Geometrische Mittheilungen.

Von Dr. **Emil Weyr.**

I.

1. Die Verwandtschaftsgleichung zweier ein-zweideutigen Elementargebilde[1]) nimmt eine besonders einfache Gestalt an, wenn man über die Grundelementenpaare der beiden Gebilde zweckmäßig verfügt.

Bezeichnet man mit ξ das Theilverhältniß eines Elementes des eindeutigen Gebildes, genommen bezüglich eines willkürlichen Elementenpaares, und mit η das Theilverhältniß des ihm im zweideutigen Gebilde entsprechenden Elementes bezüglich eines zweiten Elementenpaares, so wird die zwischen den Gebilden bestehende Verwandtschaft durch die Gleichung:

$$\xi(a\eta^2 + b\eta + c) + (a_1\eta^2 + b_1\eta + c_1) = o \qquad (1)$$

näher fixirt.

Jedem Elemente des eindeutigen Gebildes entspricht ein Elementenpaar des zweideutigen, da jedem ξ— Werthe zwei (conjugirte) η— Werthe zukommen.

Die Elementenpaare des zweideutigen Gebildes bilden eine quadratische Involution, wie aus der Verwandtschaftsgleichung (1) sofort hervorgeht.

Es geschieht nun zweimal, daß die beiden Elemente eines solchen Paares zusammenfallen, nämlich in den beiden Doppelelementen der erwähnten Involution, welche wir deßhalb auch die Doppelelemente des zweideutigen Gebildes nennen wollen.

---

[1]) Vergleiche „Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde etc.“ B. G. Teubner, Leipzig 1869. I. Theil Art. 4.

Es seien dies die Elemente v_{12}, w_{12}, denen resp. die Theilverhältnisse ν_{12}, ω_{12} angehören mögen.

Das im Elemente v_{12} vereinigte Elementenpaar wird einem bestimmten Elemente v des eindeutigen Gebildes entsprechen, und ebenso wird einem gewissen Elemente w dieses Gebildes das im Elemente w_{12} vereinigte Elementenpaar des zweideutigen Gebildes entsprechen.

Die Theilverhältnisse der Elemente v, w —, welche wir wohl auch die Verzweigungselemente des eindeutigen Gebildes nennen — mögen beziehungsweise durch ν, ω dargestellt werden.

Bisher haben wir, wie schon Eingangs erwähnt wurde, die Theilverhältnisse der beiden Gebilde auf ganz willkürliche Grundelementenpaare bezogen.

Wir wollen nun zwei Annahmen machen. Erstlich wollen wir uns denken, daß das Elementenpaar (vw) als Grundelementenpaar im eindeutigen auftrete, während gleichzeitig $(v_{12}\, w_{12})$ das Grundpaar des zweideutigen Gebildes ist. Zweitens werden wir annehmen, daß (vw) das Grundpaar des eindeutigen, aber $(w_{12}v_{12})$ jenes des zweideutigen Gebildes sei.

Die erste Annahme ist gleichbedeutend mit Folgendem.

Es soll das Anfangselement des Grundpaares in einem Gebilde nur dem Anfangselement des Grundpaares im anderen Gebilde entsprechen, und ebenso sollen sich ausschließlich die beiden Endelemente der Grundpaare entsprechen. Nun entsprechen aber den Anfangselementen die Theilverhältnißwerthe: o, o und den Endelementen die Theilverhältnißwerthe; ∞, ∞.

Setzt man daher in die Verwandtschaftsgleichung (1) $\xi = o$, so muß $\eta = o$ eine doppelte Wurzel sein und für $\xi = \infty$ muß $\eta = \infty$ eine doppelte Wurzel der Gleichung darstellen.

Führt man nun in (1) den Werth $\xi = o$ wirklich ein, so bleibt:

$$a_1\eta^2 + b_1\eta + c_1 = o,$$

und wenn also $\eta = o$ eine doppelte Wurzel sein soll so muß:

$$b_1 = o, \quad c_1 = o$$

sein. Hiedurch geht (1) über in:

$$\xi(a\eta^2 + b\eta + c) + a_1\eta^2 = o,$$

welche Gleichung sich auch in die Form:

$$\left(a + \frac{b}{\eta} + \frac{c}{\eta^2}\right) + \frac{a_1}{\xi} = o$$

kleiden läßt. Soll diese Gleichung für $\xi = \infty$ die doppelte Wurzel $\eta = \infty$ besitzen, so muß:

$$a = b = o$$

sein.

Es geht also schließlich die Verwandtschaftsgleichung (1) über in:

$$c\xi + a_1\eta^2 = o,$$

oder, wenn $-\frac{a_1}{c}$ mit l bezeichnet wird, in:

$$\xi = l\eta^2. \tag{2}$$

Man wird leicht erkennen, daß für den zweiten Fall, wo nämlich (vw) und $(w_{12}\, v_{12})$ die Grundpaare sind, dem Wethe $\xi = o$ der Werth $\eta = \infty$ doppelt entspricht, und in derselben Art dem Werthe $\xi = \infty$ der Werth $\eta = o$ doppelt zukommt.

