder Berührungsebenen des Hyperboloides bestimmt wird.

Man ziehe $lq \nparallel EF$, LqR, $\lambda rR \parallel EF$ und $lr \parallel Lq$; dann sind *r, R* die Durchschnittspunkte der zu *EF* parallelen Geraden λrR mit den Ebenen *ABE* und *CDF*.

Mit Benützung der Punkte r, R können nun sehr einfach durch den Punkt λ berührende Ebenen an das Hyperboloid gelegt und die Berührungspunkte derselben gefunden werden.

Eine durch λR gelegte Ebene λRK schneidet die Ebenen ABE und CDF in den Parallelen rk, RK und die Erzeugenden AB, CD, ab in den Punkten k, H, J.

Die Gerade λk trifft die Ebene CDF in dem Punkte K. Die Ebene λAB schneidet die Ebene CDF in der zu AB Parallelen KI die Erzeugende CD in I und das Hyperboloid außer in AB auch in der Erzeugenden I1, (E1 || FI), weßhalb 1 Berührungspunkt der Ebene λAB mit dem Hyperboloide ist.

Die Gerade λH trifft die Ebene ABE in dem Punkte h. Die Ebene λCD schneidet wieder die Ebene ABE in der zu CD Parallelen h2, die Erzeugende AB in dem Punkte 2 und das Hyperboloid außer in AB auch noch in der Erzeugenden 2II, (FII || E2). Demnach ist II Berührungspunkt des Hyperboloides mit der Ebene λCD.

i ist Durchschnittspunkt der Geraden λJ mit der Ebene ABE. Die Ebene λab schneidet die Ebene ABE in der zu ab Parallelen i(3) die Erzeugende cd in dem Punkte (3) und das Hyperboloid außer in ab auch noch in der Erzeugenden (3)(III); II(III) || 2(3). Es ist also (III) Berührungspunkt des Hyperboloides und der Ebene λab. Durch die drei Punkte I, II, (III) ist nun die Ebene der fraglichen Berührungslinie vollkommen bestimmt; diese Ebene schneidet die Ebenen CDF und ABE in den Parallelen MII(III)N, m2(3)n, folglich die Erzeugende cd in dem Punkte (4). Die Berührungslinie kann als Durchschnitt des Hyperboloides mit der Ebene Mnm nach dem im Vorhergehenden angegebenen Verfahren construirt werden.

Lassen sich durch den Kegelscheitel λ Tangenten an die Contour des Hyperboloides ziehen, so können ihre Berührungspunkte zur Bestimmung der Ebene I, II (III) benützt werden.

Stellt λ einen leuchtenden Punkt vor, so bildet 1, II (III) die Selbstschattengrenze auf dem Hyperboloide.

7. Construction der Berührungslinie 1II(3)(IV) Fig. 6 des Hyperboloides $AB..F$ mit einer dasselbe umhüllenden Cylinderfläche, deren Kanten zu der Geraden lL parallel sind. l, L sind Durchschnittspunkte der Geraden lL mit den Ebenen ABE und CDF.

Die fragliche Linie ist ein Diametralschnitt des Hyperboloides, dessen Ebene also durch den Mittelpunkt O der Fläche und die Berührungspunkte I, II zweier zu lL parallelen Berührungsebenen des Hyperboloides bestimmt werden kann.

Zieht man durch einen Punkt k der Erzeugenden AB die Gerade $kK \# lL$; so bildet K den Durchschnittspunkt von kK mit der Ebene CDF. Die durch AB und kK, also parallel zu lL gelegte Ebene KAB schneidet die Ebene CDF in der zu AB Parallelen KI, die Erzeugende CD in dem Punkte I und das Hyperboloid außer in AB auch in der Erzeugenden 1 I. $E1 \parallel F$I. Es ist also 1 Berührungspunkt des Hyperboloides mit der zu lL parallelen Ebene KAB.

Zieht man ferner durch den beliebigen Punkt H der Erzeugenden CD die Gerade $Hh \# lL$, dann $h2 \parallel CD$ und FII $\parallel E2$; so stellt 2 II die zweite Erzeugende vor, nach welcher die zu lL parallele Ebene hCD das Hyperboloid schneidet, und II bildet den Berührungspunkt des Hyperboloides mit der Ebene hCD.

Nun kann a(IV) $= A1$ und $A(3) = a$II gemacht werden, wodurch (3), (IV) als Berührungspunkte des Hyperboloides mit den zu lL parallelen Ebenen IIIcd und IVab sich ergeben. Die Parallelen MII (IV) N und $m1$ (3) n bilden die Durchschnitte der Ebene I II(3)(IV) mit den Ebenen CDF und ABE. $T1$, tII sind Tangenten der Linie 1 II(IV).

Die Berührungslinie kann jetzt als Durchschnitt des Hyperboloides mit der Ebene $MNmn$ construirt werden.

Die Berührungspunkte der Contouren des Hyperboloides und der umhüllenden Cylinderfläche sind zugleich Berührungspunkte dieser Contouren mit der Linie 1 II(3) (IV).

Bezeichnet lL die Richtung des einfallenden Lichtes, dann ist die Linie 1 II (3) (IV) die Selbstschattengrenze auf dem Hyperboloide.

8. Die Erzeugenden eines durch drei sich kreuzende Leitlinien AB, CD, EF gegebenen Hyperboloides können auch auf folgende Weise einfach dargestellt werden.

