Transformation und Bestimmung des dreifachen Integrals

$$\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2},\ \alpha x+\beta y+\gamma z\right) dx\, dy\, dz.$$

Von **Franz Unferdinger,**

Lehrer der Mathematik an der öffentlichen Oberrealschule am hohen Markt in Wien.

(Mit 11 Holzschnitten.)

Einleitung.

Im LXI. Band der Sitzungsberichte pag. 105 haben wir durch Einführung neuer Variabeln das dreifache Integrale

$$\iiint F\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\alpha x+\beta y+\gamma z\right) dx\ dy\ dz,$$

in welchem F eine beliebige Function, α, β, γ Constante bezeichnen, mit drei Grenzbedingungen auf ein bestimmtes Doppelintegrale reducirt.

Wir betrachten x, y, z als rechtwinkelige Coordinaten eines Punktes und in dieser geometrischen Auffassung wurden die Integrationen erstreckt auf alle Punkte des Raumes zwischen zwei concentrischen Ellipsoiden, zwei durch ihren Mittelpunkt gehenden und zwei parallelen Ebenen.

Im Folgenden geben wir die Reduction und Bestimmung des ähnlichen im Titel genannten, bisher nicht untersuchten dreifachen Integrals, wenn der Integrationsraum von ein- oder zweitheiligen Hyperboloiden begrenzt wird, während die vier Ebenen dieselben bleiben.

Durch die specielle Annahme $F=1$ gelangen wir zu den Inhaltsbestimmungen des Integrationsraumes und die in diesem Falle erhaltenen Ausdrücke stimmen überein mit den von uns im Jahre 1857 in Grunert's Archiv mitgetheilten, auf anderem Wege gefundenen Resultaten.

§. 1.

Sind x, y, z die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes M im Raume vom Ursprunge O, so bezeichnen die drei folgenden Gleichungen (2), in welchen α, β, γ constante Zahlen sind mit

$$(1) \qquad \rho = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}$$

die Einführung eines neuen Coordinatensystems, dessen Elemente p, r, θ sind.

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha p}{\rho} + \dfrac{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}{\rho} r \sin\theta, \\ y = -\dfrac{\beta p}{\rho} - \dfrac{r}{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}} \left\{ \gamma \cos\theta + \dfrac{\alpha\beta}{\rho} \sin\theta \right\}, \\ z = -\dfrac{\gamma p}{\rho} + \dfrac{r}{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}} \left\{ \beta \cos\theta - \dfrac{\alpha\gamma}{\rho} \sin\theta \right\}. \end{cases}$$

Werden diese Gleichungen der Ordnung nach mit α, β, γ multiplicirt und die entstehenden Producte addirt, so folgt mit Rücksicht auf (1):

$$(3) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = \rho p.$$

Diese Gleichung bedeutet eine Ebene und der Punkt P, dessen Coordinaten im alten System sind:

$$(4) \qquad x_0 = \frac{\alpha p}{\rho}, \; y_0 = -\frac{\beta p}{\rho}, \; z_0 = -\frac{\gamma p}{\rho},$$

liegt in dieser Ebene. Bezeichnet q die Entfernung derselben vom Ursprung O, so ist mit

$$(5) \qquad \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

ihre Gleichung;

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta q,$$

mithin

$$(6) \qquad p = \frac{\delta}{\rho} q;$$

p ist also ein bestimmtes Vielfaches des Abstandes q und für alle Punkte $(x y z)$ der Ebene (3) hat p denselben Werth.

Werden die Gleichungen (2) quadrirt und die zwei letzten derselben von der ersten subtrahirt, so zeigt sich nach einiger Rechnung:

$$x^2 - y^2 - z^2 = p^2 - r^2 \tag{7}$$

und in ähnlicher Weise wird:

$$-(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2; \tag{8}$$

r bezeichnet also den Halbmesser des Kehlkreises eines gleichseitigen eintheiligen Hyperboloides, welches durch den Punkt $(x y z)$ geht und dessen Mittelpunkt P ist.

Bezeichnen x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Berührungspunktes einer das gleichseitige zweitheilige Hyperboloid:

$$x^2 - y^2 - z^2 = 1 \tag{9}$$

tangirenden Ebene, welche zu jener (3) parallel ist, so ist deren Gleichung:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \rho, \tag{10}$$

mit der Bedeutung von ρ aus (1) und

$$x_1 = \frac{\alpha}{\rho}, \quad y_1 = -\frac{\beta}{\rho}, \quad z_1 = -\frac{\gamma}{\rho}. \tag{11}$$

Der Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ liegt also offenbar auf dem Strahl OP und letzterer ist der Ort der Mittelpunkte aller elliptischen Schnitte des zweitheiligen Hyperboloides (9) parallel zur Ebene (3); von welcher Bemerkung später Gebrauch gemacht wird.

§. 2.

Durch die Elimination von p aus der ersten und zweiten Gleichung in (2) und ebenso aus der ersten und dritten, aus der zweiten und dritten folgt:

$$(12)\quad \begin{cases} \beta x + \alpha y = -\dfrac{\alpha\gamma\cos\theta + \beta\rho\sin\theta\, r}{\sqrt{\alpha^2-\rho^2}}, \\[2ex] \gamma x + \alpha z = \dfrac{\alpha\beta\cos\theta + \gamma\rho\sin\theta}{\sqrt{\alpha^2-\rho^2}}\, r, \\[2ex] \beta z - \gamma y = \sqrt{\alpha^2-\rho^2}.\, r\cos\theta. \end{cases}$$

Eliminirt man $\cos\theta$ aus den zwei ersten der so entstandenen Gleichungen, so ergibt sich:

$$(13)\qquad \beta(\beta x + \alpha y) + \gamma(\gamma x + \alpha z) = -\rho\sqrt{\alpha^2-\rho^2}.\, r\sin\theta$$

und durch Division mit der dritten Gleichung in (12):

$$(14)\qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\beta(\beta x + \alpha y) + \gamma(\gamma x + \alpha z)}{\rho(\gamma y - \beta z)}.$$