Schreibt man (1) in der Form:

$$(a\eta^2 + b\eta + c) + \frac{(a_1\eta^2 + b_1\eta + c_1)}{\xi} = o$$

und setzt $\xi = \infty$, so bleibt (da η gleichzeitig Null wird):

$$a\eta^2 + b\eta + c = o$$

woraus folgt, daß:

$$b = c = o$$

sein müsse.

Gibt man der Gleichung (1) die Gestalt:

$$\xi\left(a + \frac{b}{\eta} + \frac{c}{\eta^2}\right) + \left(a_1 + \frac{b_1}{\eta} + \frac{c_1}{\eta^2}\right) = o$$

und setzt $\xi = o$, so bleibt (da η gleichzeitig unendlich wird)

$$a_1 + \frac{b_1}{\eta} + \frac{c_1}{\eta^2} = o$$

und es muß also, damit $\eta = \infty$ eine doppelte Wurzel sei,

$$a_1 = b_1 = o$$

sein.

Die Verwandtschaftsgleichung (1) nimmt daher in diesem Falle die Form an:

$$a\xi\eta^2 + c_1 = o$$

oder, wenn man $-\frac{c_1}{a}$ kurz mit k bezeichnet:

$$\xi\eta^2 = k. \tag{3}$$

2. Der zweite Fall, welcher also durch Gleichung (3) charakterisirt wird, ist besonders dann bemerkenswerth, wenn sich die beiden gleichartigen ein-zweideutigen Gebilde auf demselben Träger befinden, und wenn überdies die beiden Elemente v und w_{12} und ebenso w und v_{12} über einanderfallen. In diesem Falle sind nämlich, da die Elementenpaare (vw), $(w_{12}\, v_{12})$ identisch sind, die beiden Theilverhältnisse ξ, η auf ein und dasselbe Grundpaar bezogen. Um nun die „drei Doppelelemente beider Gebilde“ zu finden, d. h. jene Elemente, in denen ein Element des einen Gebildes mit einem ihm entsprechenden Elemente des anderen Gebildes vereinigt ist, braucht man nur $\xi = \eta$ zu setzen. Man erhält somit für die drei Doppelelemente beider Gebilde die einfache cubische Gleichung

$$\xi^3 = k$$

und es sind somit die drei dritten Wurzeln aus k die Theilverhältnisse der drei Doppelelemente der beiden Gebilde.

3. Der zuletzt behandelte Fall ist deßhalb von besonderem Interesse, weil er für die Curven dritter Ordnung, welche einen Doppelpunkt besitzen, von großer Fruchtbarkeit ist.

Es sei C_4^3 eine solche Curve, δ ihr Doppelpnnkt und G_1, G_2 ihre Tangenten in diesem Punkte. Jede durch δ gehende Gerade A schneidet die Curve C_4^3 in einem bestimmten Punkte a und umgekehrt geht durch jeden Punkt der Curve nur ein einziger Strahl des Büschels δ. Wir können kurz sagen: das Strahlenbüschel δ liegt perspectivisch mit der Curve C_4^3. Um also irgend einen Punkt der Curve C_4^3 zu bestimmen, ist nur nöthig, den durch ihn gehenden

Strahl des Büschels δ zu fixiren, was wir dadurch am einfachsten erzielen, daß wir das Theilverhältniß dieses Strahles bezüglich des Strahlenpaares G_1, G_2 angeben. Es wird in dieser Weise jedem Punkte a der Curve C_4^3 ein bestimmtes Theilverhältniß α entsprechen, durch welches umgekehrt der Punkt bestimmt ist.

Den Theilverhältnißwerthen o und ∞ entsprechen die beiden dem Doppelpunkte δ unendlich nahen Punkte der Curve C_4^3 — die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes.

Von jedem Punkte a der Curve C_4^3 lassen sich an dieselben zwei Tangenten legen, deren Berührungspunkte a_1, a_2 nach Hesse zwei conjugirte Punkte genannt werden, für welche dann a der gemeinsame Tangentialpunkt ist. Ordnet man dem von δ nach a gehenden Strahle A die beiden von δ nach a_1 und a_2 gehenden Strahlen A_1, A_2 resp. zu, so erhält man am Scheitel δ zwei ein-zweideutige Büschel, welche von der, in Art. 2 besprochenen Art sind [1]). Die beiden Doppelpunktstangenten G_1, G_2 spielen hier gleichzeitig die Rolle der Verzweigungselemente des eindeutigen Büschels und jene der Doppelelemente des zweideutigen; und zwar entspricht der Tangente G_1, wenn man sie als Verzweigungselement betrachtet, die Tangente G_2 als Doppelelement und umgekehrt ist G_1 das Doppelelement, welches dem Verzweigungselemente G_2 entspricht. Würde man also G_1 und G_2 resp. mit V und W bezeichnen, so müßte man überdies G_1 mit W_{12} und G_2 mit V_{12} bezeichnen.