Man legt durch AB und CD beliebige Ebenen ABE und $CD\varphi$, welche EF etwa in E, φ, und sich in der Geraden D schneiden.

Zieht man dann durch einen beliebigen Punkt α der Geraden D die Geraden αE und $\alpha\varphi$, so trifft erstere die Leitlinie AB in dem Punkte 1, letztere die CD in I, und es ist 1 I eine Erzeugende des

Hyperboloides, denn $\alpha 1$, αI und EF liegen in einer Ebene, folglich schneidet 1 I nicht nur AB und CD, sondern auch EF.

In Fig. 7 wurde durch AB und den Punkt E die Ebene EAB, durch CD die zu EF parallele Ebene αCD gelegt und αD als Durchschnittslinie der Ebenen EAB und $CD\varphi$ angenommen. Weil die Ebene αCD zu EF parallel ist, so schneidet jede durch EF gelegte Ebene die Ebene αCD in einer zu EF parallelen Geraden, und deßhalb ist $\alpha \mathrm{I} \| EF$. αE und AB haben den Punkt 1 gemeinschaftlich; folglich bildet 1 I eine Erzeugende des Hyperboloides. Auf gleiche Weise können beliebige Erzeugende desselben Systemes construirt werden. CD trifft die Ebene EAB in D, weßhalb EBD auch eine Erzeugende bildet.

Um eine Erzeugende des zweiten Systemes, z. B. (I)(1) zu finden, lege man durch (I) und eine Erzeugende 5 V des ersten Systemes eine Ebene, welche also die Ebene EAB in der Geraden 5 (I)u sowie die Ebene αCD in der Geraden uVq schneidet, suche den Durchschnittspunkt (1) einer anderen Erzeugenden 1 I des ersten Systemes und ziehe (1)(I). Die Ebenen AB1 I und αCD schneiden sich in pI, die Ebenen 5(I)V und ABI in 5q; die Geraden 5q und 1 I begegnen sich in (I).

In derselben Figur wurde der Durchschnitt 2gV des Hyperboloides ABF mit der Ebene MNO construirt. MN liegt in der Ebene αCD und NO in der Ebene EAB. Es schneiden sich MN, CD in V und NO, AB in 2, weßhalb die Punkte 2, V der Curve 2gV angehören. Die Ebene 2pII berührt das Hyperboloid in dem Punkte 2 und schneidet die Ebene MNO in der Geraden M2, welche also wieder die Schnittcurve in 2 tangirt. Die Ebene CD5 berührt im Punkte V das Hyperboloid und schneidet in der Geraden TV die Ebene MNO; deßhalb ist TV ebenfalls eine Tangente der Schnittcurve.

Die Ebenen 3pIII, MNO haben die Gerade w2 und die Geraden w2, 3 III haben den Punkt g gemeinschaftlich; daher ist g Durchschnittspunkt der Erzeugenden 3 III mit der Ebene MNO. Die Tangente tg der Linie 2gV ergibt sich aber als Durchschnitt der Ebenen 3 III (1) I und MNO.

Da im Allgemeinen die durch g gehende Erzeugende (1)(I) erst zu ziehen sein wird, so kann zu diesem Behufe durch g und die Erzeugende 5 V die Ebene g5rV gelegt werden, welche also die

Ebene αCD in $r\mathrm{V}u$, die Ebene EAB in u(I)5 und das Hyperboloid außer in 5 V auch noch in der Erzeugenden (I) g (1) schneidet.

Wie g und tg können andere Punkte und Tangenten des Schnittes dargestellt werden. Daß mittelst der Tangenten $M2$, TV und des Punktes g die übrigen Punkte des Schnittes durch die Polar-Construction gefunden werden können, ist selbstverständlich.

Bestimmt man durch die Mittelpunkte zweier Sehnen und die Durchschnittspunkte der je einer Sehne anliegenden Tangenten die Lage zweier Durchmesser, so ergibt sich, daß der Durchschnittspunkt der beiden Durchmesser, das ist der Mittelpunkt der Schnittcurve, auf der convexen Seite der Curve 2gV liegt, daß also 2gV ein Hyperbelast ist.

9. In den Figuren 8, 9, 10 ist das Hyperboloid $abcdABCD$ durch zwei zur Flächenaxe qQ senkrechte, vom Mittelpunkte O gleichweit entfernte, also congruente und ähnlich liegende elliptische Schnitte $abcd$, $ABCD$ und durch die große Axe $\alpha\beta$ der Einziehungslinie $\alpha\beta\gamma\delta$ gegeben. Die Axen ab, AB, $\alpha\beta$ sind senkrecht zu qQ. Unter dieser Voraussetzung sind also die Ellipsen-Axen, deren Projectionen ab, AB, $\alpha\beta$ darstellen, parallel zur Zeichnungsfläche [1]).

Die Ellipse $ABCD$ bildet zugleich die orthogonale Projection der Ellipse $abcd$ auf der Ebene ABD. Auf derselben Ebene ist die orthogonale Projection der Einziehungslinie $\alpha\beta\gamma\delta$ eine mit $ABCD$ ähnliche Ellipse $\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}$, von welcher jedoch nur die Axe $\dot{\alpha}\dot{\beta}=\alpha\beta$ dargestellt ist. Die Projectionen auf der Ebene ABD von den geraden Erzeugenden des Hyperboloides sind Tangenten an die Ellipse $\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}$. Um die Tangenten ohne Zeichnung der Ellipse $\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}$ darstellen zu können, projiciren wir die Ellipsen $ABCD$, $\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}$ in der Richtung CC_1 so, daß als bezügliche Projectionen die aus Q beschriebenen Kreise AC_1B und $\dot{\alpha}\gamma_1\dot{\beta}$ erhalten werden; dann erscheinen die Projectionen von den Tangenten der Ellipse $\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}\dot{\delta}$ als Tangenten des Kreises $\dot{\alpha}\dot{\beta}\gamma_1$.