Werden die Gleichungen (12) quadrirt und von der Summe der zwei ersten die letzte subtrahirt, so zeigt sich:

$$(15)\qquad \rho r = \sqrt{(\beta x + \alpha y)^2 + (\gamma x + \alpha z)^2 - (\beta z - \gamma y)^2}$$

und mit Anwendung des hieraus folgenden Werthes von r gibt die Gleichung (13) und die letzte in (12) beziehungsweise:

$$(16)\quad \begin{cases} \sin\theta = -\dfrac{\beta(\beta x + \alpha y) + \gamma(\gamma x + \alpha z)}{\sqrt{(\alpha^2-\rho^2)\{(\beta x + \alpha y)^2 + (\gamma x + \alpha z)^2 - (\beta z - \gamma y)^2\}}}, \\[3ex] \cos\theta = \dfrac{\rho(\beta z - \gamma y)}{\sqrt{(\alpha^2-\rho^2)\{(\beta x + \alpha y)^2 + (\gamma x + \alpha z)^2 + (\beta z - \gamma y)^2\}}}. \end{cases}$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $\operatorname{tg}\theta$ mit t, so kann die Gleichung (14) auch in folgender Form geschrieben werden:

$$(17)\qquad (\alpha^2-\rho^2)x + (\alpha\beta - \gamma\rho t)y + (\alpha\gamma + \beta\rho t)z = 0$$

und diese bezeichnet eine durch den Ursprung O gehende Ebene. Für alle Punkte (xyz) in dieser Ebene hat θ denselben Werth.

Da die Werthe von x_0, y_0, z_0 aus (4) die Gleichung (17) identisch erfüllen, so liegt der Punkt P in dieser Ebene, dieselbe geht also durch den Strahl OP.

Setzt man $\theta=0$, also auch $t=0$, so verwandelt sich die Gleichung (17) in folgende:

$$(18)\qquad (\alpha^2-\rho^2)x+\alpha\beta y+\alpha\gamma z=0,$$

für alle Punkte (xyz) in der hiermit bezeichneten Ebene ist $\theta=0$. Der Durchschnitt derselben mit der Ebene der yz ist zu jenem der Ebene (3) parallel.

§. 3.

Bezeichnen λ, μ, ν die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche eine in O auf die Ebene (17) errichtete Senkrechte mit den positiven Halbaxen der x, y, z einschließt, so findet man nach den Lehren der analytischen Geometrie des Raumes nach kurzer Rechnung:

$$(19)\qquad \begin{cases} \cos\lambda=\dfrac{\alpha^2-\rho^2}{\sqrt{(\alpha^2-\rho^2)(\delta^2+\rho^2t^2)}}, \\ \cos\mu=\dfrac{\alpha\beta-\gamma\rho t}{\sqrt{(\alpha^2-\rho^2)(\delta^2+\rho^2t^2)}}, \\ \cos\nu=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\rho t}{\sqrt{(\alpha^2-\rho^2)(\delta^2+\rho^2t^2)}} \end{cases}$$

und für $t=0$ folgen hieraus die Werthe der analogen Winkel λ_0, μ_0, ν_0 für die Ebene (18):

$$(20)\qquad \begin{cases} \cos\lambda_0=\dfrac{\alpha^2-\rho^2}{\delta\sqrt{\alpha^2-\rho^2}}, \\ \cos\mu_0=\dfrac{\alpha\beta}{\delta\sqrt{\alpha^2-\rho^2}}, \\ \cos\nu_0=\dfrac{\alpha\gamma}{\delta\sqrt{\alpha^2-\rho^2}}. \end{cases}$$

Bezeichnet η den Winkel zwischen den Ebenen (17) und (18), so ist:

$$\cos\eta = \cos\lambda\cos\lambda_0 + \cos\mu\cos\mu_0 + \cos\nu\cos\nu_0 = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2+\rho^2t^2}}$$

und man findet hieraus:

$$\text{(21)} \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\delta}{\rho}\operatorname{tg}\eta,$$

durch diese Gleichung wird die Beziehung festgestellt, in welcher der neue Coordinatenwinkel θ zum Neigungswinkel der Ebenen (17) und (18) steht[1]).

§. 4.

Nach diesen Vorbereitungen schreiten wir zur Transformation des folgenden dreifachen Integrals, in welchem F eine beliebige Function bezeichnet, α, β, γ constante Zahlen sind und die Grenzen noch offen gelassen werden:

$$\text{(22)} \qquad u = \iiint F(x^2-y^2-z^2,\ \alpha x+\beta y+\gamma z)\,dx\,dy\,dz.$$

Führt man statt x, y, z drei neue Veränderliche p, r, θ ein, im Sinne der Gleichungen (2), so ist nach Lagrange $dx\,dy\,dz$ zu ersetzen durch $\Omega\,dp\,dr\,d\theta$, wobei:

(23)

$$\Omega = \frac{dx}{dp}\left(\frac{dy}{dr}\frac{dz}{d\theta}-\frac{dy}{d\theta}\frac{dz}{dr}\right)+\frac{dy}{dp}\left(\frac{dz}{dr}\frac{dx}{d\theta}-\frac{dz}{d\theta}\frac{dx}{dr}\right)+\frac{dz}{dp}\left(\frac{dx}{dr}\frac{dy}{d\theta}-\frac{dx}{d\theta}\frac{dy}{dr}\right);$$

nun geben die Gleichungen (2) unmittelbar:

---

1) Bezeichnet ζ den Winkel am Punkt P in der Ebene (3), welchen die Durchschnitte derselben mit den Ebenen (17) und (18) unter sich einschließen, so besteht auch die Relation:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\rho}{\delta}\operatorname{tg}\zeta$$

und nennt man ω den Winkel bei O in der Ebene yz, welche die Durchschnitte der letzteren mit den Ebenen (17) und (18) einschließen, so ist:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\alpha}{\rho}\operatorname{tg}\omega.$$

$$(24)\qquad \frac{dx}{dp}=\frac{\alpha}{\rho},\ \frac{dy}{dp}=-\frac{\beta}{\rho},\ \frac{dz}{dp}=-\frac{\gamma}{\rho}$$

und die Differenziation der Gleichungen (3) und (7) nach r führt auf die Beziehungen:

$$\alpha\frac{dx}{dr}+\beta\frac{dy}{dr}+\gamma\frac{dz}{dr}=0,$$

$$x\frac{dx}{dr}-y\frac{dy}{dr}-z\frac{dz}{dr}=-r,$$

aus welchen folgt:

$$(25)\qquad \begin{cases}\dfrac{dy}{dr}=-\dfrac{\gamma x+\alpha z}{\beta z-\gamma y}\cdot\dfrac{dx}{dr}-\dfrac{\gamma r}{\beta z-\gamma y},\\[2ex] \dfrac{dz}{dr}=\dfrac{\beta x+\alpha y}{\beta z-\gamma y}\cdot\dfrac{dx}{dr}+\dfrac{\beta r}{\beta z-\gamma y}.\end{cases}$$

Die Differenziation der Gleichungen (2) nach θ gibt wieder unmittelbar:

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{\sqrt{\alpha^2-\rho^2}}{\rho}\gamma\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{r}{\sqrt{\alpha^2-\rho^2}}\left\{\gamma\sin\theta-\frac{\alpha\beta}{\rho}\cos\theta\right\},$$

$$\frac{dz}{d\theta}=-\frac{r}{\sqrt{\alpha^2-\rho^2}}\left\{\beta\sin\theta+\frac{\alpha\gamma}{\rho}\cos\theta\right\},$$

oder mit Anwendung der Gleichungen (12):

$$(26)\qquad \begin{cases}\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\beta z-\gamma y}{\rho},\\[2ex] \dfrac{dy}{d\theta}=-\dfrac{\gamma x+\alpha y}{\rho},\\[2ex] \dfrac{dz}{d\theta}=-\dfrac{\beta x+\alpha y}{\rho}.\end{cases}$$

Durch Substitution der Werthe aus (25) und (26) erhält man nach einfacher Rechnung:

$$(27)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dr}\dfrac{dz}{d\theta}-\dfrac{dy}{d\theta}\dfrac{dz}{dr}=\dfrac{\alpha r}{\rho}, \\ \dfrac{dz}{dr}\dfrac{dx}{d\theta}-\dfrac{dz}{d\theta}\dfrac{dx}{dr}=\dfrac{\beta r}{\rho}, \\ \dfrac{dx}{dr}\dfrac{dy}{d\theta}-\dfrac{dx}{d\theta}\dfrac{dy}{dr}=\dfrac{\gamma r}{\rho}, \end{cases}$$

hiermit wird mit Benützung der Gleichungen (24) und mit Rücksicht auf (1):

$$(28)\qquad \Omega=r.$$

Das dreifache Integrale (22) verwandelt sich durch die Einführung der neuen Variabelen p, r, θ hiermit in folgendes:

$$(29)\qquad u=\iiint F(p^2-r^2,\ \rho p)\ dp\,.\,rdrd\theta.$$

§. 5.

Damit u einen bestimmten Werth erlangt, setzen wir fest, daß die drei Integrationen in (22) auf alle positiven und negativen Werthe von x, y, z erstreckt werden sollen, welche zugleich die Bedingungen erfüllen:

$$(30)\qquad \begin{cases} \varepsilon_0^2 < x^2-y^2-z^2 < \varepsilon_1^2, \\ g_0\rho < \alpha x+\beta y+\gamma z < g_1\rho\,, \\ t_0 < \dfrac{\beta(\beta x+\alpha y)+\gamma(\gamma x+\alpha z)}{\rho(\gamma y-\beta z)} < t_1, \end{cases}$$

in welchen ε_0, ε_1, g_0, g_1 positive Constante, t_0, t_1 beliebige Constante bezeichnen sollen.

Geometrisch heißt dieses, die Integrationen sind auf alle Punkte (xyz) des Raumes auszudehnen, welche enthalten sind zwischen den beiden zweitheiligen gleichseitigen Hyperboloiden:

$$(31)\qquad x^2-y^2-z^2=\varepsilon_0{}^2,$$

$$(32)\qquad x^2-y^2-z^2=\varepsilon_1{}^2,$$

zwischen den beiden parallelen Ebenen:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = g_1 \rho \,, \tag{33}$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = g_0 \rho \tag{34}$$

und zwischen den beiden durch den Ursprung gehenden Ebenen:

$$\left\{\begin{aligned} &(\alpha^2 - \rho^2)x + (\alpha\beta - \gamma\rho t_1)y + (\alpha\gamma + \beta\rho t_1)z = 0, \\ &(\alpha^2 - \rho^2)x + (\alpha\beta - \gamma\rho t_0)y + (\alpha\gamma + \beta\rho t_0)z = 0. \end{aligned}\right. \tag{35}$$

Da $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ so liegt das zweite Hyperboloid im Innern des ersten. Da g_0, g_1 positiv vorausgesetzt werden, so liegen beide Parallelebenen auf derselben Seite des Ursprungs und da $g_0 < g_1$, so liegt die Ebene (34) näher am Ursprung als jene (33).

Damit ρ einen reelen Werth erhält, müssen die Constanten α, β, γ in den Gleichungen (33), (34) der parallelen Grenzebenen nach (1) die Bedingung erfüllen:

$$\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 > 0 \tag{36}$$

d. h. geometrisch diese Grenzebenen müssen eine solche Richtung haben, welche an den Hyperboloiden (31), (32) elliptische Schnitte erzeugt.

Die Gleichungen der Grenzebenen (35) folgen aus jener (17) für $t = t_1$, $t = t_0$, folglich gehen diese Ebenen durch den Strahl OP, auf welchem nach §. 1 der Berührungspunkt $(x_1\ y_1\ z_1)$ der Ebene (10) mit dem Hyperboloid (9) liegt.