Wenn also ξ das Theilverhältniß des von δ nach einem Punkte a von C_4^3 gehenden Strahles (genommen bezüglich des Paares G_1, G_2) ist, und wenn η das Theilverhältniß eines von den zwei Strahlen ist, welche δ mit den Berührungspunkten der von a an C_4^3 gehenden zwei Tangenten verbinden, so muß nach Gleichung (3) des 1. Art. zwischen ξ und η die Relation

$$\xi\eta^2 = k \tag{3}$$

bestehen, wobei k eine nur von der Curve C_4^3 abhängige Constante ist.

4. Die drei Inflexionspunkte i_1, i_2, i_3 der Curve C_4^3 sind jene Punkte, welche mit ihren Tangentialpunkten zusammenfallen. Wir

[1]) Siehe Art. 7 des II. Theiles der „Theorie.

werden daher die, diesen drei Inflexionspunkten entsprechenden Theilverhältnisse erhalten, wenn wir in Gleichung (3) $\xi = \eta$ setzen. Dies gibt die schon dagewesene Gleichung:

$$\xi^3 = k,$$

und in der That sind auch die von δ nach den drei Inflexionspunkten i_1, i_2, i_3 gehenden Strahlen J_1, J_2, J_3 die drei Doppelstrahlen der am Scheitel δ von uns betrachteten ein-zweideutigen Büschel [1]).

Hiemit hätten wir auch eine geometrische Bedeutung der Constante k gefunden. Diese Constante bietet sich uns als die dritte Potenz des einem der drei Inflexionspunkte entsprechenden Theilverhältnisses dar.

Hieraus folgt aber sofort der folgende merkwürdige Satz:

„Kennt man von einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte diesen letzteren, seine beiden Tangenten und den aus ihm nach einem Inflexionspunkte (ohne daß dieser selbst bekannt ist) der Curve gehenden Strahl, so sind die zwei nach den übrigen zwei Inflectionspunkten gehenden Strahlen bestimmt".

Ist δ der Doppelpunkt, G_1, G_2 seine Tangenten und J_1 eine durch δ gehende Gerade, von der man weiß, daß sie einen Inflexionspunkt der Curve enthält, so ist nach Früherem

$$\left(\frac{\sin \widehat{G_1 J_1}}{\sin \widehat{G_2 J_1}}\right)^3 = k$$

und folglich besitzen die beiden übrigen nach den anderen zwei Inflexiospunkten gehenden Strahlen J_2, J_3 die Theilverhältnisse:

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right) \frac{\sin \widehat{G_1 J_1}}{\sin \widehat{G_2 J_1}},$$

---

[1]) Vergleiche die zuletzt citirte Stelle.

und:

$$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \quad \frac{\sin \widehat{G_1 J_1}}{\sin \widehat{G_2 J_1}}.$$

Es wird nicht nöthig sein, zu bemerken, daß wenn der Doppelpunkt δ ein eigentlicher ist, die beiden letzten Strahlen imaginär sein müssen.

5. Denkt man sich alle möglichen Curven dritter Ordnung, welche einen gegebenen Doppelpunkt δ[1]) besitzen und in diesem zwei feste Gerade G_1, G_2 berühren, so stellen die drei Wurzeln der Gleichung

$$\xi^3 = k$$

(wobei k eine beliebige Größe ist) die Theilverhältnisse dreier durch δ nach den drei Inflexionspunkten einer Curve des Systemes (aber überdies einer unendlichen Menge anderer Curven desselben Systemes) gehenden Strahlen vor, und zwar bezüglich des Winkels $\widehat{G_1 G_2}$.

Läßt man also k die Zahlenreihe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so erhält man eine unendliche Menge solcher Strahlentrippel welche, wie man aus der letzten Gleichung sofort erkennt, eine cubische Involution bilden, und zwar eine von der besonderen Art, daß die beiden Doppelpunktstangenten G_1, G_2 zwei dreifache Strahlen sind [2]).

Wir können demnach folgenden Satz aufstellen:

„Hat man ein System von Curven dritter Ordnung mit einem gemeinschaftlichen Doppelpunkte, welche in diesem dieselben zwei festen Geraden berühren, so bilden die nach den Inflexionspunkten der Curven aus dem Doppelpunkte gehenden Strahlentrippel eine cubische Involution, für welche die, den Curven gemeinsamen Doppelpunktstangenten dreifache Strahlen sind“.

---

1) Jede dieser Curven ist erst durch vier weitere Punkte bestimmt.

2) Jede von den zwei Strahlen G_1, G_2 stellt selbst ein Strahlentripel vor, und zwar entsprechen sie den Werthen $k = o$ und $k = \pm \infty$.

Da eine cubische Involution, welche zwei dreifache Elemente besitzt, durch ein Elemententripel bestimmt ist , so können wir sagen:

„Kennt man von einer Curve dritter Ordnung den Doppelpunkt und die drei aus diesem, nach den Inflexionspunkten gehenden Strahlen, so sind hiedurch auch die beiden Tangenten des Doppelpunktes bestimmt".