Nun können die Erzeugenden des Hyperboloides sehr einfach dargestellt werden,

Um etwa die durch den Punkt E gehenden Erzeugenden zu finden, hat man $EE_1 \perp AB$, an den Kreis $\dot{\alpha}\dot{\beta}\gamma_1$ die Tangenten E_1e_1, E_1f_1,

[1]) Den Fall, wo die genannten Ellipsenaxen gegen die Zeichnungsfläche geneigt sind, behandeln wir nicht separat, weil die ebenen Schnitte des betreffenden Hyperboloides auf gleiche Weise wie jene in den Fig. 8, 9, 10 construirt werden können.

dann die Geraden e_1e und $f_1f \perp AB$ und endlich die Erzeugenden Ee, Ef zu ziehen.

Die durch Punkte der Ellipse $abcd$ zu ziehenden Erzeugenden ergeben sich auf gleiche Weise.

Die Contour $g\alpha G\,.\,.\,\beta H$ des Hyperboloides ist eine Hyperbel, deren Mittelpunkt O und deren Axe $\alpha\beta$ ist; sie berührt die Ellipsen $abcd$, $ABCD$ in den Punkten g, G, h, H, welche direct construirt werden können, wenn berücksichtigt wird, daß die diesen Punkten entsprechenden Tangenten zugleich Contouren jener Kegelflächen bilden, die von dem Hyperboloide in den Ellipsen $ABCD$, $abcd$ berührt werden.

Da die durch die beiden Erzeugenden Ee, Ef bestimmte Ebene in dem Punkte E das Hyperboloid berührt; so ist sie zugleich eine Berührungsebene des von dem Hyperboloide umhüllten Kegels z $ABCD$, und zwar berührt sie denselben längs der Kante Ewz, welche durch den Mittelpunkt w der Strecke ef geht, und die Axe qQ in dem Punkte z, dem Scheitel des Kegels schneidet.

zG, zH sind also Tangenten und G, H Berührungspunkte der Ellipse $ABCD$ und der Hyperbel $G\alpha\,.\,.\,\beta H$. Mit Bezug auf die Axe $\alpha\beta$ liegen die Punkte g, G sowie h, H symmetrisch.

Mittelst der Axe $\alpha\beta$ und eines der Punkte g, G, h, H können sofort die Asymptoten und dann beliebige Punkte der Contour-Hyperbel construirt werden.

Wenn die Contour in entsprechender Ausdehnung gezeichnet wäre, könnten die Erzeugenden des Hyperboloides unmittelbar als Tangenten derselben gezogen werden.

Das unvollkommen bestimmte Hyperboloid geht in ein der Form nach bestimmtes über, wenn von einer der Geraden qQ, CD die wahre Länge oder die Neigung gegen die Zeichnungsfläche angenommen wird. Wenn überdies der Durchschnittspunkt von qQ oder CD mit der Zeichnungsfläche angenommen wird, dann ist auch die Lage des Hyperboloides gegen die Zeichnungsfläche festgestellt.

10. Construction des elliptischen Durchschnittes I II III IV Fig. 8 des Hyperboloides $ab\,.\,.\,D$ mit der Ebene MNm, welche die Ebene ABC in der Geraden MN und abc in $mn (\| MN)$ schneidet.

Bestimmt man den Berührungspunkt T der Ellipse $ABCD$ mit der zu MN parallelen Tangente und legt durch T, qQ eine Ebene, so schneidet dieselbe das Hyperboloid nach einer Hyperbel, welche den geometrischen Ort der Berührungspunkte des Hyperboloides mit zu MN parallelen Tangenten bildet. Die bezügliche Hyperbel schneidet die Ebene MNm in den Punkten I, II, welche also in der Durchschnittslinie pP der Ebenen MNm und TqQ liegen. $qp \| QP$.

Da nun die Geraden, welche parallel zu MN durch I und II gezogen werden, Tangenten des Hyperboloides bilden und in der Ebene MNm liegen, so sind sie zugleich Tangenten der fraglichen Ellipse; weil sie aber mit einander parallel sind, so ist I II ein Durchmesser dieser Ellipse.

Um die Durchschnittspunkte I, II der Geraden pP mit dem Hyperboloide ohne Zeichnung jener Hyperbel zu finden, betrachten wir den gemeinschaftlichen Punkt σ der Geraden pP, qQ als Scheitel einer Kegelfläche σPA_1, deren Basis in der Ebene ABD liegt, also durch den Punkt P geht und eine mit $ABCD$ ähnliche Ellipse QPA_1 ist. $PA_1 \| TA$.

Der Kegel σPA_1 und das Hyperboloid schneiden sich in zwei mit $ABCD$ ähnlichen Ellipsen, deren Ebenen mit ABD parallel sind, und die beiden Ellipsen schneiden wieder die Gerade pP in den Punkten I, II.