Diese Durchschnittslinie der Keilebenen (35) geht durch die Berührungspunkte der die Hyperboloide (31), (32) tangirenden Ebenen, welche parallel zu den Grenzebenen (33), (34) sind, weil die Hyperboloide (31), (32) mit jenem (9) concentrisch, gleichliegend und ähnlich sind.

§. 6.

Die Gleichungen (7), (3), (14) geben nun nach (30) als Grenzbedingungen für die neuen Variabeln p, r, θ:

$$\left\{\begin{aligned} &\varepsilon_0^2 < p^2 - r^2 < \varepsilon_1^2, \\ &g_0 < p < g_1, \\ &\theta_0 < \theta < \theta_1, \end{aligned}\right. \tag{38}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$(39)\qquad \theta_0 = \text{arc.}\operatorname{tg} t_0, \qquad \theta_1 = \text{arc.}\operatorname{tg} t_1.$$

Um die Grenzbedingungen für das transformirte Integrale (29) in Integrationsgrenzen zu übersetzen, ist die Unterscheidung dreier Fälle nothwendig, je nachdem:

$$(40)\quad \begin{cases} g_1 > \varepsilon_0, \; g_0 > \varepsilon_0, \\ g_1 > \varepsilon_1, \; g_0 > \varepsilon_1, \end{cases} \begin{cases} g_1 > \varepsilon_0, \; g_0 > \varepsilon_0, \\ g_1 > \varepsilon_1, \; g_0 < \varepsilon_1, \end{cases} \begin{cases} g_1 > \varepsilon_0, \; g_0 > \varepsilon_0, \\ g_1 < \varepsilon_1, \; g_0 < \varepsilon_1. \end{cases}$$

Die Bedingungen der ersten Horizontalzeile sind durchaus dieselben und sind nothwendig, damit beide Parallelebenen (33), (34) das äußere Hyperboloid (31) schneiden. Die Unterscheidung dreier Fälle in (40) liegt in der zweiten Horizontalzeile; im ersten Fall schneiden beide Ebenen (33), (34) beide Hyperboloide, im zweiten Fall schneidet nur die erste Ebene (33) beide Hyperboloide und im dritten Fall schneiden beide Ebenen nur das äußere Hyperboloid (31).

Aus der ersten Grenzbedingung in (38) folgt:

$$(41)\qquad \sqrt{p^2 - \varepsilon_0^2} > r > \sqrt{p^2 - \varepsilon_1^2}$$

und da immer $g_0 < p < g_1$, so sind im ersten Fall die Grenzen für r durchaus reel erfüllbar, mithin ist nach Integration in Bezug auf θ:

$$(42)\quad u = (\theta_1 - \theta_0) \int_{g_0}^{g_1} \int_{\sqrt{p^2-\varepsilon_1^2}}^{\sqrt{p^2-\varepsilon_0^2}} F(p^2 - r^2, \rho p)\, dp \,.\, r\, dr, \; g_1 > \varepsilon_1, \; g_0 > \varepsilon_1.$$

Im zweiten Fall, welcher $g_1 > \varepsilon_1$, $g_0 < \varepsilon_1$ entspricht, theilen wir das Intervall nach p im Sinne der Relationen:

$$\varepsilon_1 < p < g_1, \; g_0 < p < \varepsilon_1;$$

im ersten Theil sind die Grenzbedingungen (41) für r durchaus reel erfüllbar, im zweiten Theil ist $\sqrt{p^2 - \varepsilon_1^2}$ beständig imaginär und die reelen Grenzen für r sind also:

$$0 < r < \sqrt{p^2 - \varepsilon_0^2}.$$

Hiernach wird mit Integration nach θ:

(43)

$$u=(\theta_1-\theta_0)\left\{\int_{\varepsilon_1}^{g_1}\int_{\sqrt{p^2-\varepsilon_1^2}}^{\sqrt{p^2-\varepsilon_0^2}} F(p^2-r^2, \rho p)dp.rdr+\int_{g_0}^{\varepsilon_1}\int_0^{\sqrt{p^2-\varepsilon_0^2}} F(p^2-r^2, \rho p)dp.rdr\right\},$$

$$g_1>\varepsilon_1, \quad g_0<\varepsilon_1.$$

Im dritten Fall ist $\sqrt{p^2-\varepsilon_1^2}$ durchaus imaginär, daher sind die reelen Grenzen für r:

$$0<r<\sqrt{p^2-\varepsilon_0^2}$$

und man erhält, wenn wieder nach θ integrirt wird:

$$(44) \quad u=(\theta_1-\theta_0)\int_{g_0}^{g_1}\int_0^{\sqrt{p^2-\varepsilon_0^2}} F(p^2-r^2,\rho p)\,dp\,.rdr, \; g_1<\varepsilon_1,\; g_0<\varepsilon_1.$$

Durch die Gleichungen (42), (43), (44) wird das dreifache Integrale (22) mit den Veränderlichen x, y, z und den Grenzbedingungen (30) immer auf ein bestimmtes Doppelintegrale nach p und r reducirt.

Da in dieser Integration der Leitstrahl r durchaus positiv genommen wird, so beziehen sich die schließlich erhaltenen Werthe des Integrals u nur auf einen der verschiedenen Keilräume, welche die beiden Grenzebenen (35) formiren. Bei der periodischen Eigenschaft der Function $\operatorname{tg}\theta$ gestatten die Gleichungen $\operatorname{tg}\theta_0=t_0$, $\operatorname{tg}\theta_1=t_1$ verschiedene Auflösungen und die obigen Formeln beziehen sich auf jenen Keilraum, welcher dem für θ_0, θ_1 acceptirten Werthpaar entspricht. Ist x, y, z ein Werthsystem, welches der letzten Bedingung in (30) entspricht, so leistet auch $-x$, $-y$, $-z$ Genüge, aber letzteres Werthsystem entspricht der Integration nach θ von

$$\theta_0=\pi+\text{arc. tg}\, t_0 \quad \text{bis} \quad \theta_1=\pi+\text{arc. tg}\, \theta_1$$

deren Intervall dem obigen gleich ist. Soll also die Integration alle reelen Werthe von x, y, z umfassen, welche die Bedingungen (30) erfüllen, so sind die für das Integrale u erhaltenen Ausdrücke noch mit 2 zu multipliciren.

§. 7.

Um diese Resultate auf das allgemeinere Integrale, in welchem a, b, c positive Constante bezeichnen:

$$(45) \qquad W = \iiint F\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2},\ \alpha x + \beta y + \gamma z\right) dx\, dy\, dz$$

in Anwendung zu bringen, ersetzen wir in (22) und (30) x, y, z durch neue Variabele $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}$ und setzen gleichzeitig überall $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ statt α, β, γ. Die Integrationsbedingungen sind dann folgende:

$$(46) \qquad \begin{cases} \varepsilon_0^2 < \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} < \varepsilon_1{}^2, \\ g_0\rho < \alpha x + \beta y + \gamma z < g_1\rho\,, \\ t_0 < \dfrac{bc\{\beta\,(b^2\beta x + a^2\alpha y) + \gamma\,(c^2\gamma x + a^2\alpha z)\}}{a\rho\,(c^2\gamma y - b^2\beta z)} < t_1 \end{cases}$$

mit

$$(47) \qquad \rho = \sqrt{a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - c^2\gamma^2}$$

und es wird:

$$(48) \qquad W = abc\,.\,u.$$

Der Integrationsraum wird begrenzt von den beiden concentrischen, ähnlichen und gleichliegenden zweitheiligen Hyperboloiden:

$$(49) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon_0{}^2,$$

$$(50) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon_1{}^2,$$

von welchen, wegen $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ das zweite im Innern der ersten liegt; — von den beiden parallelen Ebenen:

$$(33) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = g_1\rho\,,$$

$$(34) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = g_0\rho$$

und von den beiden durch den Ursprung gehenden Ebenen:

$$(51)\begin{cases} bc(a^2\alpha^2-\rho^2)x+ac(a\alpha b\beta-c\gamma\rho t_1)y+ab(a\alpha c\gamma+b\beta\rho t_1)z=0, \\ bc(a^2\alpha^2-\rho^2)x+ac(a\alpha b\beta-c\gamma\rho t_0)y+ab(a\alpha c\gamma+b\beta\rho t_0)z=0. \end{cases}$$

Eine das zweitheilige Hyperboloid:

$$(52) \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

berührende Ebene, welche parallel zu den Grenzebenen (33), (34) ist, hat die Gleichung:

$$(10) \qquad \alpha x+\beta y+\gamma z=\rho,$$

mit der Bedeutung von ρ aus (47). Die Coordinaten des Berührungspunktes sind:

$$(53) \qquad x_1=\frac{a^2\alpha}{\rho}, \quad y_1=-\frac{b^2\beta}{\rho}, \quad z_1=-\frac{c^2\gamma}{\rho};$$

diese Werthe erfüllen die beiden Gleichungen (51) identisch. Die Durchschnittsgerade der durch dieselben dargestellten Ebenen ist also der Strahl vom Ursprung zu dem gedachten Berührungspunkt, übereinstimmend mit der am Schluß des §. 1 gemachten Bemerkung.

Der Winkel θ wird von einer Ebene aus gezählt, deren Gleichung:

$$(54) \qquad (a^2\alpha^2-\rho^2)x+a^2\alpha\beta y+a^2\alpha\gamma z=0$$

aus jenen (51) entsteht für $t=0$.

Die Gleichungen (42), (43), (44) geben nun mit Anwendung der Beziehung (48) für die den Relationen (40) entsprechenden drei Fälle:

(57)

$$W=abc(\theta_1-\theta_0)\cdot\int_{g_0}^{g_1}\int_{\sqrt{p^2-\varepsilon_1^2}}^{\sqrt{p^2-\varepsilon_0^2}}F(p^2-r^2,\rho p)\,dp\,.\,r\,dr,$$

$$W=abc(\theta_1-\theta_0).\{\int_{\varepsilon_1}^{g_1}\int_{\sqrt{p^2-\varepsilon_1^2}}^{\sqrt{p^2-\varepsilon_0^2}}F(p^2-r^2,\rho p)dp.rdr+\int_{g_0}^{\varepsilon_1}\int_{0}^{\sqrt{p^2-\varepsilon_0^2}}F(p^2-r^2,\rho p)dp.rdr\},$$

$$W=abc(\theta_1-\theta_0).\int_{g_0}^{g_1}\int_{0}^{\sqrt{p^2-\varepsilon_0^2}}F(p^2-r^2,\rho p)\,dp\,.\,r\,dr.$$

Für den Integrationsraum, welcher der ersten Gleichung entspricht, schneiden beide Parallelebenen (33), (34) beide Hyperboloide (49), (50). Für den Integrationsraum der zweiten Gleichung schneidet nur die Ebene (33) beide Hyperboloide. Die dritte Gleichung gehört zu jenem Integrationsraum, dessen Parallelebenen (33), (34) nur das äußere Hyperboloid (49) schneiden und dem entsprechend ist der Ausdruck für W in diesem Fall unabhängig von ε_1.

§. 8.

Für $F=1$ in (45) geben die drei Gleichungen (57) den Inhalt des Integrationsraumes. Bezeichnet man denselben entsprechend den drei Fällen (40) mit T_1, T_2, T_3, so wird nach Ausführung der Integrationen:

(58)

$$T_1=\frac{1}{2}abc(\theta_1-\theta_0)(\varepsilon_1^2-\varepsilon_0^2)(g_1-g_0),$$

$$T_2=\frac{1}{6}abc(\theta_1-\theta_0)\{3(\varepsilon_1^2-\varepsilon_0^2)(g_1-\varepsilon_1)+(\varepsilon_1^3-g_0^3)-3\varepsilon_0^2(\varepsilon_1-g_0)\},$$

$$T_3=\frac{1}{6}abc(\theta_1-\theta_0)\{(g_1^3-g_0^3)-3\varepsilon_0^2(g_1-g_0)\}.$$

Fig. 1.