Jede Erzeugende des Hyperboloides trifft die Kegelfläche σPA_1 in zwei Punkten, welche den genannten Durchschnitts-Ellipsen angehören. Wenn aber zwei solche Punkte bekannt sind, so können durch sie mit ABD parallele Ebenen gelegt und deren Durchschnittspunkte I, II mit der Geraden pP construirt werden.

Wir suchen die Durchschnittspunkte (I), (II) der Erzeugenden eE mit der Kegelfläche σPA_1, ziehen also durch den Punkt σ die mit eE Parallele σi, deren orthogonale Projection Qi auf der Ebene ABD mit der gleichnamigen Projection Ee' der Erzeugenden eE parallel ist. i, E sind Durchschnittspunkte der Geraden σi und eE mit der Ebene ABD, folglich ist iE die Durchschnittslinie der Ebenen σieE und ABD.

Die Durchschnittspunkte x, y der Geraden Ei mit der Ellipse QPA_1 construiren wir mit Benützung des aus Q mit dem Halbmesser QA_1 beschriebenen Kreises und der Geraden (x) (y) als der schiefen Projectionen der Ellipse PQA_1 und der Geraden xy; oder mit Benützung der Ellipse $ABCD$ und der Geraden $[x]$ $[y]$, welche letztere zu der Ellipse *ABCD* in denselben Beziehungen steht, wie xy zu der Ellipse QPA_1.

Die Ebene σieE schneidet die Kegelfläche σPA_1 in den Kanten $x\sigma$ und $y\sigma$ und diese treffen wieder die Erzeugende *eE* in den Punkten (I), (II). Wird nun (I) I $\|\, xP$ und (II) II $\|\, yP$ gezogen, so schneiden sich *pP*, (I) I, (II) II in den fraglichen Punkten I, II; denn *xP*, *yP* und (I) I, (II) II können als Durchschnitte der Ebenen σPx, σPy mit *ABD*, und der parallel zu *ABD* durch (I) und (II) gelegten Ebenen betrachtet werden, in welchen letzteren Ebenen nämlich die Durchschnitts-Ellipsen der Kegelfläche σPA_1 und des Hyperboloides liegen.

Weil der zu I II conjungirte Durchmesser III IV der Ellipse I II III IV der Lage nach bestimmt ist, indem er durch den Mittelpunkt μ von I II geht und zu *MN* parallel ist; so handelt es sich nur noch um die Construction eines Punktes der Ellipse, um dann auf bekannte Weise die Endpunkte III, IV des Diameters III IV, sowie beliebige Punkte der Ellipse unabhängig von dem Hyperboloide darstellen zu können.

Für diesen Zweck kann etwa der Durchschnittspunkt V der Erzeugenden *eE* mit der Ebene *MNm* bestimmt werden, indem durch *eE* eine beliebige Ebene *EPem* gelegt wird, welche die Ebenen *ABD* *abd* in den parallelen Geraden *EP*, *em* und die Ebene *MNm* in der Geraden *Pm* schneidet. *Pm*, *eE* haben den Punkt V gemeinschaftlich.

Die Ebene *gGhH* der Contour-Hyperbel schneidet die Ebenen *abd*, *ABD* in den parallelen Geraden *ghn* und *NGH*, die Ebene *MNm* also in der Geraden *Nn*; *Nn* schneidet aber die Hyperbel *gGH* in den Punkten VI, VII, in welchen sich die Hyperbel und die Ellipse I II III IV berühren.

11. Construction des parabolischen Durchschnittes I *ef* des Hyperboloides *ab..D* Fig. 9 mit der Ebene *MNmn*, welche die Ebene *ABD* in der Geraden *MN* und *abd* in *mn* ($\|\, MN$) schneidet.

Für die Untersuchung, von welcher Beschaffenheit der fragliche Schnitt ist, benützen wir einen Hilfskegel *SABCD*, welcher die Basis *ABCD* hat und dessen Kanten mit den Erzeugenden des Hyperboloides parallel sind. Der Scheitel *S* des Hilfskegels ergibt sich, wenn parallel zu der orthogonalen Projection *Ee'* der Erzeugenden *Ee* die Gerade *QL* und parallel zu der Erzeugenden *Ee* die Kegelkante *LS* bis zum Durchschnitte *S* mit der Axe *qQ* gezogen wird.

T ist der Berührungspunkt einer mit *MN* parallelen Tangente der Ellipse *ABCD*.

Die Ebenen *MNm* und *PTqQ* schneiden sich in der Geraden *pP* (*qp*||*QP*), welche mit der Kante *ST* des Hilfskegels parallel ist; die Ebene *MNm* ist also parallel mit der Ebene, welche den Hilfskegel in der Kante *ST* berührt; deßhalb ist der Durchschnitt des Hyperboloides mit der Ebene *MNm* eine Parabel, deren Axe mit der Kegelkante *ST* parallel liegt und *pP* ist ein Durchmesser dieser Parabel.

Der Durchschnittspunkt I der Geraden *pP* mit dem Hyperboloide könnte auf gleiche Weise wie die Punkte I, II in Fig. 8 construirt werden. Die dem Parabel-Punkte I entsprechende Tangente ist mit *MN* parallel.

Zur Bestimmung des Parabelscheitels σ ist jedoch der Punkt I nicht nothwendig, weil σ mit Benützung der Parabel-Tangenten *te*, *tf* wie in Fig. 4 construirt werden kann.