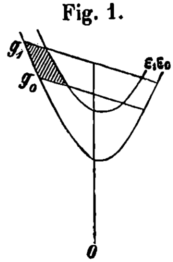


Fig. 2.

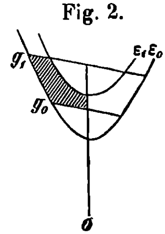
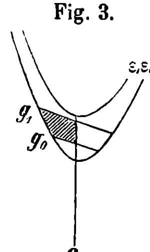


Fig. 3.



Die schematischen Figuren 1, 2, 3 zeigen die verschiedenen Begrenzungen der durch diese Formeln bestimmten Räume.

Mit $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$ geben die Gleichungen (58) den Raum t zwischen dem zweitheiligen Hyperboloid:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon^2, \tag{59}$$

dem zugehörigen Asymptotenkegel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{60}$$

und den vier Ebenen (33), (34), (51). Man erhält entsprechend den drei Fällen (40):

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{2}\, abc\,(\theta_1 - \theta_0)\,(g_1 - g_0)\,\varepsilon^2, \\ t_2 = \frac{1}{6}\, abc\,(\theta_1 - \theta_0)\,\{3\,\varepsilon^2 g_1 - 2\,\varepsilon^3 - g_0{}^3\}, \\ t_3 = \frac{1}{6}\, abc\,(\theta_1 - \theta_0)\,(g_1{}^3 - g_0{}^3). \end{cases} \tag{61}$$

Fig. 4.

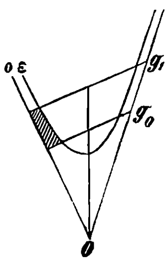


Fig. 5.

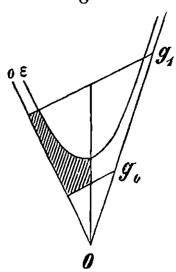
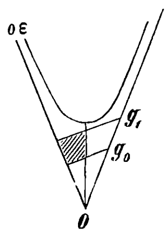


Fig. 6.



Die schematischen Figuren 4, 5, 6 zeigen die Gestalt der hiermit bestimmten Räume.

§. 9.

Setzt man in der letzten Gleichung in (58) $\theta_1 = 2\pi$, $\theta_0 = 0$, $\varepsilon_0 = 1$, so erhält man den Inhalt Sch_2 einer Schichte des zweitheiligen Hyperboloides:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{52}$$

zwischen den parallelen Ebenen (33), (34) und zwar wird:

$$(62) \qquad Sch_2 = \frac{\pi}{3} abc \{(g_1{}^3 - g_0{}^3) - 3(g_1 - g_0)\}.\text{[1]}$$

Für $g_0 = 1$ wird die Ebene (34) zu einer Berührungsebene des Hyperboloides (52) und die Schichte Sch_2 geht über in das Segment S_2, welches die Ebene:

$$(63) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z = g\rho,$$

von dem Hyperboloid (52) abschneidet und zwar ist, da g für g_1 geschrieben wird:

$$(64) \qquad S_2 = \frac{\pi}{3} abc (g^3 - 3g + 2).$$

Hierbei ist zu erinnern, daß zur Reelität von ρ nach (47) die Bedingung gehört:

$$(65) \qquad a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - c^2\gamma^2 > 0$$

d. h. daß die schneidende Ebene diejenige Richtung hat, welche elliptischen Schnitten entspricht. Die Bedingung $g > 1$ ist noch erforderlich, damit die Ebene das Hyperboloid schneidet.

Die Gleichung einer das Hyperboloid (52) berührenden Ebene, welche parallel zu jener (63) ist, lautet:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \rho,$$

sind q, Q die Entfernungen derselben vom Ursprung, so ist also nach der Theorie der Ebene:

$$g = \frac{q}{Q},$$

diese Gleichung gibt die geometrische Bedeutung von g in der Formel (64).

---

[1]) Dieses Resultat stimmt mit demjenigen überein, welches wir im LX. Band der Sitzungsberichte, II. Abth. p. 656, auf anderem Wege gefunden haben.

Die Ebene (63) ist eine Berührungsebene des mit (52) concentrischen ähnlichen und gleichliegenden Hyperboloides:

(66) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=g^2$$

und da der Ausdruck für S_2 nur von g abhängig ist, nicht aber von α, β, γ, so schneidet jede das Hyperboloid (66) berührende Ebene von jenem (51) ein Segment von gleichem Inhalt ab, welcher letztere durch die Gleichung (64) bestimmt wird [1].

Aus demselben Grunde folgt allgemein, daß die durch die Formeln (58), (61) bestimmten Körperräume für solche Parallelebenen (33), (34), welche beziehungsweise die Hyperboloide

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=g_1^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=g_0^2,$$

berühren, je dieselbe Größe haben.

Setzt man in der zweiten Gleichung (58) $\theta_1=2\pi$, $\theta_0=0$, $g_0=\varepsilon_0=\varepsilon$, $g_1=g$, $\varepsilon_1=1$, so erhält man den Inhalt einer Schale zwischen den beiden Hyperboloiden:

(67) $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=\varepsilon^2, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1 \end{cases}$$

und der Ebene:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=g\rho$$

und zwar wird:

(68) $$Schale=\frac{\pi}{3}abc\,\{3(1-\varepsilon^2)g-2(1-\varepsilon^3)\}.$$

---

[1]) S. Grunert's Archiv Thl. 28, p. 52. Sitzungsberichte, Bd. LX, II. Abth. p. 654.

§. 10.

Wenn das Integrale u in (22) den Bedingungen:

$$(69)\quad \begin{cases} \varepsilon^2 < -x^2 + y^2 + z^2 < 1, \\ \pm g_0 \rho < \alpha x + \beta y + \gamma z < g_1 \rho, \\ t_0 < \dfrac{\beta(\beta x + \alpha y) + \gamma(\gamma x + \alpha z)}{\rho(\gamma y - \beta z)} < t_1 \end{cases}$$

unterliegt, mit der Bedeutung von ρ nach (1), so ist der Integrationsraum begrenzt von den beiden eintheiligen Hyperboloiden:

$$(70)\quad \begin{cases} -x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2, \\ -x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

von den beiden parallelen Ebenen:

$$(71)\quad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = g_1 \rho, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = \pm g_0 \rho, \end{cases}$$

wobei das unterere Zeichen gilt, wenn die Ebenen auf den entgegengesetzten Seiten des Ursprungs liegen — und von den beiden durch den Ursprung gehenden Ebenen (35).

Das auf die Variabeln p, r, θ transformirte Integrale (29) hat nun die Grenzbedingungen:

$$(72)\quad \begin{cases} \varepsilon^2 < r^2 - p^2 < 1, \\ \pm g_0 < p < g_1, \\ \theta_0 < \theta < \theta_1, \end{cases}$$

wenn wieder die Abkürzung (39) angewendet wird; die erste derselben kann durch folgende ersetzt werden:

$$\sqrt{p^2 + \varepsilon^2} < r < \sqrt{p^2 + 1},$$

und diese Bedingung ist durchaus reel nach r erfüllbar, daher wird mit Integration nach θ:

$$(73)\qquad u = (\theta_1 - \theta_0) . \int_{\pm g_0}^{g_1} \int_{\sqrt{p^2+\varepsilon^2}}^{\sqrt{p^2+1}} F(p^2 - r^2,\ \rho p)\ dp . r dr,$$

womit auch in diesem Falle das dreifache Integrale u auf ein bestimmtes Doppelintegrale reducirt ist.

§. 11.

Auch dieses Resultat läßt sich auf die Form:

$$(45)\qquad W = \iiint F\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2},\ \alpha x + \beta y + \gamma z\right) dx\, dy\, dz$$

mit den Integrationsbedingungen:

$$(74)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varepsilon^2 < -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1, \\ \pm g_0 \rho < \alpha x + \beta y + \gamma z < g_1 \rho, \\ t_0 < \frac{bc\{\beta(b^2\beta x + a^2\alpha y) + \gamma(c^2\gamma x + a^2\alpha z)\}}{a\rho(c^2\gamma y - b^2\beta z)} < t_1, \end{array}\right.$$

in der bekannten Weise verallgemeinern, wobei ρ die Bedeutung (47) hat und es wird mit Anwendung der abkürzenden Bezeichnung (39):

$$(75)\qquad W = abc(\theta_1 - \theta_0).\int_{\pm g_0}^{g_1}\int_{\sqrt{p^2+\varepsilon^2}}^{\sqrt{p^2+1}} F(p^2 - r^2,\ \rho p,)\, dp.\, r dr.$$

Der Integrationsraum ist nun begrenzt von den beiden eintheiligen Hyperboloiden:

$$(76)\qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon^2,$$

$$(77)\qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

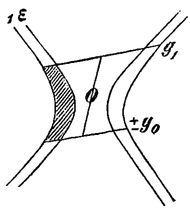
von den beiden parallelen Ebenen (71) und von den durch den Ursprung gehenden Keilebenen (51).

§. 12.

Die specielle Annahme $F = 1$ in (45), (75) gibt den Inhalt S des Integrationsraumes (Fig. 7); werden die Integrationen wirklich ausgeführt, so erhält man:

$$(78) \qquad S = \frac{1}{2} abc(\theta_1 - \theta_0)(1 - \varepsilon^2)(g_1 \mp g_0),$$

Fig. 7.



wobei das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Parallelebenen (71) auf derselben oder auf entgegengesetzter Seite des Ursprungs liegen.

Für das obere Zeichen ist $S = T_1$ in (58) mit $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_0 = \varepsilon$, d. h. die durch die Parallelebenen (33), (34) und durch die Keilebenen (51) aus den eintheiligen Hyperboloiden (76), (77) ausgeschnittenen Körperräume sind den entsprechenden der zweitheiligen Hyperboloide:

$$(59) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon^2,$$

$$(52) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gleich.

Für $\varepsilon = 0$ wird das erste eintheilige Hyperboloid (76) zum Asymptotenkegel des zweiten (77); bezeichnet s das dieser Begrenzung entsprechende Volumen, so folgt aus (78), wenn wieder nur das obere Zeichen genommen wird:

$$(79) \qquad s = \frac{1}{2}(\theta_1 - \theta_0)(g_1 - g_0).$$

Wird dieser Ausdruck zu jenen für t_1, t_2, t_3 in (61) addirt, so erhält man die Summen:

$$(80)\quad \begin{cases} T_1 = \frac{1}{2}\, abc\,(\theta_1 - \theta_0)(1+\varepsilon^2)(g_1 - g_0), \\ T_2 = \frac{1}{6}\, abc\,(\theta_1 - \theta_0)\,\{3(g_1 - g_0) + 3\,\varepsilon^2 g_1 - 2\,\varepsilon^3 - g_0^3\}, \\ T_3 = \frac{1}{6}\, abc\,(\theta_1 - \theta_0)\,\{(g_1^3 - g_0^3) + 3\,(g_1 - g_0)\}. \end{cases}$$

Die hiermit bestimmten Räume sind begrenzt von dem zweitheiligen Hyperboloid:

$$(59)\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon^2,$$

von dem eintheiligen Hyperboloid:

$$(77)\qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

und von den vier Ebenen (33), (34), (51); die drei Formeln für T_1, T_2, T_3 entsprechen den drei Voraussetzungen (40).

Fig. 8.