Die Tangenten $et\varepsilon$ und $ft\varphi$ ergeben sich als Durchschnitte der Ebene *MNm* mit den Ebenen *eE*(*E*) und *fF*(*F*), welche das Hyperboloid nach den Erzeugenden *eE*, *e*(*E*) und *fF*, *f*(*F*) schneiden, also auch in *e* und *f* berühren. Die Ebenen *eE*(*E*), *fF*(*F*) schneiden die Ebene *ABD* in den Geraden (*E*)$E\varepsilon$, (*F*)$F\varphi$, die Trace *MN* in den Punkten ε, φ und die Ebene *MNm* in den Geraden εte, φtf.

Weil die Sehne *ef* und der Durchmesser *p*I *P* conjungirt sind, so liegt der Durchschnittspunkt *t* der Tangenten εe und φf in dem Durchmesser *pP*. Man hätte also auch nur eine von den Tangenten, etwa φtf, auf die angegebene Weise construiren und die andere *te* durch Verbinden der Punkte *t*, *e* bestimmen können.

$E\varepsilon$ und $F\varphi$ sind beziehungsweise parallel mit den Tangenten, welche die Ellipse *abcd* in *e* und *f* berühren.

12. Construction des hyperbolischen Schnittes *ueEW* des Hyperboloides *ab..D* Fig. 10 mit der Ebene *MNm*, welche die Ebenen *ABD* und *abd* in den Geraden *MN*, *mn* schneidet.

Um die Richtungen der Asymptoten der fraglichen Hyperbel zu finden, construiren wir wieder den Hilfskegel *SABCD*, dessen Basis die Ellipse *ABCD* bildet und dessen Kanten mit den Erzeugenden des Hyperboloides parallel sind und legen durch den Scheitel *S* die zu *MNm* parallele Ebene *SJK*. *qp*||*QP*; *SR*||*pP*, *JRK*||*MN*. Weil die Ebene *SJK* die Ebene *ABD* in der Geraden *JK*, daher den Hilfskegel in den Kanten SJ, SK schneidet; so sind durch SJ, SK die Richtungen der Asymptoten bestimmt.

Die gemeinschaftlichen Punkte E, W der Trace MN und der Ellipse $ABCD$, sowie die gemeinschaftlichen Punkte u, v der Trace mn und der Ellipse $abcd$ gehören der Hyperbel an.

Da die Sehnen uv, EW parallel sind; so ist durch ihre Mittelpunkte p, P die Lage eines Durchmesser in der Hyperbel bestimmt.

Die durch die Erzeugenden Ee, Ef und uU, uV gelegten Ebenen Eef, uUV berühren das Hyperboloid in den Punkten E, u und schneiden deßhalb die Ebene MNm in den Geraden iE, ku, welche Tangenten der Hyperbel sind. Die durch den Mittelpunkt r der Sehne uE und den Begegnungspunkt t der Tangenten iE, ku gezogene Gerade rt ist also ebenfalls ein Durchmesser der Hyperbel.

Im Durchschnitte der beiden Diameter pP und rt ergibt sich der Hyperbel-Mittelpunkt μ.

Nun können die mit SJ, SK parallelen Asymptoten μz, $\mu(z)$ gezogen und dann die Scheitel sowie beliebige Punkte der Hyperbel unabhängig von der Fläche construirt werden.

Der Mittelpunkt μ kann auch auf folgende Weise construirt werden. Man bestimmt die Durchschnittspunkte x, y der in der Ebene $qQpP$ befindlichen Kanten TS, YS des Hilfskegels mit der Geraden pP, halbirt die Strecke x, y in (μ) und zieht $O\mu \| S(\mu)$ bis pP in μ getroffen wird.

Wenn aber die mit der Ebene MNm parallelen Erzeugenden des Hyperboloides dargestellt sind, so kann μ einfach als Durchschnittspunkt des durch den gemeinschaftlichen Punkt dieser Erzeugenden gezogenen Diameters des Hyperboloides mit der Ebene MNm bestimmt werden.

13. Die zwei kleinsten Kreisschnitte eines elliptischen Hyperboloides haben die große Axe $\alpha\beta$ der Kehllinie als gemeinschaftlichen Durchmesser. Construirt man in einer Geraden des Hyperboloides die Punkte k, K, welche von O den Abstand $O\alpha = O\beta$ haben; so gehört k dem einen und K dem anderen Kreisschnitte an, und folglich können durch k, $\alpha\beta$ und K, $\alpha\beta$ die Ebenen dieser Kreisschnitte bestimmt werden.

Es ist selbstverständlich, daß diese Aufgabe nur dann gelöst werden kann, wenn das betreffende Hyperboloid vollständig bestimmt ist.

Das windschiefe Paraboloid.

14. Construction des hyperbolischen Schnittes c II III G Fig. 11 des Paraboloides $agAG$ mit der Ebene MNm.

Das Paraboloid ist durch zwei Erzeugende aA, gG des einen und zwei Erzeugende ag, AG des anderen Systemes gegeben.

Wir theilen die Strecken aA, gG sowie ag, AG in gleichviele gleiche Stücke : $ab = bc = \ldots fg = {}^1/_6\, ag$, $AB = BC = \ldots FG = {}^1/_6\, AG$, $Ah = hi = \ldots = la = {}^1/_5\, aA$, $GH = HJ = \ldots Lg = {}^1/_5\, gG$ und ziehen die Erzeugenden bB, $cC \ldots fF$, hH, $iJ \ldots lL$. Dann legen wir durch die Erzeugende ag die zu AG parallele Ebene $agmn$, sowie durch die Erzeugende AG die zu ag parallele Ebene $AGMN$ und bestimmen die parallelen Durchschnitte mn, MN der Ebene MNm mit den Ebenen agn, AGN.

Im allgemeinen Falle können die Parallelen MN, mn in den genannten Ebenen beliebig angenommen werden, was auch hier geschehen ist.

Die gemeinschaftlichen Punkte c von ag, mn und G von GA MN gehören der fraglichen Durchschnittscurve an.

Um zu untersuchen, von welcher Beschaffenheit die Durchschnittscurve ist, construiren wir zunächst den Durchschnitt Gn der Ebene MNm mit der zu aA parallelen Ebene gGx. Zu dem Behufe ziehen wir $Gx \| cC$, $cx \| AG$, dann xgn bis mn in n geschnitten wird. x, g sind Durchschnittspunkte der Geraden Gx, Gg mit der Ebene agn, folglich sind xn, Gn Durchschnitte der Ebene Ggx mit den Ebenen agm und MNm.

Weil die Ebene MNm die Richtungsebenen agn und gGx in den Geraden mn, Gn schneidet, so ist also die fragliche Durchschnittscurve eine Hyperbel, deren Asymptoten mit den Geraden mn, Gn parallel sind.

Die durch die Erzeugenden ag, cC gelegte Ebene berührt das Paraboloid in dem Punkte c und schneidet die Ebene AGN in der zu ag Parallelen CN sowie die Ebene MNm in der Geraden Nc, welche letztere Tangente der Hyperbel c II G ist.

Die durch die Erzeugenden gG und AG gelegte Ebene berührt wieder das Paraboloid in dem Punkte G und schneidet die Ebene *agn* in der zu *AG* Parallelen *gt*, sowie die Ebene *MNm* in der Geraden *tG*, welche ebenfalls eine Tangente der Hyperbel ist.

Nun kann durch den Mittelpunkt μ der Sehne *cG* und den gemeinschaftlichen Punkt *r* der Tangenten *Nc*, *tG* der Hyperbel-Durchmesser μr gezogen werden. Trägt man auf die Tangente *cN* nach beiden Seiten von *c* gleiche Stücke *cq*, *cr* und zieht $rv \| Gn$, $qv \| mn$ sowie *cv*; so ist *cv* ein zweiter Durchmesser. Im Durchschnitte von μr, *cv* liegt also der Hyperbel-Mittelpunkt *o*. Um einen günstigeren Durchschnitt zu erhalten, kann man den Durchmesser *Gw* benützen.

$oR (\| MN)$ und $oQ (\| Gn)$ bilden die Asymptoten und *S* ist ein Scheitel der Hyperbel *c* II *G*.

Wenn die Asymptoten außerhalb der Zeichnungsfläche fallen, oder wenn nur ein kurzes Stück der Schnittcurve dargestellt werden soll, kann man die Hyperbelpunkte als Durchschnitte der Erzeugenden mit der Ebene *MNm* construiren; um aber die Hyperbel möglichst genau ziehen zu können, wird man auch einzelne Tangenten derselben darstellen.

Soll etwa der Durchschnittspunkt III der Erzeugenden *kK* mit der Ebene *MNm* dargestellt werden, so lege man durch die Geraden *kK* und *Gg* eine Ebene *kKg*; diese schneidet die Ebene *agmn* in einer mit *kK* parallelen Geraden *g* 3, die Trace *mn* in dem Punkte 3 und die Ebene *MNm* in der Geraden 3 *G*; folglich schneiden sich die Geraden *kK* und 3 *G* in dem verlangten Punkte III.

Legt man durch *kK* und *cC* eine Ebene, so schneidet sie die Ebene *AGM* in der zu *kK* Parallelen *C*(3), die Trace *MN* in dem Punkte (3) und daher die Ebene *MNm* in der Geraden *c*(3); dann ergibt sich der Punkt III im Durchschnitte der Geraden *kK* und *c*(3).

Um die dem Hyperbelpunkte III entsprechende Tangente *y* III zu finden, ist durch III die Erzeugende *p* III *P* zu ziehen $(ep : pf = EP : PF = E\text{III} : \text{III}\varphi)$, durch *kK* und *pP* eine Ebene zu legen, welche also im Punkte III das Paraboloid berührt und die Ebene *MNm* nach der Tangente *y* III schneidet. Die Ebene *kKpP* schneidet die Ebenen *agm*, *AGM* in den zu *kK* Parallelen *py*, *P*(*y*), die Tracen *mn*, *MN* in den Punkten *y*, (*y*) und folglich die Ebene *MNm* nach der Tangente *y* III (*y*).

Ebenso einfach können die Durchschnittspunkte der Erzeugenden des zweiten Systemes mit der Ebene *MNm* construirt werden.

Um etwa den Durchschnittspunkt II der Erzeugenden eE mit MNm darzustellen, lege man durch Ee und ag die Ebene Eeg; Eeg schneidet die Ebene AGM in der zu ag Parallelen $E2$, die Trace MN in dem Punkte 2 und folglich die Ebene MNm in der Geraden $c2$. $c2$ und Ee treffen sich in dem Punkte II.