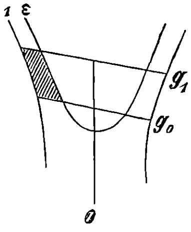


Fig. 9.

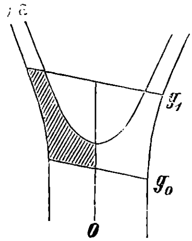
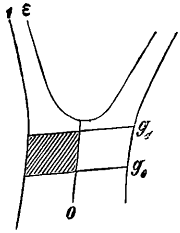


Fig. 10.



Die Figuren 8, 9, 10 zeigen die Schema der hiermit bestimmten Körperräume.

§. 13.

Setzt man in der letzten Formel in (80) $\theta_1 = 2\pi$, $\theta_0 = 0$, $g_0 = 0$, $g_1 = g$ so erhält man den Inhalt v einer Schichte des eintheiligen Hyperboloides:

$$(77)\qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

zwischen den parallelen Ebenen:

$$(81) \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = g\rho, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \end{cases}$$

deren letztere durch den Ursprung geht und zwar wird:

$$(82) \qquad v = \frac{\pi}{3} abc(g^3 + 3g).$$

Die erste der Parallelebenen ist offenbar eine Berührungsebene des zweitheiligen Hyperboloides:

$$(66) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = g^2,$$

weil $\rho = \sqrt{a^2\alpha^2 - b^2\beta^2 - c^2\gamma^2}$ und da v nur von g abhängt, nicht von α, β, γ, so hat das gedachte Volumen für alle solche Berührungsebenen dieselbe Größe[1]). Überhaupt kann man schließen, daß die durch die Ausdrücke (78), (80) bestimmten Volumina für alle solche Grenzebenen (33), (34) dieselbe Größe haben, welche beziehungsweise die zweitheiligen Hyperboloide:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = g_1^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = g_0^2$$

berühren.

§. 14.

Die Giltigkeit der Formeln (80) ist bedingt durch die Voraussetzung, daß g_0 positiv; doch ist es leicht, sich hiervon zu befreien.

So gibt z. B. die Formel für T_2 mit $g_0 = 0$:

$$(83) \qquad t_2 = \frac{1}{6} abc(\theta_1 - \theta_0)\{3(1+\varepsilon^2)g_1 - 2\varepsilon^2\},$$

den Inhalt des Raumes zwischen den Hyperboloiden (59), (77) zwischen den Parallelebenen:

---

[1]) S. Sitzungsberichte, Bd. LX, II. Abth. p. 661.

$$(84)\qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = g_1 \rho, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases}$$

und den Keilebenen (51). Anderseits gibt die dritte Gleichung in (80) mit $g_0 = 0$, $g_1 = g_0$:

$$(85)\qquad t_3 = \frac{1}{6} abc (\theta_1 - \theta_0)(g_0{}^3 + 3 g_0),$$

einen Raum zwischen dem eintheiligen Hyperboloide (77) und den parallelen Ebenen:

$$(86)\qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = g_0 \rho \text{ oder } - g_0 \rho \end{cases}$$

und die Addition von t_2, t_3:

$$(87)\quad t = \frac{1}{6} abc (\theta_1 - \theta_0) . \{3 (g_1 + g_0) + 3 \varepsilon^2 g_1 - 2 \varepsilon^3 + g_0{}^3\},$$

welche Formel sich auf den Rauminhalt eines Körpers (Fig. 11) bezieht, zwischen dem eintheiligen Hyperboloid (77) und der positiven Höhlung des zweitheiligen Hyperboloides (59); zwischen den parallelen Ebenen:

$$(88)\qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = g_1 \rho, \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = -g_0 \rho \end{cases}$$

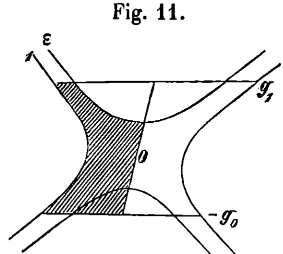
und den Keilebenen (51).

Der Ausdruck (87) folgt auch aus jenem für T_2 in (80), wenn man $-g_0$ an die Stelle von g_0 setzt.

§. 15.

Wie schon aus dem analytischen Sinn eines mehrfachen Integrals hervorgeht, so zeigt auch die vorstehende Untersuchung, daß zur vollständigen Auswerthung desselben, so viele sich nicht völlig widersprechende Bedingungen einzuführen sind, als Veränderliche in demselben vorkommen; wird eine Bestimmung mit weniger Bedingungen erreicht, so gehört dieselbe, wie obige Beispiele zeigen, in das Gebiet der speciellen Fälle.

Fig. 11.



Der Werth der durch die Gleichungen (2) bewirkten Transformation liegt vornehmlich darin, daß sich hierfür nach (28) die Functionsdeterminante Ω auf r reducirt. Diese Substitutionen leisten also für drei Variabele x, y, z denselben Dienst, wie jene mit $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ für zwei.

Denkt man sich den Raum derart mit Materie erfüllt, daß die Dichte derselben an der Stelle (xyz) durch den Werth der Function F gemessen wird, so bezeichnet das Integrale W (45) die Masse des Integrationsraumes.

Durch Anwendung derselben simultanen Substitutionen (2) ist man nun auch im Stande, die Schwerpunkte der im Vorhergehenden behandelten Integrationsräume zu bestimmen, und zwar sowohl für homogene Massen, für welche $F = 1$ ist, als auch bei ungleicher Vertheilung der Dichtigkeit.

Für beliebige Stellungen der Grenzebenen zu den Hauptaxen der Flächen sind unseres Wissens solche Bestimmungen noch nicht versucht worden und in Anbetracht des Nutzens derselben für viele Fragen der mathematischen Physik, sei erlaubt, hierüber später genauer zu berichten.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse

Jahr/Year: 1870

Band/Volume: 61_2

Autor(en)/Author(s): Unferdinger Franz

Artikel/Article: Transformation und Bestimmung des dreifachen Integrals 417-440