Weil die Erzeugenden kK und eE sich schneiden, so können die Punkte II, III auch mittelst der Durchschnittslinie $z(z)$ der Ebene MNm und der durch die beiden Erzeugenden eE, kK gelegten Ebene auf einmal gefunden werden. Zu dem Behufe hat man die mit kK Parallelen ez, $E(z)$ bis z in mn und (z) in MN und nachher $z(z)$ zu ziehen. $z(z)$ schneidet eE in II und kK in III.

15. Construction des parabolischen Schnittes saG des Paraboloides $agAG$ Fig. 12 mit der Ebene $MNmn$.

Man ziehe $cx \| AG$, $Gx \| cC$ und lege die Ebenen cgx, gGx, welche also beziehungsweise mit den Erzeugenden $AG, \ldots lL$ und $aA, \quad . fF$ parallel sind. Die Durchschnittslinie gx der Ebenen cgx und gGx bezeichnet die Richtung der Axe des Paraboloides sowie auch jene der Axen aller parabolischen Schnitte dieser Fläche.

Weil die Ebene MNm die Ebenen cgx und gGx in den zu gx parallelen Geraden MN, mn schneidet; so ist die fragliche Durchschnittscurve saG eine Parabel, deren Axe sz eine mit gx parallele Lage hat. a, G sind Punkte dieser Parabel.

Zum Behufe der Bestimmung des Parabel-Scheitels s legen wir durch die Erzeugenden ga, aA die Ebene gaA, welche das Paraboloid in dem Punkte a berührt, die Ebene MGA in der zu ag Parallelen At und die Ebene MNm in der Geraden ta schneidet; ta ist also eine Tangente der Parabel. Ebenso bestimmen wir die Parabel-Tangente nG, nämlich als Durchschnitt der das Paraboloid in dem Punkte G berührenden Ebene gGA und der Ebene MNm; $gn \| AG$. Dann errichten wir $aN \perp MN$, $Gm \perp mn$, halbiren die Strecke tN in u sowie mn in r und ziehen die Geraden uas, Grs, deren Durchschnittspunkt s der Parabel-Scheitel ist. Die Tangenten ta und nG schneiden sich in dem Punkte T und der Parabel-Durchmesser Tw geht durch den Mittelpunkt w der Sehne aG. Die Gerade Gs könnte also auch dadurch gefunden werden, daß man durch den Mittelpunkt w der Sehne aG den Durchmesser m_1wT bis zum Durchschnitte m_1 mit der

Geraden Gm zieht, die Strecke Tm_1 in r_1 halbirt und dann Gr_1 bis s verlängert.

Zusätze. *a.* Die Berührungslinie des Paraboloides mit einer dasselbe umhüllenden Kegelfläche ist eine Hyperbel, deren Ebene E durch die Berührungspunkte dreier durch den Kegelscheitel λ an das Paraboloid gelegten Tangenten oder Berührungsebenen bestimmt werden kann.

Der folgende Vorgang zur Bestimmung der Ebene E ist ähnlich dem in Art. 6 angegebenen.

Man ziehe die zu gG parallele Gerade λrR und bestimme ihre Durchschnitte r, R mit den Ebenen agn und AGN; $rR \# gG$; ferner ziehe man die zu gx parallelen Durchschnitte rk und RK der zu der Richtungsebene gGx parallelen Ebene λRK mit den Ebenen agn und AGN.

Es treffen sich die Geraden rk, ag in k; RK, AG in H; rk, λH in h und RK, λk in K.

Die Ebene λag schneidet die Ebene AGN in der zu ag Parallelen KI, die Erzeugende AG in dem Punkte I und das Paraboloid außer in ag auch noch in der Geraden I 1; folglich berührt sie das Paraboloid in dem gemeinschaftlichen Punkte I von ag, 1 I. Die Ebene λAG schneidet die Ebene agn in der zu AG Parallelen h 2 die Erzeugende ag in 2 und das Paraboloid außer in AG auch noch in der Erzeugenden 2 II; daher berührt sie das Paraboloid in dem Begegnungspunkte II von AG, 2 II.

Die Erzeugende kH liegt in der Richtungsebene λrk, weßhalb die Hyperbel-Ebene E mit kH parallel ist.

Zieht man also I $(n) \# kH$, 2 (n) und nachher I $(N) \| 2\,(n)$; so bilden I (N), 2 (n) die Durchschnitte der Hyperbelebene mit den Ebenen $AG(N)$ und $ag(n)$. Nun kann die Hyperbel auf die in Art. 14 besprochene Weise construirt werden; ihre Asymptoten sind parallel mit den Geraden kH, 2 (n).

Für eine vom Punkte λ ausgehende Beleuchtung ist diese Hyperbel die Grenze des Selbstschattens des Paraboloides.

b. Die Berührungslinie des Paraboloides mit einer dasselbe umhüllenden, zu der Geraden lL parallelen Cylinderfläche ist eine Parabel, deren Ebene E also mit der Durchschnittslinie gx der Richtungsebenen agn und gGx parallel ist. Um E zu bestimmen, braucht man nur die Berührungspunkte von zwei mit lL parallelen

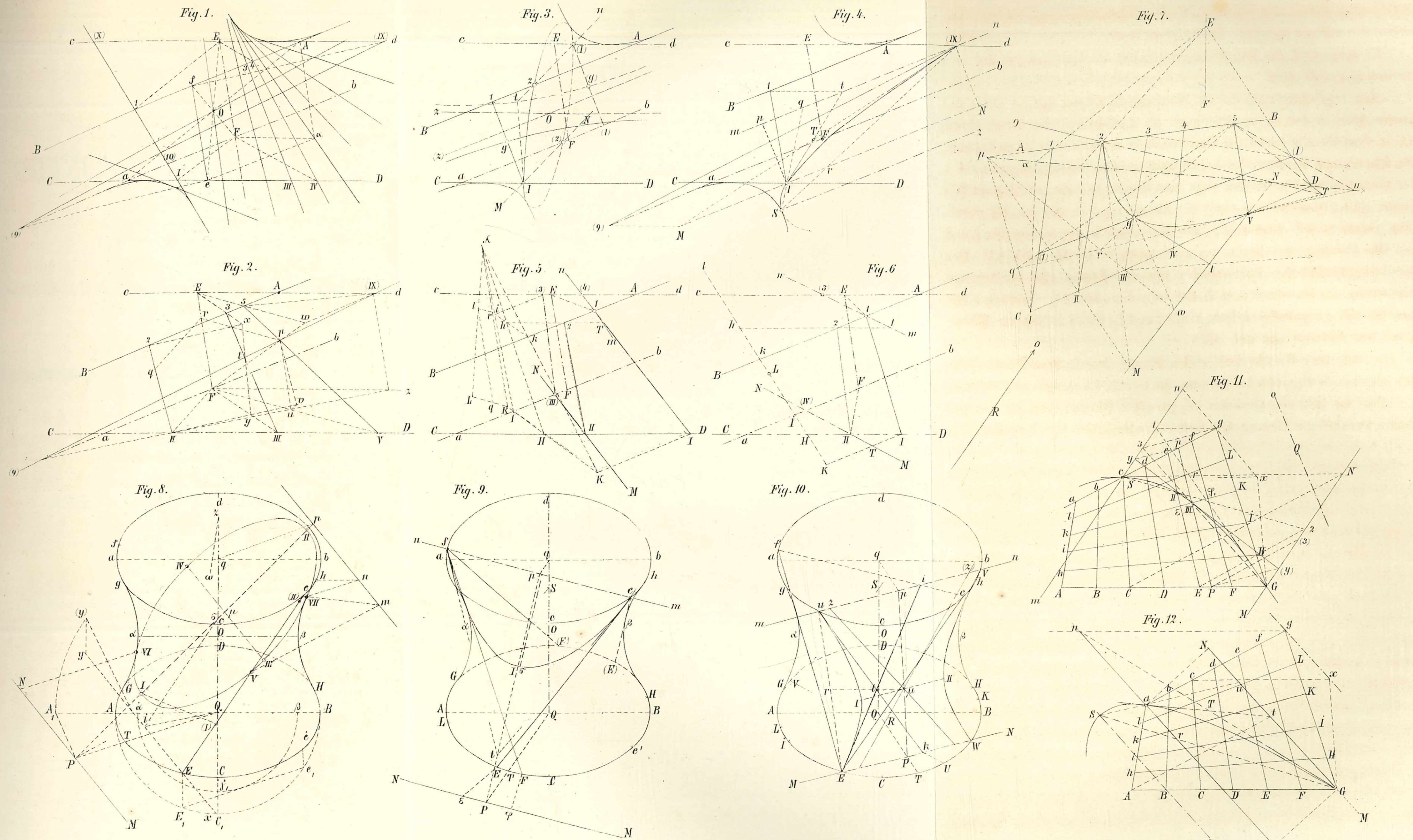
Berührungsebenen des Paraboloides aufzusuchen, und durch dieselben die mit gx parallele Ebene E zu legen.

Es seien l, L die Durchschnittspunkte der Geraden lL mit den Ebenen agn und AGN.

Man lege durch ag die zu lL parallele Ebene agK, welche die Ebene AGx in der zu ag Parallelen KI $(gK \# lL)$, die Erzeugende AG in dem Punkte I und das Paraboloid in der Geraden I1 schneidet. Die Ebene agK berührt das Paraboloid in dem Begegnungspunkte 1 der Geraden ag, I1. Ferner lege man durch AG die zu lL parallele Ebene AGh; dieselbe schneidet die Ebene agx in der zu AG parallelen Geraden h2 $(Gh \# lL)$, die Erzeugende ag in dem Punkte 2 und das Paraboloid außer in ag auch noch in der Geraden 2II. Der Berührungspunkt des Paraboloides mit der Ebene agh ergibt sich also wieder im Durchschnitte II der Geraden AG, 2II. Endlich ziehe man die mit gx parallelen Durchschnitte 1(n) und II(N) der Ebene E mit den Ebenen agn und AGN.

Die aus dem Durchschnitte der Ebene E mit dem Paraboloide sich ergebende Parabel kann nun nach Art. 15 dargestellt werden.

Für die mit der Geraden lL parallele Beleuchtung ist die genannte Parabel die Grenze des Selbstschattens des Paraboloides.



R. Niemtschik constr.

A. d. k. k. Hof u. Staatsdruckerei

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1870

Band/Volume: 61_2

Autor(en)/Author(s): Niemtschik Rudolf

Artikel/Article: Einfache Constructionen windschiefer Hyperboloide und Paraboloide mit ihren ebenen Schnitten und Selbstschatten. 381-402